Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat 2006

(11^{e} année ou Secondaire V)

le mercredi 22 février 2006

Solutions

1. On a : $\frac{1}{4 \times 5} = \frac{1}{20} = 0{,}05$

Réponse : (B)

2. Puisque $2x + 3x + 4x = 12 + 9 + 6$, alors $9x = 27$, d'où $x = 3$.

Réponse : (B)

3. Selon la priorité des opérations, $\frac{4^3}{10^2 - 6^2}$ est égal à $\frac{64}{100 - 36}$, c'est-à-dire à $\frac{64}{64}$, ou 1.

Réponse : (A)

4. On calcule de l'intérieur vers l'extérieur : $\left(\sqrt{\sqrt{9} + \sqrt{1}}\right)^4 = \left(\sqrt{3+1}\right)^4 = \left(\sqrt{4}\right)^4 = 2^4 = 16$

Réponse : (C)

5. Puisque les arêtes ont des longueurs de 4, 5 et 6, les volumes égalent 4^3, 5^3 et 6^3, c'est-à-dire 64, 125 et 216. La moyenne des volumes est égale à $\frac{64 + 125 + 216}{3}$, c'est-à-dire à $\frac{405}{3}$, ou 135.

Réponse : (E)

6. La réduction du prix du tee-shirt est égale à 30 % de 25 \$, soit $0{,}3 \times 25$ \$, ou 7,50 \$.
La réduction du prix du jean est égale à 10 % de 75 \$, soit $0{,}1 \times 75$ \$, ou 7,50 \$.
La réduction du prix total est égale à 7,50 \$ + 7,50 \$, ou 15 \$.

Réponse : (A)

7. Si $\sqrt{2^3 \times 5 \times p}$ est un entier, alors $2^3 \times 5 \times p$ est un carré parfait.
Pour que $2^3 \times 5 \times p$ soit un carré parfait, il faut que chaque facteur premier paraisse un nombre pair de fois. Donc, p doit être un multiple de 2 et de 5.
Pour que p soit aussi petit que possible, p doit donc être égal à 2×5, ou 10.
(On peut vérifier : $2^3 \times 5 \times 10 = 400$, ce qui est un carré parfait.)

Réponse : (C)

8. Selon les renseignements donnés, $P + Q = 16$ et $P - Q = 4$.
On additionne ces équations, membre par membre, pour obtenir $P + Q + P - Q = 16 + 4$, d'où $2P = 20$, ou $P = 10$.

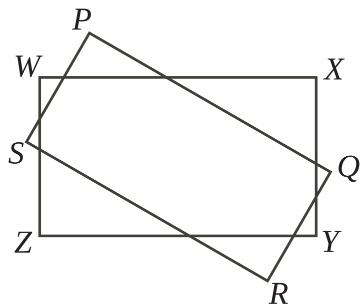
Réponse : (D)

9. *Solution 1*
Puisque $\angle FAB$ est un angle extérieur du triangle ABC, alors $\angle FAB = \angle ABC + \angle ACB$, ou $70^\circ = (x^\circ + 20^\circ) + (20^\circ + x^\circ)$. Donc $70 = 2x + 40$, d'où $x = 15$.

Solution 2
Puisque $\angle FAB = 70^\circ$, alors $\angle BAC = 110^\circ$.
Dans le triangle ABC, on a $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$, ou
$(x^\circ + 20^\circ) + (20^\circ + x^\circ) + 110^\circ = 180^\circ$. Donc $150 + 2x = 180$, d'où $x = 15$.

Réponse : (A)

10. On considère les rectangles $WXYZ$ et $PQRS$.
Chacun des quatre côtés de $PQRS$ peut couper un maximum de 2 côtés de $WXYZ$, puisqu'une droite peut couper un maximum de deux côtés d'un rectangle.
Il peut donc y avoir au plus 8 points d'intersection.
Or, 8 points d'intersection sont possibles, comme dans la figure suivante.



Donc, le nombre maximum de points d'intersection de n'importe quels deux rectangles est 8.

