Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Galois 2006

le jeudi 20 avril 2006

Solutions

1. (a) On obtient la plus grande différence possible lorsque l'un choisit les bouts de papier avec les plus grands numéros et l'autre choisit ceux avec les plus petits numéros.
Donc, l'un choisit 1, 2 et 3, pour un total de 6, tandis que l'autre choisit 4, 5 et 6, pour un total de 15.
La plus grande différence possible est 9.

(b) La somme des six nombres sur les bouts de papier est égale à $1+2+3+4+5+6$, ou 21. Le total d'Amélie et celui de Boris ont donc une somme de 21. Pour que le total d'Amélie soit 1 de plus que celui de Boris, il faut qu'elle ait un total de 11 et que Boris ait un total de 10.
Les groupes de trois bouts de papier qui donnent un total de 11 sont :

$$1, 4, 6 \quad 2, 3, 6 \quad 2, 4, 5$$

(c) Pour qu'Amélie et Boris aient le même total, il faudrait que la somme des totaux soit un nombre pair. Or, la somme des numéros est égale à 21 et la somme des deux totaux doit donc être égale à 21, qui est un nombre impair.
Donc, il est impossible pour Amélie et Boris d'obtenir le même total.

(d) Puisque Amélie et Boris choisissent chacun la moitié des bouts de papier, il doit y avoir un nombre pair de bouts de papier.
La plus petite valeur de n doit donc être de 8 ou plus.
Si $n = 8$, peuvent-ils obtenir le même total ?
Si $n = 8$, la somme des numéros sur les bouts de papier est égale à $1+2+3+4+5+6+7+8$, ou 36, qui est un nombre pair.
Amélie et Boris pourraient obtenir le même total si l'un choisissait 1, 2, 7, 8 et l'autre choisissait 3, 4, 5, 6.
La plus petite valeur de n est donc 8.

2. (a) *Solution 1*
On a $DE = EF = 4$ et $\angle DEF = 90°$. D'après le théorème de Pythagore,
$DF^2 = DE^2 + EF^2$, c'est-à-dire que $DF^2 = 4^2 + 4^2$, ou $DF^2 = 32$. Donc $DF = \sqrt{32}$, ou $DF = 4\sqrt{2}$.

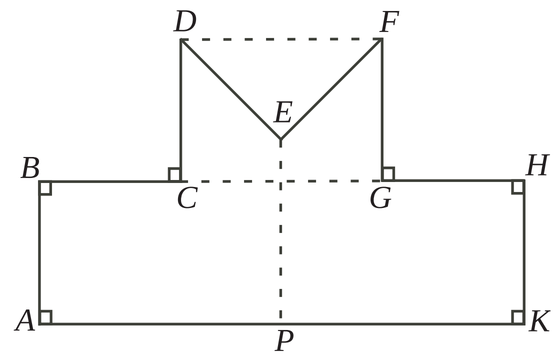
Solution 2
Puisque le triangle DEF est isocèle et rectangle, il s'agit d'un triangle remarquable 45° - 45° - 90°. Donc $DF = \sqrt{2}(DE)$, ou $DF = 4\sqrt{2}$.

(b) *Solution 1*
Puisque le triangle DEF est isocèle, avec $DE = EF$, et que EM est perpendiculaire à DF, alors $DM = MF = \frac{1}{2}(DF)$, ou $DM = MF = 2\sqrt{2}$.
Puisque le triangle DME est rectangle, alors d'après le théorème de Pythagore,
$EM^2 = DE^2 - DM^2$, c'est-à-dire que $EM^2 = 4^2 - (2\sqrt{2})^2$, d'où $EM^2 = 16 - 8$, ou $EM^2 = 8$. Donc $EM = \sqrt{8}$, ou $EM = 2\sqrt{2}$.

Solution 2
Puisque le triangle DEF est isocèle, avec $DE = EF$, et que EM est perpendiculaire à DF, alors $DM = MF = \frac{1}{2}(DF)$, ou $DM = MF = 2\sqrt{2}$.

