Concours Hypatie 2006 (11^e^ année – Sec. V)

le jeudi 20 avril 2006

---

1. Les entiers impairs positifs sont placés en lignes de manière à former un arrangement triangulaire comme suit.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 3 & & 5 & & & \\
 & & 7 & & 9 & & 11 & & \\
 & 13 & & 15 & & 17 & & 19 & \\
21 & & 23 & & \cdots & & & &
\end{array}$$

   (a) Quel est le 25e entier impair positif ? Dans quelle ligne de l'arrangement triangulaire paraît-il ?

   (b) Quel est le 19e nombre qui paraît dans la 21e ligne ? Expliquer comment la réponse a été obtenue.

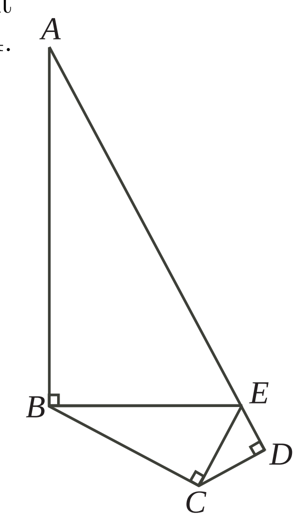
   (c) Déterminer le numéro de la ligne dans laquelle le nombre 1001 paraît, ainsi que le numéro de sa position dans cette ligne. Expliquer comment la réponse a été obtenue.

2. Dans la figure ci-contre, les triangles ABE, BCE et CDE sont rectangles. De plus, $\angle AEB = \angle BEC = \angle CED = 60^\circ$ et $AE = 24$.

   (a) Déterminer la longueur de CE.

   (b) Déterminer le périmètre du quadrilatère $ABCD$.

   (c) Déterminer l'aire du quadrilatère $ABCD$.



3. Une droite d passe par les points $B(7, -1)$ et $C(-1, 7)$.

   (a) Déterminer l'équation de cette droite.

   (b) Déterminer les coordonnées du point P, sur la droite d, qui est équidistant des points $A(10, -10)$ et $O(0, 0)$ (c.-à-d. de manière que $PA = PO$).

   (c) Déterminer les coordonnées de tous les points Q, sur la droite d, pour lesquels $\angle OQA = 90^\circ$.

4. L'index d'abondance $I(n)$ d'un entier strictement positif n est le nombre $I(n) = \dfrac{\sigma(n)}{n}$, $\sigma(n)$ étant égal à la somme de tous les diviseurs positifs de n, y compris 1 et n.

   Par exemple, $I(12) = \dfrac{1+2+3+4+6+12}{12} = \dfrac{7}{3}$.

   (a) Démontrer que pour chaque nombre premier p, $I(p) \leq \frac{3}{2}$.

   (b) Démontrer que pour chaque nombre premier impair p et pour chaque entier strictement positif k, $I(p^k) < 2$.

   (c) Soit p et q deux nombres premiers distincts. Déterminer $I(p^2)$, $I(q)$ et $I(p^2q)$ et démontrer que $I(p^2)I(q) = I(p^2q)$.

   (d) Déterminer le plus petit entier impair positif n pour lequel $I(n) > 2$. Justifier les étapes de son raisonnement.