Réponse : (D)

11. *Solution 1*
Puisque $\frac{a}{b} = 3$, alors $a = 3b$. Puisque $\frac{b}{c} = 2$, alors $b = 2c$.
Puisque $a = 3b$ et $b = 2c$, alors $a = 6c$.
Donc $\frac{a-b}{c-b} = \frac{6c-2c}{c-2c} = \frac{4c}{-c} = -4$.

Solution 2
On divise le numérateur et le dénominateur de l'expression par b : $\frac{a-b}{c-b} = \frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{c}{b}-1}$

Puisque $\frac{b}{c} = 2$, alors $\frac{c}{b} = \frac{1}{2}$.
On a donc $\frac{a-b}{c-b} = \frac{3-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4$.

Solution 3
Posons $c = 1$. Puisque $\frac{b}{c} = 2$, alors $b = 2$. Puisque $\frac{a}{b} = 3$, alors $a = 6$.
On a donc $\frac{a-b}{c-b} = \frac{6-2}{1-2} = \frac{4}{-1} = -4$.

Réponse : (A)

12. *Solution 1*
Le membre de gauche de l'équation est égal à $(2^4)(3^6)$, c'est-à-dire à $16(729)$, ou $11\,664$.
Donc $9(6^x) = 11\,664$, d'où $6^x = 1296$.
Puisque $6^4 = 1296$, alors $x = 4$.

Solution 2
On transforme le membre de gauche : $(2^4)(3^6) = (2^4)(3^4)(3^2) = (2 \times 3)^4(3^2) = 6^4(9) = 9(6^4)$
On compare cette expression à $9(6^x)$ et on conclut que $x = 4$.

Réponse : (C)

13. Soit c le coût, en cents, du téléchargement d'une chanson en 2005.
En 2004, le coût du téléchargement d'une chanson était donc de $c + 32$ cents.
Le coût total des téléchargements était donc de $360c$ cents en 2005 et de $200(c + 32)$ cents en 2004. Donc $360c = 200(c + 32)$, d'où $160c = 6400$, ou $c = 40$.
Le coût total des téléchargements de 2005 était donc de $360(40)$ cents, soit 14 400 cents, ou 144,00 \$.

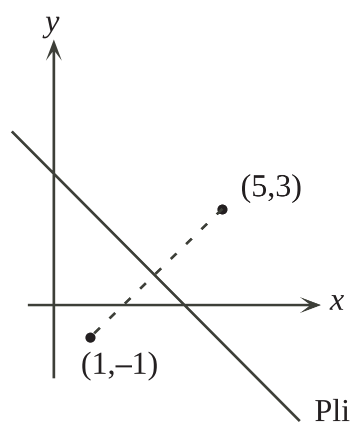
Réponse : (A)

14. *Solution 1*
On additionne les deux équations, membre par membre, pour obtenir $px + 3x = 46$, ou $(p + 3)x = 46$. Puisque $(2, -4)$ est une solution du système, il vérifie l'èquation $(p + 3)x = 46$ (ou $(p + 3)x + 0y = 46$).
Donc $2(p + 3) = 46$, d'où $p + 3 = 23$, ou $p = 20$.

Solution 2
On reporte $(x,y) = (2, -4)$ dans la deuxième équation. On obtient $3(2) - q(-4) = 38$, d'où $6 + 4q = 38$, ou $q = 8$. La première équation devient donc $px + 8y = 8$.
On reporte $(x,y) = (2, -4)$ dans cette équation. On obtient $p(2) + 8(-4) = 8$, d'où $2p - 32 = 8$, ou $p = 20$.

Réponse : (B)

15. Puisque le point (5,3) est superposé au point $(1, -1)$, la droite qui représente le pli doit passer par le milieu du segment formé par les points, soit $\left(\frac{1}{2}(5 + 1), \frac{1}{2}(3 + (-1))\right)$, ou (3,1).



