Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Les solutions de 8ième année suit les solutions de 7ième année

Concours Gauss 2006

(7^{e} et 8^{e} années – Secondaire I et II)

le mercredi 10 mai 2006

Solutions

Personnel du Concours canadien de mathématiques

Barry Ferguson (directeur)
Ed Anderson
Lloyd Auckland
Fiona Dunbar
Jeff Dunnett
Judy Fox
Judith Koeller
Joanne Kursikowski
Angie Lapointe
Matthew Oliver
Larry Rice
Linda Schmidt
Kim Schnarr
Carolyn Sedore
Ian VanderBurgh

Comité du concours Gauss

Mark Bredin (président), St. John's Ravenscourt School, Winnipeg, MB
Sandy Emms Jones (présidente adjointe), Forest Heights C. I., Kitchener, ON
Ed Barbeau, Toronto, ON
Kevin Grady, Cobden District P. S., Cobden, ON
Joanne Halpern, Toronto, ON
David Matthews, University of Waterloo, Waterloo, ON
John Grant McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB
Gerry Stephenson, St. Thomas More C. S. S., Hamilton, ON

Les solutions de 8ième année suit les solutions de 7ième année

7e année

1. On a $(8 \times 4) + 3 = 32 + 3 = 35$.

   Réponse: (D)

2. Puisque les deux angles forment un angle plat, la somme de leur mesure est égale à 180°.
   Donc $x° + 40° = 180°$, ou $x + 40 = 180$. Donc $x = 140$.

   Réponse: (B)

3. Pour obtenir le nombre de billets de 50 \$, on divise la somme par 50. On obtient $10\,000 \div 50 = 200$.
   Donc, Mikhail a 200 billets de 50 \$.

   Réponse: (B)

4. La figure est composée de 8 côtés de même longueur.
   Puisque chaque côté a une longueur de 2, le périmètre est égal à 8×2, ou 16.

   Réponse: (A)

5. On utilise un dénominateur commun : $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15}$. Cette somme est égale à $\frac{11}{15}$.

   Réponse: (C)

6. On calcule d'abord les produits, puis on additionne :
   $$6 \times 100\,000 + 8 \times 1000 + 6 \times 100 + 7 \times 1 = 600\,000 + 8000 + 600 + 7 = 608\,607$$

   Réponse: (C)

7. Puisque $3 + 5x = 28$, alors $5x = 25$. Donc $x = 5$.

   Réponse: (C)

8. On sait que $9^2 = 9 \times 9$ et que $\sqrt{9} = 3$. Donc, $9^2 - \sqrt{9} = 81 - 3 = 78$.

   Réponse: (E)

9. Le nombre total de boules est égal à $2 + 5 + 4$, ou 11.
   Puisqu'il y a 5 boules jaunes, la probabilité de choisir une boule jaune est égale à $\frac{5}{11}$.

   Réponse: (B)

10. Une extrémité du bloc est vis-à-vis du 2 sur la règle, tandis que l'autre extrémité est entre le 4 et le 5. La longueur du bloc est donc entre 2 et 3 unités.
    Or, seul le choix (C), c'est-à-dire 2,4 cm, est entre 2 et 3.
    (On peut vérifier que ce choix est raisonnable. En effet, l'extrémité du bloc est à peut près à mi-chemin entre le 4 et le 5. Donc, 2,4 cm est une réponse raisonnable.)

    Réponse: (C)

11. *Solution 1*
    Puisque le taux de taxe est de 15 %, le coût total du disque est égal à $1{,}15 \times 14{,}99$ \$, ce qui est égal à 17,2385 \$, ou 17,24 \$.

    Solution 2
    Puisque le taux de taxe est de 15 % et que le disque coûte 14,99 \$, la taxe est égale à $0{,}15 \times 14{,}99$ \$, ce qui est égal à 17,2385 \$, ou 17,24 \$.
    Le prix du disque, incluant la taxe, est égal à 14,99 \$ + 2,25 \$, ou 17,24 \$.

    Réponse: (A)

12. *Solution 1*
La base de la piscine mesure 6 m sur 12 m. Son aire est donc égale à (6×12) m^2, ou 72 m^2. Le volume de la piscine est égal à (72×4) m^3, ou 288 m^3.
Puisque la piscine est à moitié pleine, le volume d'eau dans la piscine est égal à la moitié de 288 m^3, soit 144 m^3.

Solution 2
Puisque la piscine est à moitié pleine, la profondeur de l'eau est égale à la moitié de 4 m, c'est-à-dire 2 m.
L'eau forme un prisme à base rectangulaire et cette base a une aire de (6×12) m^2, ou 72 m^2.
Son volume est égal à (2×72) m^3, ou 144 m^3.

Réponse: (E)

13. Pour déterminer le nombre qui doit être additionné à 8 pour donner une réponse de -5, on soustrait 8 de -5 pour obtenir $(-5) - 8$, ou -13. Vérification : $8 + (-13) = -5$.

Réponse: (D)

14. *Solution 1*
Puisque AOB est un diamètre du cercle, alors $\angle AOB = 180°$.
L'angle du secteur « Hiver » est droit. Il mesure donc 90°. L'angle du secteur « Printemps » mesure 60°.
Donc, l'angle du secteur « Automne » mesure $180° - 90° - 60°$, ou 30°.
Le secteur qui a un angle de 30° correspond à quelle fraction d'un disque complet ? Puisque le disque balaie un angle de 360° au centre, la fraction correspond à $\dfrac{30}{360}$, c'est-à-dire $\frac{1}{12}$.
Donc, $\frac{1}{12}$ des élèves ont choisi l'automne comme saison préférée, ce qui représente $\frac{1}{12} \times 600$ élèves, ou 50 élèves.

