Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide 2006

le mercredi 19 avril 2006

Solutions

1. (a) RÉPONSE : 0

Solution 1

Puisque $3x - 3y = 24$, alors $x - y = 8$.
Pour obtenir l'abscisse à l'origine, on pose $y = 0$ et on obtient $x = 8$.
Pour obtenir l'ordonnée à l'origine, on pose $x = 0$ et on obtient $y = -8$.
La somme de l'abscisse à l'origine et de l'ordonnée à l'origine est égale à $8 + (-8)$, ou 0.

Solution 2

Pour obtenir l'abscisse à l'origine, on pose $y = 0$ et on obtient $3x = 24$, d'où $x = 8$.
Pour obtenir l'ordonnée à l'origine, on pose $x = 0$ et on obtient $-3y = 24$, d'où $y = -8$.
La somme de l'abscisse à l'origine et de l'ordonnée à l'origine est égale à $8 + (-8)$, ou 0.

Solution 3

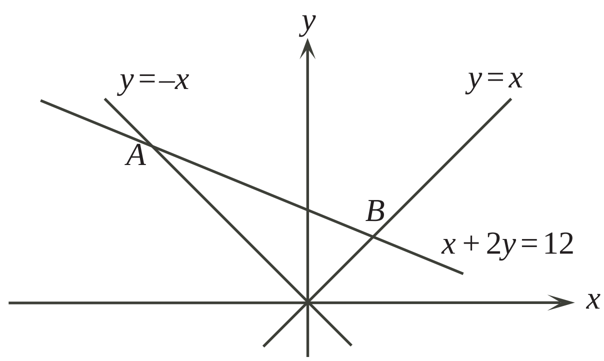
Puisque $3x - 3y = 24$, alors $x - y = 8$, ou $y = x - 8$.
D'après cette dernière équation, l'ordonnée à l'origine est égale à -8. Pour obtenir l'abscisse à l'origine, on pose $y = 0$ et on obtient $x = 8$.
La somme de l'abscisse à l'origine et de l'ordonnée à l'origine est égale à $8 + (-8)$, ou 0.

(b) RÉPONSE : 20

Puisque les droites se coupent au point (1,1), ces coordonnées vérifient l'équation de chaque droite.
D'après l'équation de la première droite, on a $p(1) = 12$, ou $p = 12$.
D'après l'équation de la deuxième droite, on a $2(1) + q(1) = 10$, d'où $q = 8$.
Donc $p + q = 20$.

(c) *Solution 1*

B est le point d'intersection des droites définies par $y = x$ et $x + 2y = 12$. Pour déterminer ses coordonnées, on reporte $y = x$ dans la deuxième équation pour obtenir $x + 2x = 12$, d'où $x = 4$.



Puisque $y = x$, B a pour coordonnées (4,4).
A est le point d'intersection des droites définies par $y = -x$ et $x+2y = 12$. Pour déterminer ses coordonnées, on reporte $y = -x$ dans la deuxième équation pour obtenir $x - 2x = 12$, d'où $x = -12$.
Puisque $y = -x$, A a pour coordonnées $(-12,12)$.
La longueur du segment AB est égale à la distance entre A et B.
Donc, $AB = \sqrt{(4-(-12))^2 + (4-12)^2}$, c'est-à-dire que $AB = \sqrt{16^2 + (-8)^2}$, d'où $AB = \sqrt{320}$, ou $AB = 8\sqrt{5}$.

Solution 2
On détermine les coordonnées de A et de B comme dans la Solution 1.
Puisque la droite d'équation $y = x$ a une pente de 1 et que la droite d'équation $y = -x$ a une pente de -1 et que le produit de ces pentes est égal à -1, les droites sont perpendiculaires. Donc $\angle AOB = 90°$, O étant l'origine.
Puisque B a pour coordonnées (4,4), alors $OB = \sqrt{4^2 + 4^2}$, ou $OB = \sqrt{32}$. Puisque A a pour coordonnées (-12,12), alors $OA = \sqrt{(-12)^2 + 12^2}$, ou $OA = \sqrt{288}$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AOB, $AB = \sqrt{OB^2 + OA^2}$, c.-à-d. que $AB = \sqrt{32 + 288}$, ou $AB = \sqrt{320}$, d'où $AB = 8\sqrt{5}$.