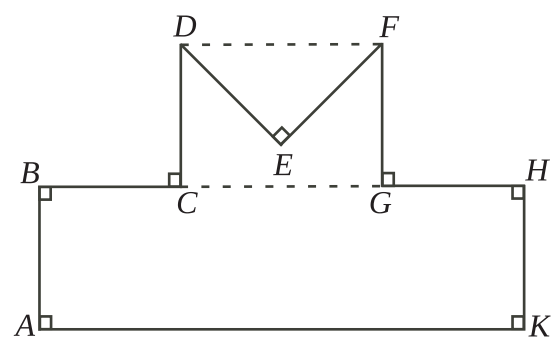
Puisque le triangle DEF est isocèle et rectangle, alors $\angle EDF = 45°$ et le triangle DME est aussi isocèle et rectangle.
Donc $EM = DM = 2\sqrt{2}$.
Solution 3
Puisque DE est perpendiculaire à EF, l'aire du triangle DEF est ègale à $\frac{1}{2}(DE)(EF)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(4)$, ou 8.
Puisque DF est perpendiculaire à ME, l'aire du triangle DEF est aussi égale à $\frac{1}{2}(DF)(ME)$.
On a donc $\frac{1}{2}(4\sqrt{2})(ME) = 8$, d'où $ME = \dfrac{8}{2\sqrt{2}}$, ou $ME = 2\sqrt{2}$.

(c) On trace les segments DF et CG.



$CGFD$ et $AKHB$ sont des rectangles, puisqu'ils ont chacun quatre angles droits.
Le rectangle $CGFD$ a une hauteur de 4, puisque $DC = FG = 4$. Le rectangle $AKHB$ a aussi une hauteur de 4, puisque $AB = HK = 4$.
La longueur de EP est donc égale à la distance de E à CG plus la hauteur du rectangle $AKHB$.
La distance de E à CG est égale à la différence entre la hauteur du rectangle $CGFD$ et la longueur de EM, soit $4 - 2\sqrt{2}$.
La longueur de EP est donc égale à $4 + (4 - 2\sqrt{2})$, ou $8 - 2\sqrt{2}$.

(d) L'aire de la figure est égale à l'aire du rectangle $AKHB$ plus l'aire du rectangle $CGFD$ moins l'aire du triangle DEF.



Puisque $DF = 4\sqrt{2}$ et que $CD = 4$, l'aire du rectangle $CGFD$ est égale à $4(4\sqrt{2})$, ou $16\sqrt{2}$.
Or $BH = BC + CG + GH$, c'est-à-dire que $BH = 4 + DF + 4$, ou $BH = 8 + 4\sqrt{2}$.
Puisque $AB = 4$, l'aire du rectangle $AKHB$ est égale à $4(8 + 4\sqrt{2})$, ou $32 + 16\sqrt{2}$.
D'après la Solution 3 de la partie (b), l'aire du triangle DEF est égale à 8.
L'aire de la figure $ABCDEFGHK$ est donc égale à $(16\sqrt{2})+(32+16\sqrt{2})-8$, ou $24+32\sqrt{2}$.

3. (a) Puisque A a pour coordonnées $(0, 16)$ et que B a pour coordonnées $(8, 0)$, la droite qui passe par A et B a pour pente $\frac{16-0}{0-8}$, ou -2.
Puisque la droite coupe l'axe des ordonnées au point $A(0, 16)$, son ordonnée à l'origine est égale à 16. Son équation est donc $y = -2x + 16$.

(b) Soit (c, d) les coordonnées de P.
Puisque P est sur la droite d'équation $y = -2x + 16$, alors $d = -2c + 16$. Les coordonnées de P sont donc $(c, -2c + 16)$.
Pour que $PDOC$ soit un carré, il faut que $PD = PC$.
Puisque PD est la distance de P à l'axe des ordonnées, $PD = c$. Puisque PC est la distance de P à l'axe des abscisses, $PC = -2c + 16$.
Donc $c = -2c + 16$, d'où $3c = 16$, ou $c = \frac{16}{3}$.
Les coordonnées de P sont donc $\left(\frac{16}{3}, \frac{16}{3}\right)$.