Solution 2
Puisque AOB est un diamètre du cercle, alors la moitié des 600 élèves, soit 300 élèves, ont choisi l'été comme saison préférée.
Puisque l'angle du secteur « Hiver » est droit (il mesure 90°) et qu'un angle droit est le quart d'un angle plein, alors un quart des 600 élèves, soit 150 élèves, ont choisi l'hiver.
Puisque l'angle du secteur « Printemps » mesure 60° et que cet angle est $\frac{1}{6}$ d'un angle plein, alors $\frac{1}{6}$ des 600 élèves, soit 100 élèves, ont choisi le printemps.
Puisqu'il y avait 600 élèves en tout, le nombre d'élèves qui ont choisi l'automne est égal à $600 - 300 - 150 - 100$, ou 50.

Réponse: (B)

15. Puisque Hervé demande 50 % de plus pour chaque heure additionnelle que pour l'heure précédente, son taux horaire est 1,5 fois le taux horaire précédent.
Hervé reçoit 4 \$ pour la première heure.
Il reçoit $1{,}5 \times 4$ \$, soit 6 \$, pour la deuxième heure.
Il reçoit $1{,}5 \times 6$ \$, soit 9 \$, pour la troisième heure.
Il reçoit $1{,}5 \times 9$ \$, soit 13,50 \$, pour la quatrième heure.
En tout, il reçoit 4 \$ + 6 \$ + 9 \$ + 13,50 \$, ou 32,50 \$.

Réponse: (C)

16. *Solution 1*
On obtient des fractions équivalentes à $\frac{5}{8}$ en multipliant le numérateur et le dénominateur par le même nombre.

La somme du numérateur et du dénominateur de $\frac{5}{8}$ est égale à 13. Lorsqu'on multiplie le numérateur et le dénominateur par un même nombre, la somme aussi est multipliée par ce même nombre.
Puisque $91 = 13 \times 7$, on devrait multiplier le numérateur et le dénominateur par 7 pour obtenir $\frac{5\times7}{8\times7} = \frac{35}{56}$. Cette dernière fraction est équivalente à $\frac{5}{8}$ et la somme de son numérateur et de son dénominateur est égale à 91.
La différence entre le dénominateur et le numérateur de cette fraction est égale à $56 - 35$, ou 21.

Solution 2
On construit une suite de fractions équivalentes à $\frac{5}{8}$ en multipliant successivement le numérateur et le dénominateur par 2, par 3, par 4, etc. On obtient :

$$\frac{5}{8}, \frac{10}{16}, \frac{15}{24}, \frac{20}{32}, \frac{25}{40}, \frac{30}{48}, \frac{35}{56}, \ldots$$

Puisque la somme du numérateur et du dénominateur de $\frac{35}{56}$ est égale à 91 (on a $35 + 56 = 91$), il s'agit de la fraction que l'on cherche.
La différence entre le dénominateur et le numérateur de cette fraction est égale à $56 - 35$, ou 21.

Solution 3
On obtient des fractions équivalentes à $\frac{5}{8}$ en multipliant le numérateur et le dénominateur par le même nombre.
Si on multiplie par n, on obtient la fraction $\frac{5n}{8n}$ qui est équivalente à $\frac{5}{8}$.
On veut que la somme du numérateur et du dénominateur soit égale à 91, c'est-à-dire que $5n + 8n = 91$. Donc $13n = 91$, d'où $n = 7$.
La fraction que l'on cherche est $\frac{5\times7}{8\times7}$, c'est-à-dire $\frac{35}{56}$.
La différence entre le dénominateur et le numérateur de cette fraction est égale à $56 - 35$, ou 21.

Réponse: (A)

17. *Solution 1*
Puisque le soulier a une longueur de 28 cm et que le soulier peut être placé 15 fois le long d'un côté du tapis, ce côté mesure 15×28 cm, ou 420 cm.
Puisque le soulier peut être placé 10 fois le long d'un autre côté, ce côté mesure 10×28 cm, ou 280 cm.
On a $420 \times 280 = 117\,600$. L'aire du tapis est égale à $117\,600$ cm^2.

Solution 2
Puisque le soulier peut être placé 15 fois le long d'un côté du tapis et 10 fois le long d'un autre côté et que $15 \times 10 = 150$, l'aire du tapis est égale à 150 « souliers carrés » (c'est-à-dire 150 carrés qui mesurent un soulier sur un soulier).
Puisque le soulier a une largeur et une longueur de 28 cm, un « soulier carré » a une aire de (28×28) cm^2, c'est-à-dire 784 cm^2. On a $150 \times 784 = 117\,600$. L'aire du tapis est égale à $117\,600$ cm^2.

Réponse: (E)

18. *Solution 1*
Puisque Kotima met 120 secondes pour faire 3 fois le tour de la piste, elle met 40 secondes $(120 \div 3 = 40)$ pour faire 1 fois le tour de la piste.
Puisque Leah met 160 secondes pour faire 5 fois le tour de la piste, elle met 32 secondes $(160 \div 5 = 32)$ pour faire 1 fois le tour de la piste.
Puisque Leah met moins de temps pour faire le tour de la piste, elle est la plus rapide.

Puisque Leah met 32 secondes pour parcourir les 150 m autour de la piste, sa vitesse est égale à $\frac{150}{32}$ m/s, c'est-à-dire 4,6875 m/s, soit environ 4,69 m/s.
Donc, Leah est la plus rapide. Elle court à une vitesse de 4,69 m/s.

