**Concours canadien de mathématiques**

***Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario***

# *Concours Fryer 2006*

**le jeudi 20 avril 2006**

*Solutions*

1. (a) La note moyenne pour les sept cours est égale à $\dfrac{94+93+84+81+74+83+79}{7}$, c'est-à-dire à $\dfrac{588}{7}$, ou 84.

   (b) La plus grande moyenne possible correspondrait à une note de 100 en Français. Dans ce cas, la moyenne serait égale à $\dfrac{94+93+84+81+74+83+79+100}{8}$, c'est-à-dire à $\dfrac{688}{8}$, ou 86.

   (c) *Solution 1*
   Puisque Sandrine obtient une moyenne de 85 pour ses huit cours, la somme de ses notes est égale à $8 \times 85$, ou 680.
   Dans la partie (a), on a vu que la somme de ses sept premières notes était de 588. Puisque $680 - 588 = 92$, elle a obtenu une note de 92 en Français.

   *Solution 2*
   Si la note de Français était de 84, la moyenne resterait à 84.
   Si la note de Français était de 100, comme dans la partie (b), Sandrine obtiendrait une moyenne de 86.
   Puisque Sandrine obtient une moyenne de 85, soit à mi-chemin entre 84 et 86, la note de Français doit être à mi-chemin entre 84 et 100, soit 92.

2. (a) L'étage du bas est un carré 7 sur 7 de cubes. Il contient donc $7 \times 7$ cubes, ou 49 cubes.
   L'étage suivant est un carré 5 sur 5 de cubes. Il contient donc $5 \times 5$ cubes, ou 25 cubes.
   L'étage suivant est un carré 3 sur 3 de cubes. Il contient donc $3 \times 3$ cubes, ou 9 cubes.
   L'étage du haut contient 1 cube.
   Le nombre total de cubes est égal à $49 + 25 + 9 + 1$, ou 84.

   (b) *Solution 1*
   Le cube de l'étage du haut a 5 faces visibles, car seule la face inférieure est cachée.
   À l'étage suivant, il y a 12 (soit $4 \times 3$) faces latérales et 8 (soit $3+2+2+1$) faces supérieures qui sont visibles.
   À l'étage suivant, il y a 20 (soit $4 \times 5$) faces latérales et 16 (soit $5+4+4+3$) faces supérieures qui sont visibles.
   Au dernier étage, il y a 28 (soit $4 \times 7$) faces latérales et 24 (soit $7+6+6+5$) faces supérieures qui sont visibles.
   Le nombre total de faces visibles est donc égal à $5 + 12 + 8 + 20 + 16 + 28 + 24$, ou 113.

   *Solution 2*
   Si on regarde la pyramide du haut, on voit un carré 7 sur 7 de faces visibles, pour un total de 49 faces visibles. (Ce carré est formé des faces supérieures visibles des divers étages de la pyramide.)
   Si on regarde le devant de la pyramide, on voit $1 + 3 + 5 + 7$ faces visibles, soit 16 faces visibles. Il en est de même si on regarde l'arrière ou chaque côté. Ces quatre vues nous font donc voir $4(16)$ faces visibles, ou 64 faces visibles.
   Le nombre total de faces visibles est donc égal à $49 + 64$, ou 113.

(c) *Solution 1*
Pour que la somme des numéros sur les faces visibles soit aussi grande que possible, il faut placer chaque cube de manière que ses deux, trois ou cinq numéros visibles soient aussi grands que possible.

Le cube du haut a 5 faces visibles. On place donc la face « 1 » vers le bas de manière à la cacher. La somme des numéros visibles sur ce cube est donc égale à $2+3+4+5+6$, ou 20.

Aux étages suivants, on place chacun des cubes de coin de manière à montrer les numéros 4, 5 et 6. Ceci est possible, puisque les faces de ces trois numéros partagent un même sommet.
Puisqu'il y a 12 cubes de coin, la somme des numéros visibles sur leurs faces est égale à $12 \times (4+5+6)$, ou 180.

On considère maintenant les autres cubes, soit ceux des trois étages du bas qui ne sont pas sur un coin. Ils ont deux faces visibles et on les place donc de manière à montrer les numéros 5 et 6.
Le nombre de tels cubes est égal à $4+12+20$, ou 36. La somme des numéros visibles sur leurs faces est donc égale à $36 \times (5+6)$, ou 396.