(c) *Solution 1*
Comme dans la partie (b), soit $(c, -2c + 16)$ les coordonnées de P.
L'aire du rectangle $PDOC$ est égale à $PD \times PC$, ou $c(-2c + 16)$.
Puisque l'aire est égale à 30, alors :

$$\begin{aligned} 30 &= c(-2c+16) \\ 30 &= -2c^2 + 16c \\ 2c^2 - 16c + 30 &= 0 \\ c^2 - 8c + 15 &= 0 \\ (c-3)(c-5) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $c = 3$ ou $c = 5$.
Les deux points P ont pour coordonnées respectives $(3, 10)$ et $(5, 6)$.
(On peut vérifier que chaque point donne un rectangle qui a une aire de 30.)

Solution 2
Puisque le rectangle $PDOC$ a une aire de 30, les coordonnées de P sont $\left(c, \frac{30}{c}\right)$.
Puisque P est sur la droite d'équation $y = -2x + 16$:

$$\begin{aligned} \frac{30}{c} &= -2c+16 \\ 30 &= -2c^2 + 16c \\ c^2 - 8c + 15 &= 0 \\ (c-3)(c-5) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $c = 3$ ou $c = 5$.
Les deux points P ont pour coordonnées respectives $(3, 10)$ et $(5, 6)$.

4. (a) On considère le nombre de deux chiffres $\underline{a}\,\underline{b} = 10a + b$ et on renverse l'ordre de ses chiffres pour obtenir le nombre $\underline{b}\,\underline{a} = 10b + a$.
La différence est égale à $(10b + a) - (10a + b)$, soit $9b - 9a$, ou $9(b - a)$.
Pour que la différence soit égale à 27, on doit avoir $9(b - a) = 27$, d'où $b - a = 3$, ou $b = a + 3$. Il faut donc que le 2$^{\text{e}}$ chiffre du nombre initial soit 3 de plus que le 1$^{\text{er}}$ chiffre.

Donc, les nombres 14, 25, 36, 47, 58 et 69 donnent une augmentation de 27 lorsqu'on renverse l'ordre de leurs chiffres.

(b) *Solution 1*

Soit $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = 100a + 10b + c$ un entier de trois chiffres. On renverse l'ordre de ses chiffres pour obtenir l'entier $\underline{c}\,\underline{b}\,\underline{a} = 100c + 10b + a$.
On peut supposer que le premier nombre est supérieur au deuxième, sinon on renverse l'ordre des deux nombres.
Leur différence est égale à :

$$\underline{r}\,\underline{s}\,\underline{t} = \underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} - \underline{c}\,\underline{b}\,\underline{a} = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99a - 99c = 99(a - c)$$

Puisque a et c sont des chiffres distincts, l'expression $a - c$ peut prendre toutes les valeurs entières de 1 à 9. L'entier $\underline{r}\,\underline{s}\,\underline{t}$ peut donc prendre des valeurs égales à 99 fois les entiers de 1 à 9. Le tableau suivant indique les valeurs possibles de $\underline{r}\,\underline{s}\,\underline{t}$, les valeurs correspondantes de $\underline{t}\,\underline{s}\,\underline{r}$ et les valeurs correspondantes de leur somme :

$\underline{r}\,\underline{s}\,\underline{t}$	099	198	297	396	495	594	693	792	891
$\underline{t}\,\underline{s}\,\underline{r}$	990	891	792	693	594	495	396	297	198
Somme	1089	1089	1089	1089	1089	1089	1089	1089	1089

Donc, la somme est toujours égale à 1089.