2. (a) Réponse : 9
Pour que la moyenne des deux chiffres soit égale à 5, leur somme doit être égale à 10.
Les entiers positifs de deux chiffres dont la somme des chiffres est égale à 10 sont 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91. Il y en a 9.

(b) Réponse : $n = 45$
Solution 1
Supposons que le nombre n s'écrit AB, A et B étant des chiffres. On a donc $n = 10A+B$.
La moyenne des chiffres de n est égale à $\dfrac{A+B}{2}$.
Or, placer une virgule décimale entre les chiffres de n équivaut à diviser n par 10. Le nombre obtenu est égal à $\dfrac{10A+B}{10}$.
On cherche donc les valeurs de A et de B pour lesquelles :

$$\begin{aligned} \frac{10A+B}{10} &= \frac{A+B}{2} \\ 10A+B &= 5(A+B) \\ 5A &= 4B \end{aligned}$$

Puisque A et B sont des chiffres tels que $5A = 4B$, il n'y a qu'une seule possibilité, soit $A = 4$ et $B = 5$. Donc $n = 45$.
(On peut vérifier que la moyenne des chiffres de n est égale à 4,5, soit le nombre obtenu lorsqu'on place une virgule décimale entre les chiffres de n.)

Solution 2
Lorsqu'on calcule la moyenne de deux chiffres, on obtient soit un entier, soit la moitié d'un entier, c'est-à-dire un nombre de la forme a,5.
Les moyennes possibles sont donc : 0,5 ; 1,0 ; 1,5 ; 2,0 ; 2,5 ; 3,0 ; 3,5 ; 4,0 ; 4,5 ; 5,0 ; 5,5 ; 6,0 ; 6,5 ; 7,0 ; 7,5 ; 8,0 ; 8,5 ; 9,0 (Il est impossible d'obtenir une moyenne de 0,0, car les deux chiffres ne peuvent pas tous les deux être 0.)
Dans cette liste, le seul nombre qui est égal à la moyenne des deux chiffres qui le forment est 4,5.
Donc $n = 45$. (On l'a obtenu en enlevant la virgule décimale de 4,5.)

(c) *Solution 1*
Puisque les trois premiers entiers ont une moyenne de 28, ils ont une somme de 3(28), ou 84. Puisque les cinq entiers ont une moyenne de 34, ils ont une somme de 5(34), ou 170.
Or, la différence entre ces deux sommes doit être égale à $s+t$. On a donc $s+t = 170-84$,

ou $s+t=86$.
La moyenne de s et de t est donc égale à $\dfrac{s+t}{2}$, ou 43.

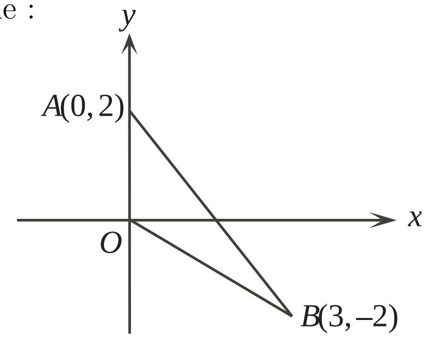
Solution 2
Soit a, b et c les trois premiers entiers. On a donc $\dfrac{a+b+c}{3}=28$, ou $a+b+c=84$.
De plus, $\dfrac{a+b+c+s+t}{5}=34$, ou $a+b+c+s+t=170$.
Donc $s+t=(a+b+c+s+t)-(a+b+c)$, d'où $s+t=170-84$, ou $s+t=86$.
La moyenne de s et de t est donc égale à $\dfrac{s+t}{2}$, ou 43.

Solution 3
Soit M la moyenne de s et de t.
Puisque la moyenne des trois premiers entiers est égale à 28, que la moyenne de s et de t est égale à M et que la moyenne des cinq nombres est égale à 34, alors 34 doit être situé, sur la droite numérique, à $\frac{2}{5}$ de la distance de 28 à M. Or sur la droite numérique, la distance de 28 à 34 est égale à 6. Donc, la distance de 28 à M doit être égale à $\frac{5}{2}(6)$, ou 15. Donc, la moyenne M de s et de t est égale à $28+15$, ou 43.