La plus grande somme possible est donc égale à $20+180+396$, ou 596.

*Solution 2*
Pour que la somme des numéros sur les faces visibles soit aussi grande que possible, il faut placer chaque cube de manière que ses deux, trois ou cinq numéros visibles soient aussi grands que possible.

Comme dans la Solution 2 de la partie (b), on regarde la pyramide du haut. On place chaque cube visible pour que sa face supérieure ait un 6. On obtient une somme de $49 \times 6$, ou 294.

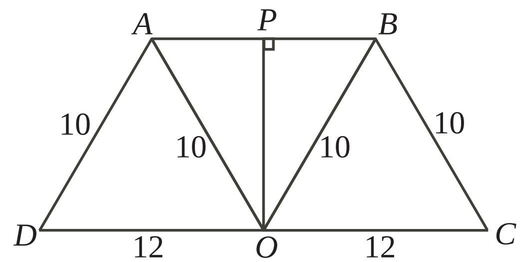
On considère ensuite le cube du haut. Il a une seule face cachée, soit le 1, puisque le 1 est opposé au 6. Cela maximise la somme de ses faces visibles. La somme des numéros sur les quatre faces latérales est égale à $2+3+4+5$, ou 14.

On considère ensuite les autres faces visibles, soit les autres faces latérales sur les côtés de la pyramide. Il y en a $4(3+5+7)$, ou 60. Pour maximiser la somme des nombres sur ces faces, on aimerait y placer des 5, puisque les 6 sont déjà placés. La somme de ces numéros serait alors égale à $5 \times 60$, ou 300. Or, sur les 12 cubes de coin, on aurait deux faces qui portent le numéro 5. Sur chacun de ces cubes, on remplace un 5 par un 4, ce qui diminue la somme de 12. (Il est possible de placer ces cubes de coin de manière à montrer un 4, un 5 et un 6, car les faces de ces trois numéros partagent un même sommet.)

La plus grande somme possible est donc égale à $294+14+300-12$, ou 596.

3. (a) Puisque le triangle $AOB$ est isocèle, avec $AO = OB$, et que $OP$ est perpendiculaire à $AB$, alors $P$ est le milieu de $AB$. Donc $AP = PB = 6$.
D'après le théorème de Pythagore, $OP = \sqrt{AO^2 - AP^2}$, c'est-à-dire que $OP = \sqrt{10^2 - 6^2}$, d'où $OP = \sqrt{64}$, ou $OP = 8$.

(b) *Solution 1*
Le trapèze $ABCD$ est formé de trois triangles congruents. Son aire est donc égale à trois fois l'aire d'un de ces triangles.



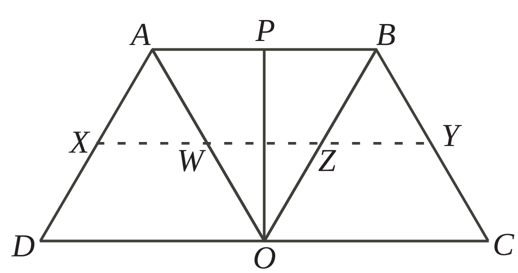

D'après la partie (a), chaque triangle a une base de 12 et une hauteur de 8, soit la longueur de $OP$. Chacun a donc une aire de $\frac{1}{2}(12)(8)$, ou 48.
L'aire du trapèze est donc égale à $3 \times 48$, ou 144.

*Solution 2*
Puisque le trapèze $ABCD$ a une hauteur de 8, soit la longueur de $OP$, et des bases $AB$ et $DC$ de longueurs respectives 12 et 24, son aire est égale à

$$\frac{1}{2} \times \text{hauteur} \times \text{somme de la longueur des bases}$$

soit $\frac{1}{2}(8)(12 + 24)$, ou 144.

(c) *Solution 1*
Puisque le segment $XY$ coupe $AD$ et $BC$ en leur milieu, il coupe aussi $PO$ en son milieu. En effet, puisque $XY$ est parallèle à $AB$ et à $DC$ et qu'il coupe les côtés $AD$ et $BC$ en leur milieu, il coupe le côté $AO$ du triangle $ADO$ et le côté $BO$ du triangle $BCO$ en leurs milieux respectifs $W$ et $Z$. Le triangle $WZO$ est donc semblable au triangle $ABO$ et ses dimensions sont la moitié de celles du triangle $ABO$. Sa hauteur est donc la moitié de $PO$. De la même manière, les dimensions des triangles $AXW$ et $BYZ$ sont la moitié de celles des triangles $ADO$ et $BCO$.