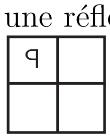
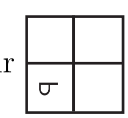
Solution 2
Puisque Kotima met 120 secondes pour faire 3 fois le tour de la piste, elle parcourt 3×150 m, ou 450 m en tout. Sa vitesse est égale à $\frac{450}{120}$ m/s, c'est-à-dire 3,75 m/s.
Puisque Leah met 160 secondes pour faire 5 fois le tour de la piste, elle parcourt 5×150 m, ou 750 m en tout. Sa vitesse est égale à $\frac{750}{160}$ m/s, c'est-à-dire 4,6875 m/s, soit environ 4,69 m/s.
Puisque sa vitesse est plus grande, Leah est la plus rapide. Elle court à une vitesse de 4,69 m/s.

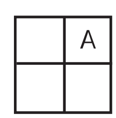
Réponse: (D)

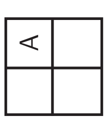
19. *Solution 1*
Dans une minute, il y a 60 secondes.
Dans une heure, il y a 60 minutes. Il y a donc 3600 secondes ($60 \times 60 = 3600$).
Dans une journée, il y a 24 heures. Il y a donc 86 400 secondes ($24 \times 3600 = 86\,400$).
Donc, 10^6 secondes correspondent à $\frac{10^6}{86\,400}$ jours, ou environ 11,574 jours. Le choix de réponse le plus près est 10 jours.

Solution 2
Puisqu'il y a 60 secondes dans une minute, 10^6 secondes correspondent à $\frac{10^6}{60}$ minutes, soit environ 16 666,67 minutes.
Puisqu'il y a 60 minutes dans une heure, 16 666,67 minutes correspondent à $\frac{16\,666{,}67}{60}$ heures, soit environ 277,78 heures.
Puisqu'il y a 24 heures dans une journée, 277,78 heures correspondent à $\frac{277{,}78}{24}$ jours, soit environ 11,574 jours. Le choix de réponse le plus près est 10 jours.

Réponse: (B)

20. Pour transformer le quadrillage qui contient le P de la position initiale à la position finale, on peut lui faire subir une réflexion par rapport à la ligne verticale au milieu du quadrillage, pour obtenir la position  puis lui faire subir une rotation de 90° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, par rapport au centre du quadrillage, pour obtenir .

Si on fait subir les mêmes transformations au quadrillage qui contient le A, on obtient 

puis . (On peut combiner des transformations de plusieurs façons pour transformer le P de sa position à sa position finale ; à chaque fois, on obtiendra la même position finale du A.)

Réponse: (B)

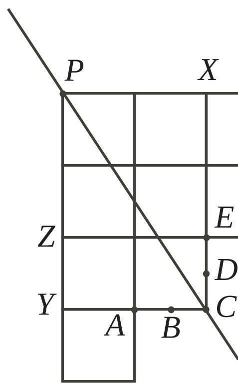
21. *Solution 1*
De x heures du matin à x heures du soir, il y a 12 heures. (Par exemple, de 10 heures du matin

à 10 heures du soir, il y a 12 heures.)
Donc, Gaël travaille 12 heures le samedi.

Solution 2
De x heures du matin jusqu'à midi, Gaël travaille $12 - x$ heures.
De midi jusqu'à x heures du soir, elle travaille x heures.
Le nombre total d'heures de travail est égal à $(12 - x) + x$, ou 12.

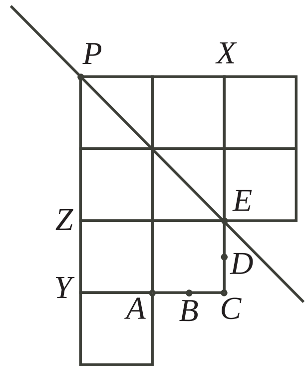
RÉPONSE: (E)

22. À titre d'essai, on examine le résultat si la droite passe au point C.



Puisque chaque petit carré est un carré-unité, on voit que le rectangle $PXCY$ a une aire de 6. La droite qui passe par les points P et C coupe le rectangle en deux moitiés qui ont chacune une aire de 3.
(On a utilisé une propriété qui sera reprise plusieurs fois dans cette démonstration : Si une droite forme une diagonale d'un rectangle, elle le coupe en deux triangles congruents qui ont donc chacun la même aire.)
La partie de la figure qui est en dessous de la droite a une aire de $3 + 1$, ou 4, car on doit ajouter le carré du bas du demi-rectangle.
La partie de la figure qui est au-dessus de la droite a une aire de $3 + 2$, ou 5, car on doit ajouter les deux carrés à droite du demi-rectangle.
Une droite qui passe au point C ne coupe donc pas la figure en deux morceaux de même aire. Donc, il ne faut pas choisir C.
De plus, puisque le morceau du dessous a une plus petite aire que le morceau du dessus, il faut bouger la droite un peu vers le haut (et on ne peut donc pas choisir A ou B).

La droite devrait-elle passer au point E ?



Dans ce cas, la droite forme une diagonale du carré $PXEZ$, qui a une aire de 4, et elle le coupe en deux moitiés qui ont chacune une aire de 2.
L'aire du morceau supérieur de la figure a donc une aire de $2 + 2$, ou 4, tandis que le morceau inférieur a une aire de $2 + 3$, ou 5.
Puisque cette droite ne coupe pas la figure en deux morceaux de même aire, il ne faut pas choisir le point E.
Il ne reste que le point D parmi les cinq choix. C'est donc ce point qu'il faut choisir.