3. (a) RÉPONSE : $(21,-1)$
Solution 1
Les abscisses à l'origine de la parabole sont 20 et 22.
Par symétrie, l'abscisse du sommet est égale à la moyenne des abscisses à l'origine, soit à $\frac{1}{2}(20+22)$, ou 21.
Lorsque $x=21$, $y=(21-20)(21-22)$, ou $y=-1$.
Les coordonnées du sommet sont $(21,-1)$.

Solution 2
On développe le membre de droite de l'équation pour obtenir $y=x^2-42x+440$.
On détermine l'équation canonique en complétant le carré :
$y=x^2-2(21)x+21^2-21^2+440$, d'où $y=(x-21)^2-441+440$, ou $y=(x-21)^2-1$.
D'après cette équation, les coordonnées du sommet sont $(21,-1)$.

(b) La parabole d'équation $y=x^2+2$ a pour sommet $A(0,2)$.
On détermine l'équation canonique de la parabole définie par $y=x^2-6x+7$ en complétant le carré. On obtient $y=(x-3)^2-9+7$, d'où $y=(x-3)^2-2$.
Cette parabole a pour sommet $B(3,-2)$.
Le triangle OAB a pour sommets $O(0,0)$, $A(0,2)$ et $B(3,-2)$.
Voici une esquisse du triangle :



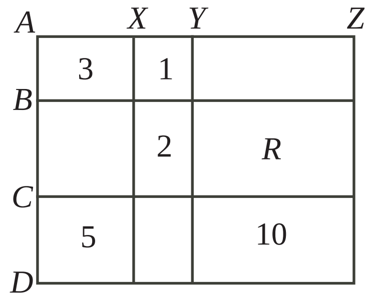
La base OA a une longueur de 2 et la hauteur correspondante est égale à la distance du

sommet B à l'axe des ordonnées, soit 3.
Donc, l'aire du triangle OAB est égale à $\frac{1}{2}(2)(3)$, ou 3.

4. (a) Réponse : $R = 12$

Solution 1

On nomme certains points de la figure.



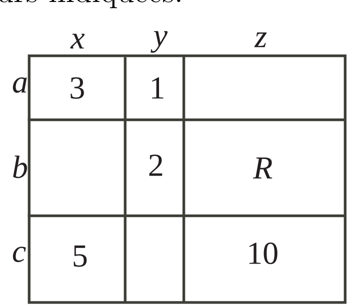
Les trois rectangles qui forment une colonne ont la même largeur. Le rapport de leur aire est donc égal au rapport de leur hauteur. Selon la colonne du milieu, on a donc $AB : BC = 1 : 2$.
Dans la première colonne, l'aire du rectangle du milieu doit donc être le double de l'aire du rectangle du haut. On a donc $BC : CD = 6 : 5$.
D'après la troisième colonne, on a $R : 10 = 6 : 5$, d'où $R = 12$.

Solution 2

Soit x la largeur de la première colonne.
Puisque le rectangle en haut à gauche a une aire de 3, la rangée du haut a une hauteur de $\dfrac{3}{x}$.
Puisque le rectangle en bas à gauche a une aire de 5, la rangée du bas a une hauteur de $\dfrac{5}{x}$.
Puisque la rangée du haut a une hauteur de $\dfrac{3}{x}$ et que le rectangle au milieu de la rangée du haut a une aire de 1, la colonne du milieu a une largeur de $\dfrac{x}{3}$.
Puisque le rectangle au milieu de la deuxième rangée a une aire de 2, la rangée du milieu a donc une hauteur de $\dfrac{6}{x}$.
Puisque la rangée du bas a une hauteur de $\dfrac{5}{x}$ et que le rectangle en bas à droite a une aire de 10, alors la troisième colonne a une largeur de $2x$.
Puisque le rectangle R a une hauteur de $\dfrac{6}{x}$ et une largeur de $2x$, son aire est égale à 12.