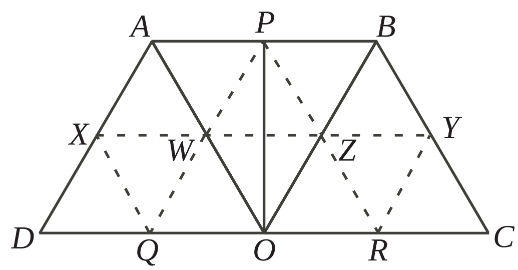

Les trapèzes $ABYX$ et $XYCD$ ont donc chacun une hauteur de 4. De plus, puisque $XW = \frac{1}{2}DO$, $WZ = \frac{1}{2}AB$ et $ZY = \frac{1}{2}OC$, alors $XY = 3(6)$, ou $XY = 18$. D'après la formule pour l'aire d'un trapèze utilisée dans la partie (b), l'aire du trapèze $ABYX$ est égale à $\frac{1}{2}(4)(12 + 18)$, ou 60, et celle du trapèze $XYCD$ est égale à $\frac{1}{2}(4)(18 + 24)$, ou 84. Le rapport de leur aire est égal à $60 : 84$, ou $5 : 7$.

*Solution 2*
Comme dans la Solution 1, chaque petit trapèze a une hauteur de 4.
On calcule la longueur de $XY$ comme suit.
On sait que la somme de l'aire des trapèzes $ABYX$ et $XYCD$ est égale à celle du trapèze $ABCD$. Donc :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(4)(AB+XY)+\tfrac{1}{2}(4)(XY+DC) &= 144 \\ 2(12+XY)+2(XY+24) &= 144 \\ 4(XY) &= 72 \\ XY &= 18 \end{aligned}$$

L'aire du trapèze $ABYX$ est égale à $\frac{1}{2}(4)(12+18)$, ou 60, et celle du trapèze $XYCD$ est égale à $\frac{1}{2}(4)(18+24)$, ou 84.
Le rapport de leur aire est égal à 60 : 84, ou 5 : 7.

*Solution 3*
Soit $Q$ et $R$ les milieux respectifs de $DO$ et de $OC$. Soit $W$ et $Z$ les points respectifs où $XY$ coupe $AO$ et $BO$.
On trace les segments $XQ$, $WQ$, $PW$, $PZ$, $RZ$ et $RY$.




Le trapèze $ABCD$ a été divisé en 12 triangles congruents.
Pour le démontrer, on considère la division du triangle $AOD$ en quatre petits triangles. Puisque les points $X$, $W$ et $Q$ sont les milieux respectifs des côtés $AD$, $AO$ et $OD$, alors les segments $XW$, $WQ$ et $QX$ sont parallèles aux côtés respectifs $DO$, $AD$ et $OA$. Les triangles $AXW$, $XDQ$, $WQO$ et $QWX$ sont congruents, puisqu'ils ont des côtés de longueurs 5, 5 et 6. Il en est de même pour la division des triangles $ABO$ et $BOC$ en petits triangles.
Puisque le trapèze $ABYX$ est composé de 5 petits triangles, que le trapèze $XYCD$ est composé de 7 petits triangles et que les 12 petits triangles ont la même aire, le rapport de l'aire du trapèze $ABYX$ à celle du trapèze $XYCD$ est de 5 : 7.

4. (a) *Solution 1*
Il y a 100 entiers de 1 à 100. Parmi eux, 10 entiers se terminent par le chiffre 7, soit 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87 et 97. De plus, 10 entiers commencent par le chiffre 7, soit 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78 et 79.
Puisque 77 est présent dans les deux listes, on ne doit pas le compter deux fois. On doit donc soustraire 19 entiers des 100 entiers.
Le nombre d'entiers, de 1 à 100, qui ne contiennent pas le chiffre 7 est donc égal à $100-19$, ou 81.