(On devrait vérifier que la droite qui passe au point D coupe bien la figure en deux morceaux de même aire.
La figure a une aire de 9, car elle est formée de 9 carrés-unités.
Si la droite passe au point D, le morceau supérieur est formé du triangle PXD et de deux carrés-unités.
L'aire du triangle PXD est égale à $\frac{1}{2} \times 2 \times 2\frac{1}{2}$, c'est-à-dire à $2\frac{1}{2}$, puisque $PX = 2$ et que $XD = 2\frac{1}{2}$.
L'aire du morceau supérieur est donc égale à $2\frac{1}{2} + 2$, ou $4\frac{1}{2}$, ce qui est bien la moitié de l'aire totale de la figure.)

Réponse: (D)

23. On nomme les sept cases pour faciliter la communication.

$$\begin{array}{r} \boxed{A}\,\boxed{B} \\ +\ \boxed{C}\,\boxed{D} \\ \hline \boxed{E}\,\boxed{F}\,\boxed{G} \end{array}$$

Puisqu'on additionne deux nombres de deux chiffres, la somme doit être inférieure à 200 ; donc, E doit être égal à 1. (Il ne peut être égal à 0, puisque la somme compte trois chiffres.)

Où peut-on placer le chiffre 0 ?
Puisqu'aucun des nombres ne peut commencer par 0, alors ni A, ni C n'est égal à 0.
Puisque les sept chiffres sont différents, alors ni B, ni D n'est égal à 0, sinon D et G, ou bien B et G, seraient identiques.
Donc, F ou G est égal à 0.

Puisqu'on additionne deux nombres de deux chiffres et que la somme est supérieure à 100, alors $A + C$ doit être supérieur ou égal à 9. (Il pourrait être égal à 9 s'il y avait une retenue dans l'addition des chiffres des unités.)
Donc, A et C doivent prendre les valeurs suivantes dans un ordre quelconque : 3 et 6, ou 4 et 5,

ou 4 et 6, ou 5 et 6.

Si G est égal à 0, alors B et D doivent égaler 4 et 6, ou 6 et 4. Or dans ce cas, les plus grandes valeurs possibles de A et de C sont 3 et 5, ou 5 et 3, et ces valeurs ne figurent pas parmi les possibilités énumérées ci-dessus.
Donc, G ne peut pas être égal à 0. Donc $F = 0$.

$$\begin{array}{cccc} & & \boxed{A} & \boxed{B} \\ + & & \boxed{C} & \boxed{D} \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{G} \end{array}$$

On sait que la somme de A et de C est égale à 9 ou à 10 et que A et C doivent prendre les valeurs suivantes dans un ordre quelconque : 3 et 6, ou 4 et 5, ou 4 et 6.
Dans chacun de ces cas, les valeurs possibles qui restent pour B et D sont trop petites pour donner une retenue.
Il faut donc que A et C aient une somme de 10. Donc, A et C prennent les valeurs 4 et 6, ou 6 et 4.
On examine ce qui arrive si $A = 4$ et $C = 6$.

$$\begin{array}{cccc} & & \boxed{4} & \boxed{B} \\ + & & \boxed{6} & \boxed{D} \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{G} \end{array}$$

Les autres chiffres sont 2, 3 et 5. Pour que l'addition soit juste, il faut que B et D prennent les valeurs 2 et 3 et que G soit égal à 5. (On peut vérifier que B et D peuvent prendre ces valeurs dans un ordre ou l'autre ; on peut aussi vérifier que l'on peut aussi avoir $A = 6$ et $C = 4$.)

Donc, le chiffre des unités de la somme est égal à 5, comme dans cet exemple :

$$\begin{array}{cccc} & & \boxed{4} & \boxed{2} \\ + & & \boxed{6} & \boxed{3} \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{5} \end{array}$$

(Remarquer qu'il est possible d'en arriver à cette réponse par tâtonnements au lieu de suivre une méthode logique.)

RÉPONSE: (D)

24. La somme de la longueur de deux côtés d'un triangle doit être supérieure à la longueur du troisième côté.
(Si on sait que deux côtés sont congrus, il suffit de vérifier que la somme de la longueur de ces deux côtés est supérieure à la longueur du troisième côté, car la somme de la longueur d'un des côtés congrus et de la longueur du troisiéme côté est alors supérieure à la longueur de l'autre côté congru.)
Si les deux côtés congrus ont une longueur de 2, le 3^{e} côté doit mesurer moins de $2 + 2$, ou 4. Il y a une seule possibilité, soit une longueur de 3 (car le triangle ne peut être équilatéral et le 3^{e} côté ne peut donc pas mesurer 3).
Si les deux côtés congrus ont une longueur de 3, le 3^{e} côté doit mesurer moins de $3 + 3$, ou 6. Le

3^e côté peut donc mesurer 2 ou 5. (Il ne peut mesurer 3, car le triangle ne peut être équilatéral.)
Il y a donc deux possibilités.
Si les deux côtés ont une longueur de 5, le 3^e côté doit mesurer moins de $5+5$, ou 10. Le 3^e côté peut mesurer 2, 3 ou 7. (Il ne peut mesurer 5, car le triangle ne peut être équilatéral.) Il y a trois possibilités.
Si les deux côtés congrus ont une longueur de 7, le 3^e côté doit mesurer moins de $7+7$, ou 14. Le 3^e côté peut mesurer 2, 3, 5 ou 11. (Il ne peut mesurer 7, car le triangle ne peut être équilatéral.)
Il y a quatre possibilités.
Si les deux côtés ont une longueur de 11, le 3^e côté doit mesurer moins de $11+11$, ou 22. Le 3^e côté peut mesurer 2, 3, 5 and 7. (Il ne peut mesurer 11, car le triangle ne peut être équilatéral.)
Il y a quatre possiblilités.
Le nombre de triangles différents que l'on peut former et qui ont exactement deux côtés congrus, est égal à $1+2+3+4+4$, ou 14.