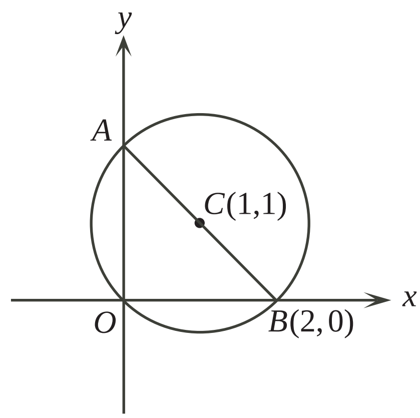
Solution 3

Soit a, b, c, x, y et z les longueurs indiquées.



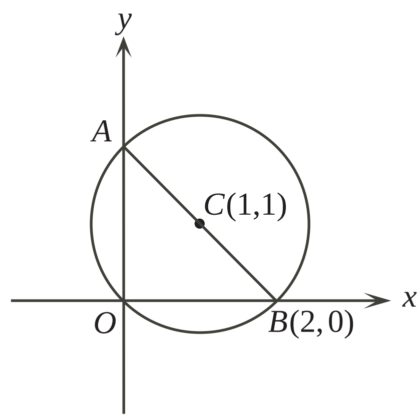
On a donc $ax = 3$, $ay = 1$, $by = 2$, $bz = R$, $cx = 5$ et $cz = 10$.
On cherche la valeur de bz.
Or $bz = \dfrac{(ax)(by)(cz)}{(ay)(cx)}$, c'est-à-dire que $bz = \dfrac{(3)(2)(10)}{(1)(5)}$, d'où $bz = 12$. Donc $R = 12$.

(b) *Solution 1*
Puisque $\angle AOB = 90°$, AB est un diamètre du cercle.
On trace le diamètre AB.

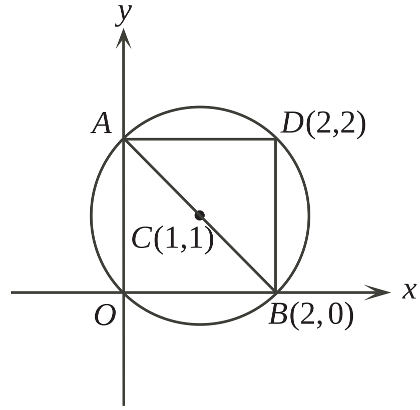


Puisque C est le centre du cercle et que AB est un diamètre, alors C est le milieu du segment AB. Les coordonnées de A sont donc (0,2).
L'aire de la partie du cercle qui se trouve dans le quadrant I est donc égale à l'aire du triangle AOB plus l'aire du demi-cercle au-dessus de AB.
Le rayon du cercle est égal à la distance de C à B, soit $\sqrt{(1-2)^2 + (1-0)^2}$, ou $\sqrt{2}$. L'aire du demi-cercle est donc égale à $\frac{1}{2}\pi(\sqrt{2})^2$, ou π.
L'aire du triangle AOB est égale à $\frac{1}{2}(OB)(AO)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(2)(2)$, ou 2.
La partie du cercle qui se trouve dans le quadrant I a donc une aire de $\pi + 2$.

Solution 2
Puisque $\angle AOB = 90°$, AB est un diamètre du cercle. On trace le diamètre AB.



Puisque C est le centre du cercle et que AB est un diamètre, alors C est le milieu du segment AB. Les coordonnées de A sont donc (0,2).
Donc $AO = BO$.
Par symétrie, le point $D(2,2)$ est sur le cercle. Il nous permet donc de « compléter le carré ».



Le carré a une aire de 4.
Le rayon du cercle est égal à la distance de C à B, soit $\sqrt{(1-2)^2+(1-0)^2}$, ou $\sqrt{2}$. L'aire du demi-cercle est donc égale à $\frac{1}{2}\pi(\sqrt{2})^2$, ou π.
La partie du cercle à l'extérieur du carré a une aire de $2\pi - 4$. Cette partie est divisée en quatre portions ayant chacune une aire de $\frac{1}{4}(2\pi-4)$, ou $\frac{1}{2}\pi - 1$. Or, deux de ces portions sont les seules parties du cercle à l'extérieur du quadrant I.
Donc, la partie du cercle qui se trouve dans le quadrant I a une aire de $2\pi - 2(\frac{1}{2}\pi - 1)$, ou $\pi + 2$.