Parmi les choix de réponse, (3,1) vérifie seulement l'équation $y = -x + 4$. La réponse est (D).
(De fait, la droite est la médiatrice du segment formé par les points (5,3) et $(1, -1)$. La pente du segment est égale à $\dfrac{3 - (-1)}{5 - 1}$, ou 1. La médiatrice a donc une pente de -1.
Puisqu'elle passe aussi par le point (3,1), elle a pour équation $y = -x + 4$.)

Réponse : (D)

16. Puisque l'aire du disque est égale à l'aire de la région ombrée, chaque aire est égale à la moitié de l'aire du rectangle. Chaque aire est donc égale à $\frac{1}{2}(8 \times 9)$, ou 36.
Soit r le rayon du disque. Donc $\pi r^2 = 36$, ou $r^2 = \frac{36}{\pi}$. Donc $r = \sqrt{\frac{36}{\pi}}$, ou $r = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{\pi}}$, ou $r = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$.

Réponse : (C)

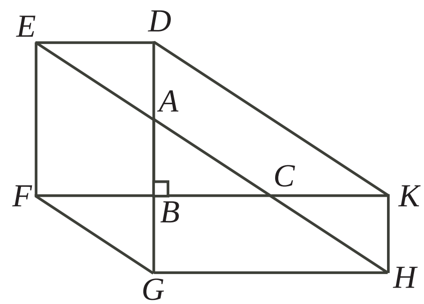
17. Puisque chaque terme, à partir du quatrième, est égal à la somme des trois termes précédents, alors d'après le quatrième terme, on a $13 = 5 + p + q$, d'où $p + q = 8$.
D'après le cinquième terme, on a $r = p + q + 13$, d'où $r = 8 + 13$, ou $r = 21$.
D'après le septième terme, on a $x = 13 + r + 40$, d'où $r = 13 + 21 + 40$, ou $r = 74$.

RÉPONSE : (D)

18. Georgina se déplace pendant 6 minutes, soit $\frac{1}{10}$ d'heure. Puisqu'elle se déplace pendant $\frac{1}{10}$ d'heure à une vitesse de 24 km/h, elle parcourt 2,4 km, ou 2400 m.
Puisque la roue avant de son vélo a un diamètre de 0,75 m, elle a une circonférence de $0{,}75\pi$ m.
Donc, à chaque rotation de la roue, Georgina avance de $0{,}75\pi$ m.
Sur une longueur de 2400 m, le nombre de rotations effectuées par la roue est égal à $\dfrac{2400}{0{,}75\pi}$, soit environ 1018,59. Le choix de réponse le plus près est 1020.

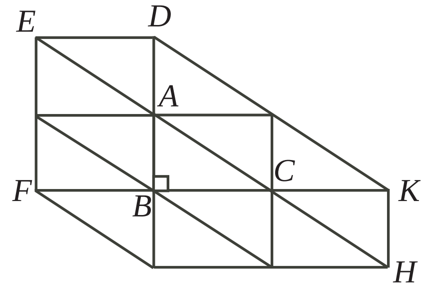
RÉPONSE : (B)

19. *Solution 1*



Soit x l'aire du triangle ABC.
On subdivise l'hexagone $DEFGHK$ en morceaux et on exprimera l'aire de chaque morceau en termes de x.
On considère les triangles ADE et ABC. Puisque $AD = AB$, $AE = AC$ et $\angle DAE = \angle CAB$, les triangles sont congruents. L'aire du triangle ADE est donc égale à x.
De même, les triangles BGF et CKH ont chacun une aire de x.
On considère le quadrilatère $AEFB$. On peut le joindre au triangle ABC pour former le triangle CFE. Puisque $AE = AC$, alors $CE = 2CA$; de même, $CF = 2CB$.
Les triangles CFE et CBA ont un angle commun, soit C. De plus, les rapports $CA : CE$ et $CB : CF$ égalent chacun $1 : 2$. Les triangles sont donc semblables.
Puisque les côtés du triangle CFE sont 2 fois plus longs que ceux du triangle CBA, l'aire du triangle CFE est 4 fois celle du triangle CBA. Elle est donc égale à $4x$.
Donc, l'aire du quadrilatère $AEFB$ est égale à $3x$.
De même, les quadrilatères $ADKC$ et $BCHG$ ont chacun une aire de $3x$.
L'aire de l'hexagone $DEFGHK$ est égale à la somme de l'aire des triangles ABC, ADE, BGF, CKH et des quadrilatères $AEFB$, $ADKC$ et $BCHG$. Elle est donc égale à $4x + 3(3x)$, ou $13x$.
Le rapport de l'aire de l'hexagone $DEFGHK$ à l'aire du triangle ABC est égal à $13 : 1$.