Réponse: (E)

25. Les cinq notes sont N, 42, 43, 46 et 49.
Si $N < 43$, la médiane est égale à 43.
Si $N > 46$, la médiane est égale à 46.
Si $N \geq 43$ et $N \leq 46$, alors la médiane est égale à N.
On poursuit l'examen de chaque cas.

Si $N < 43$, la médiane est égale à 43 et la moyenne est donc égale à 43.
Puisque la moyenne est égale à 43, la somme des cinq notes est donc égale à 5×43, ou 215.
Donc, $N+42+43+46+49 = 215$, ou $N+180 = 215$, d'où $N = 35$. Cette note est bien inférieure à 43.
On peut vérifier que la médiane et la moyenne de 35, 42, 43, 46 et 49 sont toutes deux 43.

Si $N > 46$, la médiane est égale à 46 et la moyenne est donc égale à 46.
Puisque la moyenne est égale à 46, la somme des cinq notes est donc égale à 5×46, ou 230.
Donc, $N + 42 + 43 + 46 + 49 = 230$, ou $N + 180 = 230$, d'où $N = 50$. Cette note est bien supérieure à 46.
On peut vérifier que la médiane et la moyenne de 42, 43, 46, 49 et 50 sont toutes deux 46.

Si $N \geq 43$ et $N \leq 46$, alors la médiane est égale à N et la moyenne est donc égale à N.
Puisque la moyenne est égale à N, la somme des cinq notes est donc égale à $5N$.
Donc, $N + 42 + 43 + 46 + 49 = 5N$, ou $N + 180 = 5N$, d'où $4N = 180$ et $N = 45$. Cette note est bien supérieure à 43 et inférieure à 46.
On peut vérifier que la médiane et la moyenne de 42, 43, 45, 46 et 49 sont toutes deux 45.

Il y a donc 3 valeurs possibles de N.

Réponse: (A)

8e année

1. On tient compte de la priorité des opérations : $30 - 5^2$ est égal à $30 - 25$, ou 5. Réponse: (E)

2. *Solution 1*
Puisque $98 \div 2 = 49$, $98 \div 7 = 14$, $98 \div 14 = 7$, $98 \div 49 = 2$ et $98 \div 4 = 24{,}5$, le seul choix qui n'est pas un diviseur de 98 est 4.

Solution 2
La factorisation première de 98 est : $98 = 2 \times 7 \times 7$
Parmi les choix de réponse, seul 4 n'est pas un diviseur de 98, car $4 = 2 \times 2$ et il n'y a pas deux facteurs 2 dans la factorisation première de 98.
Réponse: (B)

3. Puisque le taux de taxe est de 15 % et que l'appareil-photo se vend 200,00 \$, la taxe est égale à $0{,}15 \times 200{,}00$ \$, ou 30,00 \$.
Réponse: (A)

4. Puisque $1 + 1{,}1 + 1{,}11 = 3{,}21$, alors pour obtenir une somme de 4,44, il faut ajouter $4{,}44 - 3{,}21$, ou 1,23. On doit donc placer le nombre 1,23 dans la case.
Réponse: (B)

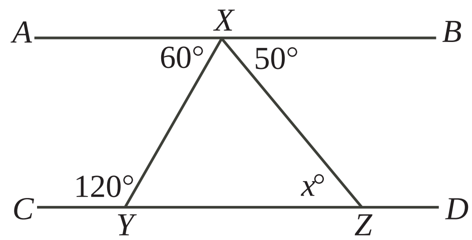
5. Le nombre total de boules est égal à $2 + 5 + 4$, ou 11.
Puisqu'il y a 5 boules jaunes, la probabilité de choisir une boule jaune est égale à $\frac{5}{11}$.
Réponse: (B)

6. On vérifie chaque nombre entre 20 et 30.
Les nombres 22, 24, 26 et 28 ne sont pas premiers, car ils sont divisibles par 2.
Les nombres 21 et 27 ne sont pas premiers, car ils sont divisibles par 3.
De plus, 25 n'est pas premier, car il est divisible par 5.
Les deux nombres qui restent, soit 23 et 29, sont premiers. Il y a donc 2 nombres premiers entre 20 et 30.
Réponse: (C)

7. Le bloc est un prisme à base rectangulaire. Son volume est égal au produit de l'aire de sa base et de sa hauteur. Puisque la base a une aire de 24 cm^2 et que $5 \times 24 = 120$, la boîte a une hauteur de 5 cm.
Réponse: (A)

8. À vitesse lente, le ventilateur fait 100 rotations en une minute. Puisqu'il tourne deux fois plus vite à vitesse moyenne, il fait 200 rotations en une minute à cette vitesse.
Puisqu'il tourne encore deux fois plus vite à haute vitesse, il fait 400 rotations en une minute à haute vitesse.
En 15 minutes à haute vitesse, il fait donc 15×400 rotations, soit 6000 rotations.
Réponse: (C)

9. *Solution 1*



Puisque $\angle AXB = 180°$, alors $\angle YXZ = 180° - 60° - 50°$, c'est-à-dire que $\angle YXZ = 70°$.
De plus, $\angle XYZ = 180° - \angle CYX$, c'est-à-dire que $\angle XYZ = 180° - 120°$, ou $\angle XYZ = 60°$.
Puisque la somme de la mesure des angles du triangle XYZ est égale à $180°$, alors
$x° = 180° - 60° - 70°$, d'où $x = 50$.