Voici deux autres façons de déterminer les coordonnées de A :

i. Le rayon OC a une longueur de $\sqrt{1^2+1^2}$, ou $\sqrt{2}$. Puisque le cercle a pour centre (1,1) et pour rayon $\sqrt{2}$, son équation est $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.
   Pour déterminer l'ordonnée de A, on pose $x=0$. On obtient $(0-1)^2+(y-1)^2=2$, d'où $(y-1)^2=1$. Donc $y=0$ ou $y=2$. Puisque $y=0$ donne l'ordonnée du point O, $y=2$ donne celle de A. Les coordonnées de A sont donc (0,2).

ii. Puisque O et A sont sur le cercle et que le déplacement horizontal de chaque point à C est égal à 1, alors le déplacement vertical de O à C, soit 1, doit étre le même que celui de C à A. Les coordonnées de A sont donc (0,2).

5. (a) Réponse : $\frac{2}{5}$
   Puisqu'il y a 5 façons de choisir a et 3 façons de choisir b, il y a 15 façons de choisir a et b.
   Si a est pair, alors a^b doit être pair ; si a est impair, a^b doit être impair.
   Donc, les choix de a et de b pour lesquels a^b est un nombre pair sont ceux pour lesquels a est pair. Il y en a 6. En effet, il y a 2 choix pour la valeur de a et pour chacun de ces choix, il y a 3 choix pour la valeur de b. (On remarque que la valeur de b n'a aucun effet sur la parité de a^b. La probabilité dépend donc du choix de a seulement.)
   La probabilité est donc égale à $\frac{6}{15}$, ou $\frac{2}{5}$.

   (b) Au départ, il y a 4 chapeaux bleus et 2 chapeaux verts dans le sac. La probabilité de choisir un chapeau bleu est donc égale à $\frac{4}{6}$, ou $\frac{2}{3}$. Le chapeau bleu serait alors remplacé par un chapeau vert et il y aurait alors 3 chapeaux bleus et 3 chapeaux verts dans le sac. Pour revenir à la situation de départ, soit 4 chapeaux bleus et 2 chapeaux verts, il faudrait enlever un chapeau vert et le remplacer par un chapeau bleu. Puisque le sac contient 3 chapeaux de chaque couleur, la probabilité de choisir un chapeau vert est égale à $\frac{1}{2}$. La probabilité de choisir un chapeau bleu, suivi d'un chapeau vert est donc égale à $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{3}$.

Au départ, il y a 4 chapeaux bleus et 2 chapeaux verts dans le sac. La probabilité de choisir un chapeau vert est égale à $\frac{2}{6}$, ou $\frac{1}{3}$. Le chapeau vert serait alors remplacé par un chapeau bleu et il y aurait alors 5 chapeaux bleus et 1 chapeau vert dans le sac.
Pour revenir à la situation de départ, soit 4 chapeaux bleus et 2 chapeaux verts, il faudrait enlever un chapeau bleu et le remplacer par un chapeau vert. Puisque le sac contient 5 chapeaux bleus et 1 chapeau vert, la probabilité de choisir un chapeau bleu est égale à $\frac{5}{6}$.
Donc, la probabilité de choisir un chapeau vert, suivi d'un chapeau bleu est donc égale à $\frac{1}{3} \times \frac{5}{6}$, ou $\frac{5}{18}$.

Ce sont les deux seules façons de revenir à la situation initiale après deux tours, soit enlever un chapeau bleu, suivi d'un vert, ou enlever un chapeau vert, suivi d'un bleu.
Donc, la probabilité pour qu'après deux tours, le sac contienne de nouveau 4 chapeaux bleus et 2 chapeaux verts est égale à $\frac{1}{3} + \frac{5}{18}$, ou $\frac{11}{18}$.

6. (a) Réponse : $a = 1$
On additionne les deux équations, membre par membre :

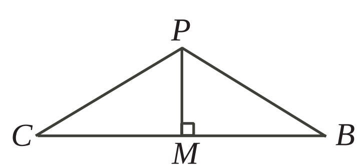
$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 y + \cos^2 y &= \tfrac{3}{2}a + \tfrac{1}{2}a^2 \\
2 &= \tfrac{3}{2}a + \tfrac{1}{2}a^2 \\
4 &= 3a + a^2 \\
0 &= a^2 + 3a - 4 \\
0 &= (a+4)(a-1)
\end{aligned}$$

Donc $a = -4$ ou $a = 1$.
Or, $a = -4$ doit être rejeté, car la 1re équation deviendrait $\sin^2 x + \cos^2 y = -6$, dont le membre de gauche est positif et le membre de droite est négatif.
La seule valeur possible de a est 1.

