Concours Galois 2006 (10^e^ année – Sec. IV)
le jeudi 20 avril 2006

1. Dans un chapeau, il y a six bouts de papier numérotés de 1 à 6. Amélie et Boris choisissent chacun trois bouts de papier sans les remettre dans le chapeau. Ensuite, chacun additionne les numéros sur ses bouts de papier.

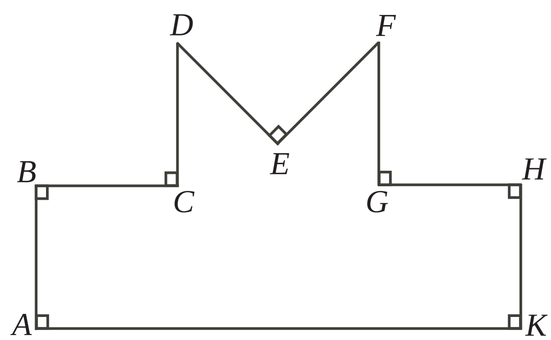
   (a) Déterminer la plus grande différence possible entre le total d'Amélie et celui de Boris. Expliquer comment cette différence a été obtenue.

   (b) Établir une liste de tous les groupes de trois bouts de papier qu'Amélie peut choisir pour que son total soit un de plus que celui de Boris.

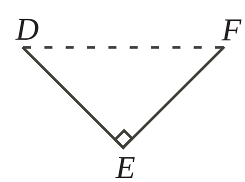
   (c) Expliquer pourquoi il est impossible pour Amélie et Boris d'obtenir le même total, peu importe quels bouts de papier ils choisissent.

   (d) Supposons que l'on ajoute d'autres bouts de papier, numérotés de 7 à n, quelle est la plus petite valeur de n ($n > 6$) de manière qu'il soit possible pour Amélie et Boris de choisir chacun la moitié des bouts de papier numérotés de 1 à n et d'obtenir le même total ? Expliquer pourquoi cette valeur de n rend la situation possible.

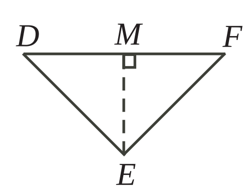
2. Dans la figure, AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH et HK ont tous une longueur de 4. De plus, tous les angles, à l'exception des angles D et F, sont droits.



   (a) Déterminer la longueur de DF.



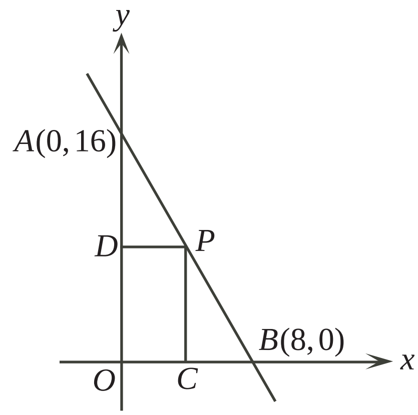
   (b) Si on abaisse une perpendiculaire EM de E à DF, quelle est la longueur de EM ? Expliquer comment la réponse a été obtenue.



   (c) Si on abaisse une perpendiculaire EP de E à AK, quelle est la longueur de EP ? Expliquer comment la réponse a été obtenue.

   (d) Quelle est l'aire de la figure $ABCDEFGHK$? Expliquer comment la réponse a été obtenue.

3. Dans la figure ci-contre, une droite passe par les points $A(0,16)$ et $B(8,0)$. Un point P est situé sur cette droite dans le quadrant I. Les points respectifs C et D sont situés sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées de manière que $PDOC$ soit un rectangle.
   (a) Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points A et B.
   (b) Déterminer les coordonnées du point P pour lequel $PDOC$ est un carré.
   (c) Déterminer les coordonnées de tous les points P pour lesquels l'aire du rectangle $PDOC$ est égale à 30.



4. (a) Lorsqu'on renverse l'ordre des chiffres du nombre 14, pour obtenir le nombre 41, il y a une augmentation de 27 d'un nombre à l'autre. Déterminer tous les nombres de 2 chiffres qui donnent une augmentation de 27 lorsqu'on renverse l'ordre de leurs chiffres.
   (b) Choisir n'importe quel entier $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$ de trois chiffres différents les uns des autres.
   (Lorsqu'on écrit $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$, a, b et c étant des chiffres, il s'agit de l'entier qui a une valeur de $100a + 10b + c$.)
   Renverser l'ordre des chiffres pour obtenir l'entier $\underline{c}\,\underline{b}\,\underline{a}$.
   Soustraire le plus petit de ces deux entiers du plus grand pour obtenir l'entier $\underline{r}\,\underline{s}\,\underline{t}$, r pouvant être égal à 0.
   Renverser l'ordre des chiffres de cet entier pour obtenir l'entier $\underline{t}\,\underline{s}\,\underline{r}$.
   Démontrer que, peu importe l'entier $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$ choisi au départ, on a toujours $\underline{r}\,\underline{s}\,\underline{t}+\underline{t}\,\underline{s}\,\underline{r} = 1089$.
   (c) On considère l'entier de quatre chiffres, $N = \underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{d}$ $(a \le b \le c \le d)$.
   Lorsqu'on renverse l'ordre des chiffres de N pour obtenir l'entier M, il y a une augmentation de P lorsqu'on passe de N à M.
   (Encore une fois, le premier des quatre chiffres de P peut être égal à 0.)
   On renverse l'ordre des chiffres de P pour former l'entier Q.
   Déterminer toutes les valeurs possibles de $P + Q$, tout en justifiant sa démarche.