*Solution 2*
Puisque les entiers 0 et 100 ne contiennent pas le chiffre 7, on remplace 100 par 0 et on cherche le nombre d'entiers de 0 à 99 qui ne contiennent pas le chiffre 7.
Chacun de ces entiers peut être écrit à l'aide de deux chiffres : 00, 01, 02, ..., 98, 99.
Puisqu'on cherche des entiers qui ne contiennent pas le chiffre 7, il y a 9 choix pour le premier chiffre, soit 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 ou 9. Pour chacun de ces choix, il y a 9 choix pour le deuxième chiffre. Le nombre de choix est donc égal à $9 \times 9$, ou 81.
Il y a donc 81 entiers, de 0 à 99, et donc de 1 à 100, qui ne contiennent pas le chiffre 7.

(b) *Solution 1*
D'après la partie (a), il y 81 entiers, de 1 à 100, qui ne contiennent pas le chiffre 7.
De même, il y a 81 tels entiers, dans chacun des intervalles de 101 à 200, de 201 à 300, de 301 à 400, de 401 à 500 et de 501 à 600. En effet, le premier chiffre n'est pas un 7 et les autres chiffres suivent la même régularité que dans la partie (a).
De 601 à 700, il y en aura 80 (puisque le nombre 700 contient un 7).
De 701 à 800, il y en a 1 (soit 800 — tous les autres nombres contiennent un 7).
Dans chacun des intervalles suivants, il y en aura 81 : de 801 à 900, de 901 à 1000, de 1001 à 1100, de 1101 à 1200, de 1201 à 1300, de 1301 à 1400, de 1401 à 1500 et de 1501 à 1600.
De 1601 à 1700, il y en a 80 ; de 1701 à 1800, il y en a 1 ; de 1801 à 1900, il y en a 81 ; de 1901 à 2000, il y en a 81.
En tout, le nombre d'entiers, de 1 à 2000, qui ne contiennent pas le chiffre 7 est égal à $16(81) + 2(80) + 2(1)$, soit $18(81)$, ou 1458.

*Solution 2*
Puisque les entiers 0 et 2000 ne contiennent pas le chiffre 7, on remplace 2000 par 0 en on cherche le nombre d'entiers, de 0 à 1999, qui ne contiennent pas le chiffre 7.
Chacun de ces entiers peut être écrit à l'aide de quatre chiffres, soit $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{d}$, chaque entier pouvant être un zéro. $a$ peut donc prendre les valeurs 0 ou 1, tandis que les chiffres $b$, $c$ et $d$ peuvent prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 ou 9.
Il y a donc 2 choix pour le premier chiffre ; pour chacun de ces choix, il y a 9 choix pour le deuxième chiffre ; pour chacun de ces choix, il y a 9 choix pour le troisième chiffre ; pour chacun de ces choix il y a 9 choix pour le quatrième chiffre. Le nombre de choix est donc égal à $2 \times 9 \times 9 \times 9$, ou 1458.
Il y a donc 1458 entiers, de 1 à 2000, qui ne contiennent pas le chiffre 7.

(c) *Solution 1*
Dans cette solution, on fera souvent appel au fait que la somme des entiers de 1 à $n$ est égale à $\frac{1}{2}n(n+1)$.
On considère d'abord les entiers de 1 à 100.
Leur somme est égale à $\frac{1}{2}(100)(101)$, ou 5050.
Parmi ces entiers, ceux qui contiennent le chiffre 7 sont 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 87 et 97. Leur somme est égale à 1188.
Les entiers, de 1 à 100, qui ne contiennent pas le chiffre 7 ont une somme de $5050 - 1188$, ou 3862.

Dans l'intervalle de 101 à 200, il y a aussi 81 entiers qui ne contiennent pas le chiffre 7. Chacun de ces entiers est 100 de plus qu'un nombre de l'intervalle de 1 à 100 qui ne contient pas le chiffre 7. La somme de ces 81 entiers est donc égale à $3862 + 81(100)$.