Solution 2
Puisque $\angle CYX + \angle AXY = 180°$, alors AB est parallèle à CD.
Donc $\angle YZX = \angle ZXB$, c'est-à-dire que $x° = 50°$, ou $x = 50$.

Réponse: (A)

10. *Solution 1*
Lorsqu'on divise 8362 par 12, on obtient :

$$\begin{array}{r|l} & 696 \\ \hline 12 & 8362 \\ & \underline{72} \\ & 116 \\ & \underline{108} \\ & 82 \\ & \underline{72} \\ & 10 \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{l|l} 8362 & 12 \\ \cline{2-2} \underline{72} & 696 \\ 116 & \\ \underline{108} & \\ 82 & \\ \underline{72} & \\ 10 & \end{array}$$

Donc $\dfrac{8362}{12} = 696\dfrac{10}{12}$.
En d'autres mots, avec 8362 suçons, on peut préparer 696 emballages et il restera 10 suçons.

Solution 2
Lorsqu'on divise 8362 par 12, on obtient environ 696,83. Le nombre maximal possible d'emballages est donc égal à 696.
Or, dans 696 emballages, il y a 8352 suçons. Il en reste donc 10, puisqu'il y avait 8362 suçons au départ.

Réponse: (E)

11. Puisque le tonnerre voyage à une vitesse de 331 m/s et que Jos l'entend 12 secondes après l'éclair, la distance entre Jos et l'éclair est égale à 12×331 m, ou 3972 m. Cette distance est égale à 3,972 km ou, au kilomètre près, à 4,0 km.

Réponse: (C)

12. Le triangle ombré a une base de 10 cm.
La hauteur qui correspond à cette base est la même que celle du rectangle, soit 3 cm.
(On sait que le quadrilatère est un rectangle, car il a deux paires de côtés opposés congrus et deux angles droits.)
L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2} \times 10 \times 3$ cm^2, ou 15 cm^2.

Réponse: (C)

13. On cherche deux entiers consécutifs, le premier étant un multiple de 7 et le second étant un multiple de 5.
On examine les premiers multiples de 7 et dans chaque cas, le nombre suivant.
S'agit-il de 7 et 8 ? Non, car 8 n'est pas un multiple de 5.
S'agit-il de 14 et 15 ? Oui, car 15 est un multiple de 5.
Donc, Kim a 15 ans cette année.
Elle aura 26 ans dans 11 ans.
(Bien sûr, d'autres nombres sont possibles, comme 49 et 50 ou 84 et 85, mais dans ces cas, Kim aurait 50 ans ou 85 ans cette année et elle aurait eu 26 ans dans le passé.)

RÉPONSE: (A)

14. On sait que le 2e terme est égal à 260.
Pour obtenir le 3e terme, on divise 260 par 2, ce qui donne 130, puis on ajoute 10 pour obtenir 140.
Le 3e terme est égal à 140.
Pour obtenir le 4e terme, on divise 140 par 2, ce qui donne 70, puis on ajoute 10 pour obtenir 80.
Le 4e terme est égal à 80.

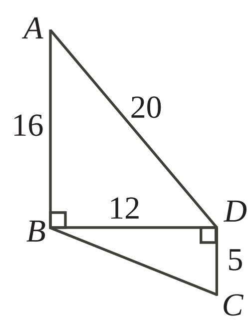
RÉPONSE: (E)

15. Lorsque la lettre  est réfléchie par rapport à la droite 1, on obtient la figure  .

Lorsque cette figure est réfléchie par rapport à la droite 2, on obtient la figure  .

RÉPONSE: (D)

16. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABD, on a $BD^2 + 16^2 = 20^2$, ou $BD^2 + 256 = 400$, d'où $BD^2 = 144$. Donc $BD = 12$.



D'après le théorème de Pythagore dans le triangle BDC, on a $BC^2 = 12^2+5^2$, ou $BC^2 = 144+25$. Donc $BC^2 = 169$, d'où $BC = 13$.

RÉPONSE: (A)

17. Puisque $10^x - 10 = 9990$, alors $10^x = 10\,000$.
Donc $x = 4$, puisque 10 000 se termine par 4 zéros.

RÉPONSE: (D)

18. Puisque le carré a un périmètre de 24, ses côtés mesurent $\frac{1}{4} \times 24$, ou 6.
L'aire du carré est donc égale à 6^2, ou 36.
Puisque le rectangle a la même aire, soit 36, et une largeur de 4, il a une longueur de $\dfrac{36}{4}$, ou 9.
Le rectangle a donc un périmètre de $4 + 9 + 4 + 9$, ou 26.

RÉPONSE: (A)

19. *Solution 1*

On peut écrire toutes les façons de s'asseoir en utilisant la première lettre de chaque nom et en se rappelant qu'il y a deux façons pour Dominique et Émilie de s'asseoir ensemble :

DEBC, DECB, EDBC, EDCB, BDEC, CDEB, BEDC, CEDB, BCDE, CBDE, BCED, CBED

Il y a 12 façons d'asseoir les quatre amies.

Solution 2

Puisque Dominique et Émilie doivent s'asseoir ensemble, on peut les combiner en une personne, qu'on appellera Dominique ou Émilie, selon l'ordre dans lequel elles s'asseoient. On combine aussi leurs sièges.

On cherche maintenant le nombre de façons d'asseoir Béatrice, Carla et Dominique et le nombre de façons d'asseoir Béatrice, Carla et Émilie.