(Si $x = 90^\circ$ et $y = 45^\circ$, on obtient $\sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{2}$ et $\cos^2 x + \sin^2 y = \frac{1}{2}$, ce qui confirme que $a = 1$ est possible.)

(b) D'après les renseignements donnés, $PC = PB$.
Si on réussit à connaître la longueur PC, on peut déterminer la valeur de h, puisqu'on connaît déjà la longueur AC.

Le triangle CPB est isocèle, car $PC = PB$. De plus, $BC = 2$ et $\angle BPC = 120^\circ$. Puisque ce triangle est isocèle, $\angle PCB = \angle PBC = 30^\circ$.



On joint P au milieu M de BC. Puisque le triangle PCB est isocèle, PM est perpendiculaire à BC. Le triangle PMC est donc un triangle remarquable 30°-60°-90° et $CM = 1$. Donc $PC = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
(On peut utiliser plusieurs autres approches pour calculer la longueur PC.)

Puisque le triangle APC est rectangle, $AP^2 = AC^2 - PC^2$. Donc $h^2 = 2^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$, d'où $h^2 = 4 - \frac{4}{3}$, ou $h^2 = \frac{8}{3}$. Donc $h = \sqrt{\frac{8}{3}}$, ou $h = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$, d'où $h = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

7. (a) Réponse : $k = 233$

Solution 1

On calcule les 15 premiers termes, tout en les écrivant sous la forme du produit d'un entier et d'une puissance de 10 :

$$2, 5, 10, 5 \times 10, 5 \times 10^2, 5^2 \times 10^3, 5^3 \times 10^5, 5^5 \times 10^8, 5^8 \times 10^{13}, 5^{13} \times 10^{21}, 5^{21} \times 10^{34},$$
$$5^{34} \times 10^{55}, 5^{55} \times 10^{89}, 5^{89} \times 10^{144}, 5^{144} \times 10^{233}$$

Puisque le 15$^{\text{e}}$ terme est égal au produit d'un entier impair et de 10^{233}, il se termine avec 233 zéros.

Solution 2

Pour calculer le 6$^{\text{e}}$ terme, on multiplie 50×500 et on obtient 25×1000.
Le 4$^{\text{e}}$ terme et le 5$^{\text{e}}$ terme sont tous deux formés d'un entier impair suivi d'un nombre de zéros. Leur produit est donc formé d'un entier impair suivi d'un nombre de zéros
Cette régularité se poursuivra. Donc, à partir du 6$^{\text{e}}$ terme, le nombre de zéros à la fin du terme est égal à la somme des nombres de zéros à la fin des deux termes précédents.
Donc, à partir du 4$^{\text{e}}$ terme, le nombre de zéros à la fin des termes est égal à :

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233$$

Il y a donc 233 zéros à la fin du 15$^{\text{e}}$ terme.

(b) *Solution 1*

Puisque a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, il existe un nombre d pour lequel $b = a + d$ et $c = a + 2d$.
Donc :

$$\begin{aligned} a^2 - bc &= a^2 - (a+d)(a+2d) = a^2 - a^2 - 3ad - 2d^2 = -3ad - 2d^2 \\ b^2 - ac &= (a+d)^2 - a(a+2d) = a^2 + 2ad + d^2 - a^2 - 2ad = d^2 \\ c^2 - ab &= (a+2d)^2 - a(a+d) = a^2 + 4ad + 4d^2 - a^2 - ad = 3ad + 4d^2 \end{aligned}$$

On a donc :
$$(b^2 - ac) - (a^2 - bc) = d^2 - (-3ad - 2d^2) = 3d^2 + 3ad$$
et
$$(c^2 - ab) - (b^2 - ac) = (3ad + 4d^2) - d^2 = 3d^2 + 3ad$$

Donc $(b^2 - ac) - (a^2 - bc) = (c^2 - ab) - (b^2 - ac)$. La suite $a^2 - bc$, $b^2 - ac$, $c^2 - ab$ est donc arithmétique.