On utilise la même approche pour déterminer la somme des entiers appropriés dans chacun des intervalles suivants. On présente les résultats dans un tableau :

| Intervalle | Nombre d'entiers qui ne contiennent pas 7 | Somme |
|---|---|---|
| De 1 à 100 | 81 | 3862 |
| De 101 à 200 | 81 | $3862 + 81(100)$ |
| De 201 à 300 | 81 | $3862 + 81(200)$ |
| De 301 à 400 | 81 | $3862 + 81(300)$ |
| De 401 à 500 | 81 | $3862 + 81(400)$ |
| De 501 à 600 | 81 | $3862 + 81(500)$ |
| De 601 à 700 | 80 | $3862 + 81(600) - 700$ |
| De 701 à 800 | 1 | 800 |
| De 801 à 900 | 81 | $3862 + 81(800)$ |
| De 901 à 1000 | 81 | $3862 + 81(900)$ |
| De 1001 à 1100 | 81 | $3862 + 81(1000)$ |
| De 1101 à 1200 | 81 | $3862 + 81(1100)$ |
| De 1201 à 1300 | 81 | $3862 + 81(1200)$ |
| De 1301 à 1400 | 81 | $3862 + 81(1300)$ |
| De 1401 à 1500 | 81 | $3862 + 81(1400)$ |
| De 1501 à 1600 | 81 | $3862 + 81(1500)$ |
| De 1601 à 1700 | 80 | $3862 + 81(1600) - 1700$ |
| De 1701 à 1800 | 1 | 1800 |
| De 1801 à 1900 | 81 | $3862 + 81(1800)$ |
| De 1901 à 2000 | 81 | $3862 + 81(1900)$ |
| De 2001 à 2006 | 6 | $2001 + 2002 + 2003 + 2004 + 2005 + 2006$ |

La somme de tous ces entiers est égale à :

$$\begin{aligned}
& 18(3862) \\
& \quad +81(100)(1+2+3+4+5+6+8+9+10+11+12+13+14+15+16+18+19) \\
& \quad -700+800-1700+1800+(2001+2002+2003+2004+2005+2006) \\
= \ & 69\,516+8100(166)+200+12\,021 \\
= \ & 1\,426\,337
\end{aligned}$$

*Solution 2*

On considère d'abord les entiers de 000 à 999 qui ne contiennent pas le chiffre 7. (On peut inclure l'entier 000, car cela ne changera pas la somme.)

Puisque chaque chiffre peut prendre 9 valeurs, le nombre de ces entiers est égal à $9 \times 9 \times 9$, ou 729.

Si on considère ensuite n'importe quel entier particulier dans n'importe quelle des trois positions, il y a 81 entiers, parmi les 729, qui partagent le même chiffre dans cette position. (Par exemple, il y a 81 entiers, dans la liste, qui se terminent par 1.)

Pour déterminer la somme des 729 entiers, on détermine la somme des chiffres des unités, puis la valeur de celle des chiffres des dizaines, puis la valeur de celle des chiffres des centaines.

Chacun des 9 chiffres possibles paraît 81 fois dans la colonne des unités. Donc, la somme des chiffres de cette colonne est égale à :

$$81(0) + 81(1) + 81(2) + 81(3) + 81(4) + 81(5) + 81(6) + 81(8) + 81(9) = 81(38)$$

Chacun des 9 chiffres possibles de la colonne des dizaines paraît 81 fois dans la colonne des dizaines. Donc, la valeur de la somme des chiffres de cette colonne est égale à :

$$81(0 + 10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 80 + 90) = 81(380)$$

De même, la valeur de la somme des chiffres dans la colonne des centaines est égale à 81(3800).
Donc, la somme des entiers, de 0 à 999, qui ne contiennent pas le chiffre 7, est égale à :

$$81(38) + 81(380) + 81(3800) = 81(38)(1 + 10 + 100) = 81(38)(111) = 341\,658$$

Dans l'intervalle de 1000 à 1999, chacun des 729 entiers qui ne contiennent pas le chiffre 7 est 1000 de plus qu'un de ces entiers dans l'intervalle de 0 à 999. (Il y a bien 729 tels entiers dans cet intervalle, puisque le premier chiffre est 1 et que chacun des autres chiffres peut prendre une de 9 valeurs.)
La somme de ces entiers, dans l'intervalle de 1000 à 1999, est égale à la somme des entiers correspondants de l'intervalle de 0 à 999, plus 729(1000). Elle est donc égale à $729\,000 + 341\,658$, ou $1\,070\,658$.
Aucun des entiers, de 2000 à 2006, ne contient le chiffre 7. Leur somme est égale à $2000 + 2001 + 2002 + 2003 + 2004 + 2005 + 2006$, soit 7(2003), ou $14\,021$.
La somme de tous les entiers, de 1 à 2006, qui ne contiennent pas le chiffre 7 est égale à $341\,658 + 1\,070\,658 + 14\,021$, ou $1\,426\,337$.