Puisqu'il y a 3 personnes, il y a 3 façons de choisir la personne qui s'assoit à gauche. Pour chacun de ces choix, il y a 2 façons de choisir la personne qui s'assoit à sa droite. La personne qui reste s'assoit à l'extrême droite. Il y a donc 3×2, ou 6 façons d'asseoir 3 personnes dans 3 sièges.

Il y a donc 6 façons d'asseoir Béatrice, Carla et Dominique et 6 façons d'asseoir Béatrice, Carla et Émilie, pour un total de 12 façons.

Réponse: (C)

20. On nomme les sept cases pour faciliter la communication.

$$\begin{array}{cccc} & & \boxed{A} & \boxed{B} \\ & + & \boxed{C} & \boxed{D} \\ \hline & \boxed{E} & \boxed{F} & \boxed{G} \end{array}$$

Puisqu'on additionne deux nombres de deux chiffres, la somme doit être inférieure à 200 ; donc, E doit être égal à 1. (Il ne peut être égal à 0, puisque la somme compte trois chiffres.)

Où peut-on placer le chiffre 0 ?

Puisqu'aucun des nombres ne peut commencer par 0, alors ni A, ni C n'est égal à 0.

Puisque les sept chiffres sont différents, alors ni B, ni D n'est égal à 0, sinon D et G, ou bien B et G, seraient identiques.

Donc, F ou G est égal à 0.

Puisqu'on additionne deux nombres de deux chiffres et que la somme est supérieure à 100, alors $A+C$ doit être supérieur ou égal à 9. (Il pourrait être égal à 9 s'il y avait une retenue dans l'addition des chiffres des unités.)

Donc, A et C doivent prendre les valeurs suivantes dans un ordre quelconque : 3 et 6, ou 4 et 5, ou 4 et 6, ou 5 et 6.

Si G est égal à 0, alors B et D doivent égaler 4 et 6, ou 6 et 4. Or dans ce cas, les plus grandes valeurs possibles de A et de C sont 3 et 5, ou 5 et 3, et ces valeurs ne figurent pas parmi les possibilités énumérées ci-dessus.

Donc, G ne peut pas être égal à 0. Donc $F = 0$.

$$\begin{array}{cccc} & & \boxed{A} & \boxed{B} \\ + & & \boxed{C} & \boxed{D} \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{G} \end{array}$$

On sait que la somme de A et de C est égale à 9 ou à 10 et que A et C doivent prendre les valeurs suivantes dans un ordre quelconque : 3 et 6, ou 4 et 5, ou 4 et 6.
Dans chacun de ces cas, les valeurs possibles qui restent pour B et D sont trop petites pour donner une retenue.
Il faut donc que A et C aient une somme de 10. Donc, A et C prennent les valeurs 4 et 6, ou 6 et 4.
On examine ce qui arrive si $A = 4$ et $C = 6$.

$$\begin{array}{cccc} & & \boxed{4} & \boxed{B} \\ + & & \boxed{6} & \boxed{D} \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{G} \end{array}$$

Les autres chiffres sont 2, 3 et 5. Pour que l'addition soit juste, il faut que B et D prennent les valeurs 2 et 3 et que G soit égal à 5. (On peut vérifier que B et D peuvent prendre ces valeurs dans un ordre ou l'autre ; on peut aussi vérifier que l'on peut aussi avoir $A = 6$ et $C = 4$.)

Donc, le chiffre des unités de la somme est égal à 5, comme dans cet exemple :

$$\begin{array}{cccc} & & \boxed{4} & \boxed{2} \\ + & & \boxed{6} & \boxed{3} \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{5} \end{array}$$

(Remarquer qu'il est possible d'en arriver à cette réponse par tâtonnements au lieu de suivre une méthode logique.)

Réponse: (D)

21. *Solution 1*
Si Nathalie avait 9 pièces de 25 cents, 3 pièces de 10 cents et 1 pièce de 5 cents, elle aurait un total de $(9 \times 25 + 3 \times 10 + 5)$ cents, soit 260 cents, ou 2,60 \$.
Puisque les nombres de chaque pièce forment ce même rapport, soit 9 : 3 : 1, il lui est possible de partager ses pièces dans des ensembles de 9 pièces de 25 cents, 3 pièces de 10 cents et 1 pièce de 5 cents, chaque ensemble ayant la valeur de 2,60 \$.
Puisque ses pièces de monnaie ont une valeur totale de 18,20 \$ et que $\dfrac{18{,}20}{2{,}60} = 7$, elle peut former 7 ensembles.
Puisque chaque ensemble contient 7 pièces de monnaie, elle a 7×13 pièces, ou 91 pièces en tout.

Solution 2
Supposons que Nathalie a n pièces de 5 cents. Puisque le rapport du nombre de pièces de 25 cents au nombre de pièces de 10 cents au nombre de pièces de 5 cents est égal à 9 : 3 : 1, alors elle doit avoir $3n$ pièces de 10 cents et $9n$ pièces de 25 cents.
La valeur totale de ces pièces de monnaie, en cents, est égale à $(9n \times 25) + (3n \times 10) + (n \times 5)$, ou $260n$.

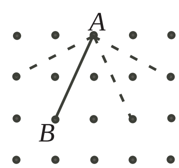
Or, on sait que la valeur totale des pièces est égale à 1820 cents. Donc $260n = 1820$, d'où $n = 7$. Nathalie a donc 7 pièces de 5 cents, 21 pièces de 10 cents et 63 pièces de 25 cents pour un total de 91 pièces de monnaie.