Solution 2
On peut diviser l'hexagone $DEFGHK$ en triangles en traçant des segments verticaux ayant la même longueur que AB, des segments horizontaux ayant la même longueur que BC et des segments obliques ayant la même longueur que AC.



L'hexagone $DEFGHK$ est donc divisé en 13 triangles congruents. (On peut facilement démontrer que chaque triangle est congruent au triangle ABC en montrant que chacun est rectangle et qu'au moins deux des côtés de chaque triangle a la même longueur que ceux du triangle ABC.)
Donc, l'aire de l'hexagone $DEFGHI$ est 13 fois l'aire du triangle ABC. Le rapport des aires est donc de 13 : 1.

Réponse : (E)

20. *Solution 1*
Supposons que Igor enlève un nombre de billes du sac et que les billes qui restent dans le sac ne satisfont pas à la condition donnée. Quel est le nombre maximal de billes qui peuvent rester ?
Pour ne pas satisfaire à la condition donnée, ou bien il n'y a pas au moins quatre billes d'une couleur (et il y a alors au plus 9 billes dans le sac, soit 3 billes de chaque couleur) ou bien il y a au moins 4 billes d'une couleur et il n'y a pas 3 billes de chaque autre couleur.
Dans ce dernier cas, on pourrait avoir autant de billes que possible d'une couleur (soit 8 billes jaunes) et 2 billes de chaque autre couleur pour un total de 12 billes qui restent dans le sac.
Donc, si Igor enlève 8 billes ou plus, les boules qui restent dans le sac ne satisfont pas à la condition donnée.
Par contre, si Igor enlève 7 billes ou moins, les billes qui restent satisfont à la condition donnée.
La plus grande valeur possible de N est 7.

Solution 2
Puisqu'on cherche la plus grande valeur possible de N, on commence par le plus grand nombre parmi les choix de répones et on élimine les choix jusqu'à ce que l'on obtienne la bonne réponse.
Si Igor a enlevé 10 billes, il peut avoir enlevé 5 billes rouges et 5 billes noires, laissant 8 billes jaunes, 2 billes rouges et 0 bille noire dans le sac, ce qui ne satisfait pas à la condition donnée.
Donc, la réponse n'est pas 10.
Si Igor a enlevé 9 billes, il peut avoir enlevé 5 billes rouges et 4 billes noires, laissant 8 billes jaunes, 2 billes rouges et 1 bille noire dans le sac, ce qui ne satisfait pas à la condition donnée.
Donc, la réponse n'est pas 9.
Si Igor a enlevé 8 billes, il peut avoir enlevé 5 billes rouges et 3 billes noires, laissant 8 billes jaunes, 2 billes rouges et 2 billes noires dans le sac, ce qui ne satisfait pas à la condition donnée.
Donc, la réponse n'est pas 8.

La réponse est-elle 7 ?
Il y a 20 billes au départ. Si on en enlève 7, il en reste 13 dans le sac.
Puisqu'il reste 13 billes, il ne peut y en avoir 4 ou moins de chacune des trois couleurs (sinon il y aurait au plus 12 billes dans le sac). Il y a donc au moins 5 billes d'une couleur dans le sac.
Peut-il y avoir 2 billes ou moins de chacune des deux autres couleurs ? Si oui, il doit y avoir au moins 9 billes de la première couleur pour qu'il reste 13 billes dans le sac. Or, il y avait un maximum de 8 billes d'une même couleur au départ. Donc, il doit y avoir au moins 3 billes d'une des deux autres couleurs.