Solution 2

Soit $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = 100a + 10b + c$ un entier de trois chiffres. On renverse l'ordre de ses chiffres pour obtenir l'entier $\underline{c}\,\underline{b}\,\underline{a} = 100c + 10b + a$.
On peut supposer que le premier nombre est supérieur au deuxième, sinon on renverse l'ordre des deux nombres.
Leur différence est égale à :

$$\underline{r}\,\underline{s}\,\underline{t} = \underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} - \underline{c}\,\underline{b}\,\underline{a} = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99a - 99c = 99(a - c)$$

Puisque a et c sont des chiffres distincts, l'expression $a - c$ peut prendre toutes les valeurs entières de 1 à 9.
Dans chacun de ces cas, $\underline{r}\,\underline{s}\,\underline{t} = 99(a - c) = 100(a - c) - (a - c)$. Ainsi $\underline{r}\,\underline{s}\,\underline{t}$ est $a - c$ de moins que $100(a - c)$. Son chiffre des centaines est donc $a - c - 1$, son chiffre des dizaines est 9 et son chiffre des unités est $10 - (a - c)$.
On a donc $\underline{r}\,\underline{s}\,\underline{t} = \underline{a - c - 1}\;\;\underline{9}\;\;\underline{10 - (a - c)}$.
Lorsqu'on renverse l'ordre des chiffres, on obtient $\underline{t}\,\underline{s}\,\underline{r} = \underline{10 - (a - c)}\;\;\underline{9}\;\;\underline{a - c - 1}$.
On additionne ces deux nombres :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \underline{a-c-1} & \underline{9} & \underline{10-(a-c)} \\
+ & & \underline{10-(a-c)} & \underline{9} & \underline{a-c-1} \\
\hline
 & \underline{1} & \underline{0} & \underline{8} & \underline{9}
\end{array}$$

(Remarquer qu'un 1 a été retenu de la colonne des dizaines à la colonne des centaines et un autre de la colonne des centaines à la colonne des milliers.)

(c) Puisque $N = \underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{d} = 1000a + 100b + 10c + d$, alors $M = \underline{d}\,\underline{c}\,\underline{b}\,\underline{a} = 1000d + 100c + 10b + a$. Donc :

$$\begin{aligned} P &= M - N \\ &= (1000d + 100c + 10b + a) - (1000a + 100b + 10c + d) \\ &= 1000(d-a) + 100(c-b) + 10(b-c) + (a-d) \\ &= 999d + 90c - 90b - 999a \\ &= 999(d-a) + 90(c-b) \end{aligned}$$

Puisque $a \le b \le c \le d$, alors $d - a \ge 0$ et $c - b \ge 0$.
(Ceci nous dit que même si la 3e ligne du développement précédent semble être une représentation de P au moyen de ses chiffres, deux des parenthèses sont possiblement négatives.)
De plus, $d - a \ge c - b$.

<u>1er cas : $a = b = c = d$</u>
Dans ce cas, on a $P = 0$, d'où $Q = 0$. Donc $P + Q = 0$.

<u>2e cas : $d - a = 1$</u>
Dans ce cas, $c - b$ peut seulement prendre les valeurs de 0 ou de 1. Les valeurs correspondantes de P sont $P = 999(1) + 90(0)$ et $P = 999(1) + 90(1)$, c'est-à-dire $P = 0999$ et $P = 1089$.
On renverse l'ordre de ces chiffres pour obtenir $Q = 9990$ et $Q = 9801$. On obtient donc $P+Q = 0999+9990$ et $P+Q = 1089+9801$, c'est-à-dire $P+Q = 10\,989$ et $P+Q = 10\,890$.