Réponse: (D)

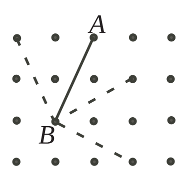
22. Disons que les 8 premières personnes se nomment A, B, C, D, E, F, G et H.
A donne la main aux 7 autres personnes ; B donne la main à 6 personnes (à C, D, E, F, G et H, car il a déjà donné la main à A) ; C donne la main à 5 personnes (à D, E, F, G et H, car il a déjà donné la main à A et à B) ; D donne la main à 4 personnes (à E, F, G et H) ; E donne la main à 3 personnes (à F, G et H) ; F donne la main à 2 personnes (à G et H) ; G donne la main à 1 personne (à H). H a déjà donné la main aux 7 autres personnes.
Avant que la 9^{e} personne n'arrive, le nombre de poignées de main est donc égal à
$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$, ou 28.
Puisqu'il y a un total de 32 poignées de main en tout et que $32 - 28 = 4$, la 9^{e} personne a donné la main à 4 personnes.

Réponse: (B)

23. De combien de façons peut-on choisir le point C de manière que $AB = AC$?
Pour se rendre de A à B, on se déplace de 1 unité dans une direction et de 2 unités dans une direction perpendiculaire.
Pour choisir C de manière que $AB = AC$, il faut se rendre de A à C en se déplaçant de 1 unité dans une direction et de 2 unités dans une direction perpendiculaire.
Il y a alors 3 positions possibles pour le point C :



De combien de façons peut-on choisir le point C de manière que $BA = BC$?
Pour choisir C de manière que $BA = BC$, il faut se rendre de B à C en se déplaçant de 1 unité dans une direction et de 2 unités dans une direction perpendiculaire.
Il y a alors 3 positions possibles pour le point C :



On a trouvé 6 positions possibles à date et le plus grand choix possible est 6.
La réponse doit donc être 6.
(On devrait aussi chercher des positions de C de manière que $CA = CB$. On peut vérifier qu'il n'y en a pas.)

Réponse: (A)

24. Dans la ligne 1, chaque case est ombrée.
Dans la ligne 2, les cases sont ombrées lorsque le numéro de leur colonne est un multiple de 2.
Dans la ligne 3, les cases sont ombrées lorsque le numéro de leur colonne est un multiple de 3.
Dans la ligne n, les cases sont ombrées lorsque le numéro de leur colonne est un multiple de n.
Si on examine une colonne en particulier, une case est ombrée si le numéro de sa ligne est un diviseur du numéro de la colonne.
(On peut le vérifier : Dans la colonne 4, les cases des lignes 1, 2 et 4 sont ombrées. Dans la colonne 6, les cases des lignes 1, 2, 3 et 6 sont ombrées.)

Pour déterminer le numéro de la colonne qui contient le plus grand nombre de cases ombrées, il faut déterminer la colonne dont le numéro admet le plus grand nombre de diviseurs.
Pour déterminer les diviseurs d'un nombre comme 144, il est plus facile de l'écrire d'abord en factorisation première.
Pour le faire, on écrit $144 = 16 \times 9 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2$.
On voit que les diviseurs de 144 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72 et 144. Il y en a 15.
De même, on a $120 = 2^2 \times 3 \times 5$ et on voit que les diviseurs de 120 sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60 et 120. Il y en a 16.
On a $150 = 2 \times 3 \times 5^2$. Les diviseurs de 150 sont 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75 et 150. Il y en a 12.
On a $96 = 2^5 \times 3$. Les diviseurs de 96 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48 et 96. Il y en a 12.
On a $100 = 2^2 \times 5^2$. Les diviseurs de 100 sont 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 et 100. Il y en a 9.
Le nombre qui admet le plus grand nombre de diviseurs est 120. C'est donc la colonne 120 qui contient le plus grand nombre de cases ombrées.

Réponse: (B)

25. Il reste à placer les nombres 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 et 19.
On considère d'abord les nombres dans les coins, car ils ont le moins de voisins.
On considère 25 dans le coin. Il doit être la somme de deux de ses voisins. Il doit donc être égal à $24+1$ ou à $9+16$. Puisque le 1 a déjà été placé, la case vide au-dessus du 25 doit donc contenir 16.

On considère ensuite 21 dans un autre coin. Il doit être égal à $20 + 1$ ou à $4 + 17$. Puisque le 1 a déjà été placé, la case vide en dessous de 21 doit contenir 17.

			20	21
	6	5	4	17
23	7	1	3	?
16	9	8	2	
25	24			22

Puisque 17 doit être égal à la somme de deux voisins, il doit être égal à $4 + 13$ ou à $3 + 14$ et le « ? » doit être égal à 13 ou à 14.

On considère 22 dans un autre coin. Puisque le 20 est déjà placé, alors 22 ne peut être égal à $2 + 20$. Donc, 22 est égal à la somme de ses deux voisins dans les cases vides.
Puisque seuls les nombres 10, 11, 12, 13, 14, 15 et 18 n'ont pas été placés, les deux voisins doivent être 10 et 12 dans un ordre quelconque.
Or, le 10 ne peut pas être placé au-dessus du 22, car il ne serait pas égal à la somme de deux voisins (le 7 et le 8 étant déjà placés).
Donc, la case au-dessus du 22 contient un 12.

			20	21
	6	5	4	17
23	7	1	3	?
16	9	8	2	12
25	24		10	22

Or, le « ? » ne peut pas être égal à 13, parce que 13 n'est pas la somme de deux des nombres 17, 4, 3, 2 et 12.
Donc, 14 prend la place du « ? ».

On a terminé, mais on peut vérifier que la grille sera remplie comme suit :

19	11	15	20	21
13	6	5	4	17
23	7	1	3	14
16	9	8	2	12
25	24	18	10	22

Réponse: (C)