Donc, si on enlève 7 billes, il reste au moins 5 billes d'une couleur et 3 billes d'une autre couleur.
En choisissant $N = 7$, les billes qui restent dans le sac satisfont à la condition donnée.
La plus grande valeur possible de N est donc 7.

Réponse : (B)

21. Si n est un entier impair, alors les facteurs $n-1$ et $n+1$ sont des entiers pairs.
De plus, $n-1$ et $n+1$ sont des nombres pairs consécutifs. L'un est donc un multiple de 2, tandis que l'autre est un multiple de 4.
Le produit $(n-1)(n+1)$ admet donc 3 fois le diviseur 2. Il en est donc de même pour le produit $(n-1)(n)(n+1)$ qui est donc divisible par 8.
Donc, si n est un entier impair, l'expression $\dfrac{(n-1)(n)(n+1)}{8}$ prend une valeur entière.
(De 2 à 80, il y a 39 entiers impairs.)
Si n est un entier pair, alors les facteurs $n-1$ et $n+1$ sont des entiers impairs.
Donc, l'expression $(n-1)(n)(n+1)$ est seulement divisible par 8 lorsque n est divisible par 8.
(De 2 à 80, il y a 10 multiples de 8.)
Il y a donc $39 + 10$, ou 49 valeurs entières de n, dans l'intervalle $2 \leq n \leq 80$, pour lesquelles l'expression $\dfrac{(n-1)(n)(n+1)}{8}$ prend des valeurs entières.

Réponse : (E)

22. On procède d'abord par tâtonnements, tout en analysant les résultats.
Puisque Céline est plus rapide à déplacer les petites boîtes et que René est plus rapide à déplacer les grandes, on suppose que Céline déplace toutes les petites, ce qui prend 32 minutes, et que René déplace toutes les grandes, ce qui prend 50 minutes. Ils finissent donc en 50 minutes.
Si on laisse Céline déplacer 2 grandes boîtes, en plus des 16 petites, elle mettra 44 minutes pour le faire. René mettra alors 40 minutes à déplacer 8 grandes boîtes. Ils finissent donc en 44 minutes. On peut donc éliminer le choix de réponse (E).
Si on laisse René déplacer 1 des petites boîtes, en plus des 8 grandes boîtes, il mettra 43 minutes pour le faire. Céline mettra alors 42 minutes pour déplacer 15 petites boîtes et 2 grandes boîtes. Ils finissent donc en 43 minutes. On peut donc éliminer le choix de réponse (D).

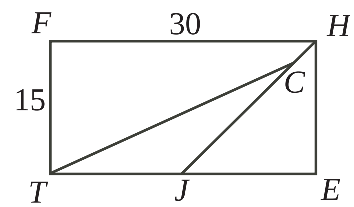
Pourquoi est-il impossible de finir en moins de 43 minutes ? Supposons qu'ils finissent en 42 minutes. Ils mettraient, en tout, un total d'au plus 84 minutes pour finir le travail.
Supposons que Céline déplace x petites boîtes et y grandes boîtes, ce qui lui prendrait $2x + 6y$ minutes. Alors René déplace $16 - x$ petites boîtes et $10 - y$ grandes boîtes, ce qui lui prendrait $3(16 - x) + 5(10 - y)$ minutes, ou $98 - 3x - 5y$ minutes.
Puisqu'ils mettent au plus 84 minutes de travail au total, alors $(2x + 6y) + (98 - 3x - 5y) \leq 84$, ou $14 \leq x - y$.
Puisque $0 \leq x \leq 16$ et $0 \leq y \leq 10$, alors les couples (x,y) qui vérifient l'inéquation $14 \leq x - y$ sont (16,0), (16,1), (16,2), (15,0), (15,1), (14,0). Ces valeurs donnent les résultats suivants :

x	y	Céline N$^{\text{bre}}$ de pet. boîtes	Céline N$^{\text{bre}}$ de gr. boîtes	Céline N$^{\text{bre}}$ de minutes	René N$^{\text{bre}}$ de pet. boîtes	René N$^{\text{bre}}$ de gr. boîtes	René N$^{\text{bre}}$ de minutes
16	0	16	0	32	0	10	50
16	1	16	1	38	0	9	45
16	2	16	2	44	0	8	40
15	0	15	0	30	1	10	53
15	1	15	1	36	1	9	48
14	0	14	0	28	2	10	56

Dans chacun de ces cas, bien que le temps total soit inférieur à 84 minutes, il faut plus de 43 minutes pour que les deux aient fini de déplacer les boîtes.
Il est donc impossible de finir en moins de 43 minutes. Ils peuvent donc finir à 9 h 43.