<u>3e cas : $d - a > 1$, $c - b = 0$</u>
Dans ce cas, $P = 999(d-a)$, ou $P = 1000(d-a)-(d-a)$. La représentation de P en chiffres est donc $\underline{d-a-1}\ \ \underline{9}\ \ \underline{9}\ \ \underline{10-(d-a)}$. Celle de Q est donc $\underline{10-(d-a)}\ \ \underline{9}\ \ \underline{9}\ \ \underline{d-a-1}$.
La somme de P et de Q est donc :

$$\begin{array}{cccccc} & & \underline{d-a-1} & \underline{9} & \underline{9} & \underline{10-(d-a)} \\ + & & \underline{10-(d-a)} & \underline{9} & \underline{9} & \underline{d-a-1} \\ \hline & \underline{1} & \underline{0} & \underline{9} & \underline{8} & \underline{9} \end{array}$$

Voici une autre façon de s'y prendre (on s'assure que 1000, 100, 10 et 1 sont multipliés par un entier non négatif inférieur à 10) :

$$\begin{aligned} P &= 999(d-a) \\ &= 1000(d-a) - (d-a) \\ &= 1000(d-a-1) + 1000 - (d-a) \\ &= 1000(d-a-1) + 100(9) + 100 - (d-a) \\ &= 1000(d-a-1) + 100(9) + 10(9) + (10 - (d-a)) \end{aligned}$$

Les chiffres sont $d - a - 1$, 9, 9 et $10 - (d - a)$.
On a donc $Q = 1000(10 - (d - a)) + 100(9) + 10(9) + (d - a - 1)$.
Donc $P + Q = 1000(9) + 100(18) + 10(18) + 9$, ou $P + Q = 10\,989$.

4[e] cas : $d-a>1$, $c-b>0$

Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}
P &= 999(d-a)+90(c-b)\\
&= 1000(d-a)-(d-a)+100(c-b)-10(c-b)\\
&= \underline{d-a-1}\ \ \underline{9}\ \ \underline{9}\ \ \underline{10-(d-a)}+\underline{c-b-1}\ \ \underline{10-(c-b)}\ \ \underline{0}\\
&= \underline{d-a-1}\ \ \underline{9+c-b-1}\ \ \underline{9+10-(c-b)}\ \ \underline{10-(d-a)+0}\\
&= \underline{d-a-1}\ \ \underline{9+c-b-1+1}\ \ \underline{9-(c-b)}\ \ \underline{10-(d-a)}\\
&= \underline{d-a}\ \ \underline{c-b-1}\ \ \underline{9-(c-b)}\ \ \underline{10-(d-a)}
\end{aligned}$$

(Des retenues ont été utilisées dans les deux dernières lignes.)

Donc $Q=\underline{10-(d-a)}\ \ \underline{9-(c-b)}\ \ \underline{c-b-1}\ \ \underline{d-a}$.

On additionne P et Q :

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \underline{d-a} & \underline{c-b-1} & \underline{9-(c-b)} & \underline{10-(d-a)}\\
+ & & \underline{10-(d-a)} & \underline{9-(c-b)} & \underline{c-b-1} & \underline{d-a}\\
\hline
 & \underline{1} & \underline{0} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{0}
\end{array}$$

Voici une autre façon de s'y prendre (on s'assure que 1000, 100, 10 et 1 sont multipliés par un entier non négatif inférieur à 10) :

$$\begin{aligned}
P &= 999(d-a)+90(c-b)\\
&= 1000(d-a)+100(c-b)-10(c-b)-(d-a)\\
&= 1000(d-a)+100(c-b-1)+100-10(c-b)-(d-a)\\
&= 1000(d-a)+100(c-b-1)+10(10-(c-b))-(d-a)\\
&= 1000(d-a)+100(c-b-1)+10(9-(c-b))+(10-(d-a))
\end{aligned}$$

Les chiffres sont $d-a$, $c-b-1$, $9-(c-b)$ et $10-(d-a)$.

On a donc $Q=1000(10-(d-a))+100(9-(c-b))+10(c-b-1)+(d-a)$.

Donc $P+Q=1000(10)+100(8)+10(8)+10$, ou $P+Q=10\,890$.

Les valeurs possibles de $P+Q$ sont 0, 10 890 et 10 989.