Réponse : (C)

23. *Solution 1*
Soit t le temps, en secondes, que met Tom pour attraper Jerry.

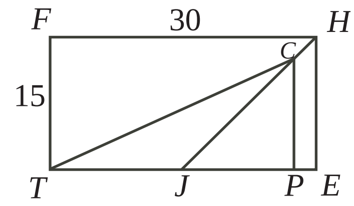


Puisque Tom court à une vitesse de 5 m/s pendant t secondes, alors $TC = 5t$.
De même, puisque Jerry court à une vitesse de 3 m/s pendant t secondes, alors $JC = 3t$.
Or, on sait que J est le milieu du segment TE. Donc $TJ = 15 = JE$.
Puisque $HE = 15$, le triangle HJE est rectangle isocèle. Donc $\angle HJE = 45°$, d'où $\angle TJC = 135°$.
D'après la loi du cosinus dans le triangle TCJ :

$$\begin{aligned} TC^2 &= TJ^2 + JC^2 - 2(TJ)(JC)\cos(\angle TJC) \\ (5t)^2 &= 15^2 + (3t)^2 - 2(15)(3t)\cos(135°) \\ 25t^2 &= 225 + 9t^2 - 90t\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ 16t^2 - 45\sqrt{2}t - 225 &= 0 \end{aligned}$$

Puisque t est positif, on a donc $t = \dfrac{45\sqrt{2} + \sqrt{(45\sqrt{2})^2 - 4(16)(-225)}}{2(16)}$, d'où $t = \dfrac{45\sqrt{2} + \sqrt{18\,450}}{32}$, ou $t \approx 6{,}23$ secondes. Tom met environ 6,2 secondes pour attraper Jerry.

Solution 2
Soit t le temps, en secondes, que met Tom pour attraper Jerry.
Puisque Tom court à une vitesse de 5 m/s pendant t secondes, alors $TC = 5t$.
De même, puisque Jerry court à une vitesse de 3 m/s pendant t secondes, alors $JC = 3t$.
Or, on sait que J est le milieu du segment TE. Donc $TJ = 15 = JE$.
Puisque $HE = 15$, le triangle HJE est rectangle isocèle. Donc $\angle HJE = 45°$.
Au point C, on abaisse une perpendiculaire CP à JE.



Puisque $CJ = 3t$, $\angle CJE = 45°$ et $\angle CPJ = 90°$, alors $JP = CP = \frac{1}{\sqrt{2}}(3t)$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle CPT :

$$\begin{aligned}
TC^2 &= (TJ + JP)^2 + CP^2 \\
(5t)^2 &= \left(15 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}(3t)\right)^2 + \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(3t)\right)^2 \\
25t^2 &= 225 + 2(15)\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(3t)\right) + \tfrac{1}{2}(9t^2) + \tfrac{1}{2}(9t^2) \\
25t^2 &= 225 + 45\sqrt{2}t + 9t^2 \\
16t^2 - 45\sqrt{2}t - 225 &= 0
\end{aligned}$$

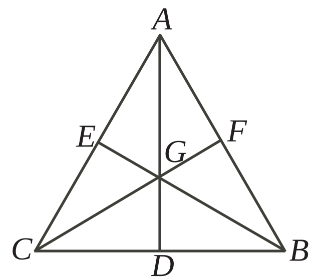
On résout l'équation comme dans la Solution 1. Tom met environ 6,2 secondes pour attraper Jerry.

Réponse : (E)

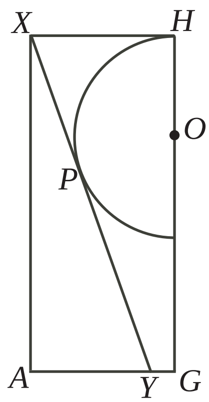
24. Puisque $\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{3a} = \frac{1}{b^2 - 2b}$, alors $\frac{6}{6a} + \frac{3}{6a} + \frac{2}{6a} = \frac{1}{b^2 - 2b}$, ou $\frac{11}{6a} = \frac{1}{b^2 - 2b}$.
Le produit en croix donne $11(b^2 - 2b) = 6a$.
Puisque a et b sont des entiers, les deux membres de l'équation prennent des valeurs entières.
Puisque 11 est un facteur du membre de gauche, il doit être un facteur du membre de droite.
Il doit donc être un diviseur de a.
On a donc $a = 11A$, où A est un entier strictement positif.
La dernière équation devient donc $11(b^2 - 2b) = 6(11A)$, ou $b^2 - 2b = 6A$.
Puisque 6 est un facteur du membre de droite, il doit être un facteur du membre de gauche.
Quelle est la plus petite valeur entière positive de b pour laquelle 6 est un diviseur de $b^2 - 2b$?
On peut vérifier rapidement que si b est égal à 1, 2, 3, 4 ou 5, alors $b^2 - 2b$ n'est pas divisible par 6, alors que si $b = 6$, $b^2 - 2b$ est divisible par 6.
La plus petite valeur possible de b est 6. Donc $6A = 6^2 - 2(6)$, d'où $6A = 24$, ou $A = 4$. Puisque $a = 11A$, alors $a = 44$.
La plus petite valeur possible de $a + b$ est donc $44 + 6$, ou 50.

Réponse : (E)

25. Soit A, B et C les centres des bases des cônes. On trace le triangle ABC.
Puisque les cônes sont tangents l'un à l'autre, les côtés du triangle passent par les points de contact. Puisque les bases ont un rayon de 50, le triangle a des côtés de longueur 100. Il est donc équilatéral.
Par symétrie, la sphère est placée au milieu des cônes. Son centre est donc directement au-dessus du centre de gravité du triangle ABC.
Quelle est la distance du centre de gravité à chacun des sommets ?
On trace les médianes AD, BE et CF. (Chacune est aussi une hauteur, une médiatrice et une bissectrice.). Les médianes se coupent au centre de gravité G.



Puisque $BD = \frac{1}{2}BC = 50$ et $\angle GBD = \frac{1}{2}\angle ABC = 30°$, alors le triangle BGD est un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $BG = \frac{2}{\sqrt{3}}BD$, d'où $BG = \frac{100}{\sqrt{3}}$.
Donc, la distance du centre de gravité à chacun des sommets du triangle est égale à $\frac{100}{\sqrt{3}}$.
Donc, la distance entre l'axe de chaque cône et la droite verticale qui passe au centre de la sphère est aussi égale à $\frac{100}{\sqrt{3}}$.
On imagine un plan vertical qui coupe un cône et la sphère en passant par l'axe du cône et le centre de la sphère. La figure suivante représente l'intersection. On y voit la moitié de l'intersection avec le cône et la moitié de l'intersection avec la sphère.



A est donc le centre de la base du cône (un sommet du triangle), G est le centre de gravité du triangle ABC, O est le centre de la sphère, P est le point de contact de la sphère et du cône, X est l'apex du cône, Y est le point où le cône rencontre AG et H est le point de contact de la sphère et du plan horizontal qui passe par l'apex des cônes.
Soit r le rayon de la sphère.

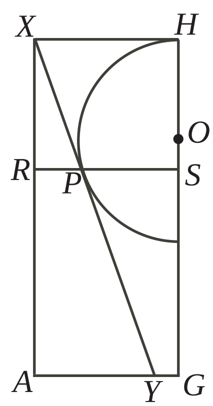
Méthode 1
On sait que $OH = OP = r$, $XH = AG = \frac{100}{\sqrt{3}}$ et $XA = HG = 120$.
Puisque P est le point de contact de la sphère et du cône, OP est perpendiculaire à XY.
Puisque les segments XH et XP sont tangents à la sphère, alors $XP = XH = \frac{100}{\sqrt{3}}$.
D'après le théorème du Pythagore dans le triangle AXY, $XY^2 = AY^2 + AX^2$, ou
$XY^2 = 50^2 + 120^2$, d'où $XY^2 = 16\,900 = 130^2$, ou $XY = 130$.
Donc $PY = XY - XP$, ou $PY = 130 - \frac{100}{\sqrt{3}}$.
De plus, $OG = 120 - r$ et $GY = AG - AY$, ou $GY = \frac{100}{\sqrt{3}} - 50$.

D'après le théorème de Pythagore dans les triangles OPY et GOY,
$OP^2 + PY^2 = OY^2 = GY^2 + GO^2$. Donc :

$$\begin{aligned}
r^2 + \left(130 - \tfrac{100}{\sqrt{3}}\right)^2 &= \left(\tfrac{100}{\sqrt{3}} - 50\right)^2 + (120 - r)^2 \\
r^2 + 130^2 - \frac{2(130)(100)}{\sqrt{3}} + \frac{10000}{3} &= \frac{10000}{3} - \frac{2(50)(100)}{\sqrt{3}} + 50^2 + 120^2 - 240r + r^2 \\
240r &= \frac{2(130-50)(100)}{\sqrt{3}} \qquad (\text{puisque } 130^2 = 50^2 + 120^2) \\
r &= \frac{200}{3\sqrt{3}} = \frac{200\sqrt{3}}{9}
\end{aligned}$$

Donc $r \approx 38{,}49$. Parmi les choix de réponse, le rayon est plus près de 38,5.
(On aurait pu calculer le rayon à l'aide de la trigonométrie. En effet, le rapport de AY à AX nous permet de connaître la mesure de l'angle YXA et de là, celle de l'angle PXH.
On aurait alors $\tan\left(\frac{1}{2}\angle PXH\right) = \tan(\angle OXH) = \dfrac{OH}{XH} = \dfrac{r}{\frac{100}{\sqrt{3}}}$.)

<u>Méthode 2</u>
On sait que $XH = AG = \frac{100}{\sqrt{3}}$.
Puisque $AX = 120$ et $AY = 50$, alors la pente de XY est égale à $\frac{-120}{50}$, ou $-\frac{12}{5}$.
Puisque P est le point de contact de la sphère et du cône, OP est perpendiculaire à XY. Dans un plan cartésien dont l'axe des abscisses est parallèle à AG et l'axe des ordonnées est parallèle à AX, OP a une pente de $\frac{5}{12}$.
Au point P, on trace une droite horizontale qui coupe AX en R et GH en S.



Puisque OP a une pente de $\frac{5}{12}$, alors $OS = 5t$ et $SP = 12t$ pour un nombre réel quelconque t.
Puisque le triangle OSP est rectangle en S, alors $OP = 13t$ d'après le théorème de Pythagore.
Puisque OH est un rayon du cercle, $OH = OP = 13t$. Puisque $XR = HS = HO + OS$, alors $XR = 18t$.
Or, XP a une pente de $-\frac{12}{5}$. Puisque $XR = 18t$, alors $RP = \frac{5}{12}(18t)$, ou $RP = \frac{15}{2}t$.
Puisque $RS = RP + PS$, alors $RS = \frac{15}{2}t + 12t$, ou $RS = \frac{39}{2}t$. Puisque $RS = AG$ et que $AG = \frac{100}{\sqrt{3}}$, alors $\frac{39}{2}t = \frac{100}{\sqrt{3}}$. Le rayon de la sphère, qui est égal à $13t$, est donc égal à $\frac{2}{3}\left(\frac{100}{\sqrt{3}}\right)$, c'est-à-dire à $\frac{200\sqrt{3}}{9}$, ou environ 38,49. Parmi les choix de réponse, le rayon est plus près de 38,5.

Réponse : (D)