Solution 2

Puisque a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, il existe un nombre d pour lequel $a = b - d$ et $c = b + d$.
Donc :

$$\begin{aligned} a^2 - bc &= (b-d)^2 - b(b+d) = b^2 - 2bd + d^2 - b^2 - bd = -3bd + d^2 \\ b^2 - ac &= b^2 - (b-d)(b+d) = b^2 - b^2 + d^2 = d^2 \\ c^2 - ab &= (b+d)^2 - (b-d)b = b^2 + 2bd + d^2 - b^2 + bd = 3bd + d^2 \end{aligned}$$

On a donc :

$$(b^2 - ac) - (a^2 - bc) = d^2 - (-3bd + d^2) = 3bd$$

et

$$(c^2 - ab) - (b^2 - ac) = (3bd + d^2) - d^2 = 3bd$$

Donc $(b^2 - ac) - (a^2 - bc) = (c^2 - ab) - (b^2 - ac)$. La suite $a^2 - bc$, $b^2 - ac$, $c^2 - ab$ est donc arithmétique.

Solution 3

Pour montrer que $a^2 - bc$, $b^2 - ac$ et $c^2 - ab$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, on peut démontrer que $(c^2 - ab) + (a^2 - bc) = 2(b^2 - ac)$.

Puisque a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, $a + c = 2b$.

Or :

$$\begin{aligned}
(c^2 - ab) + (a^2 - bc) &= c^2 + a^2 - b(a + c) \\
&= c^2 + a^2 + 2ac - b(a + c) - 2ac \\
&= (c + a)^2 - b(a + c) - 2ac \\
&= (c + a)(a + c - b) - 2ac \\
&= 2b(2b - b) - 2ac \\
&= 2b^2 - 2ac \\
&= 2(b^2 - ac)
\end{aligned}$$

Donc, $a^2 - bc$, $b^2 - ac$ et $c^2 - ab$ forment une suite arithmétique.

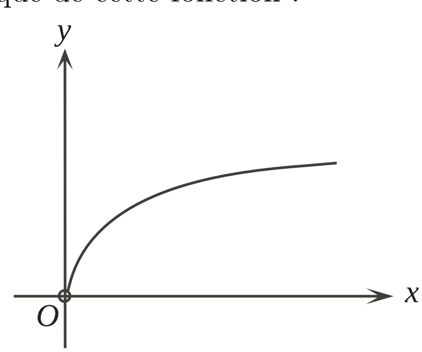
8. (a) On transforme l'équation, avec les lois des logarithmes, de manière à pouvoir isoler y :

$$\begin{aligned}
\log_2 x - 2\log_2 y &= 2 \\
\log_2 x - \log_2(y^2) &= 2 \\
\log_2\left(\frac{x}{y^2}\right) &= 2 \\
\frac{x}{y^2} &= 2^2 \\
\tfrac{1}{4}x &= y^2 \\
y &= \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{x}
\end{aligned}$$

Puisque le domaine de la fonction $\log_2$ est l'ensemble des réels strictement positifs, on doit avoit $x > 0$ et $y > 0$. On a donc :

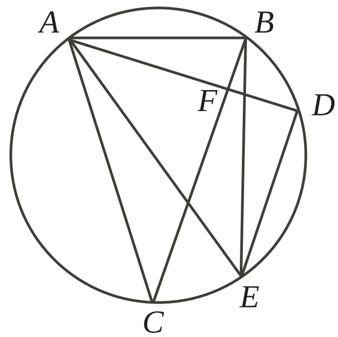
$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{x} \quad (x > 0)$$

Voici une esquisse du graphique de cette fonction :



(b) *Solution 1*

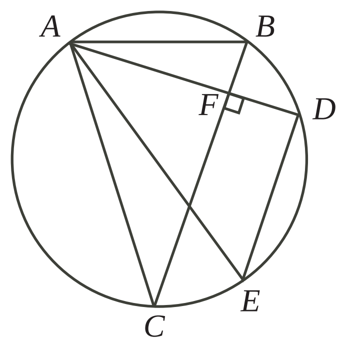
On trace les segments AE et AC.



Puisque DE est parallèle à BC et que AD est perpendiculaire à BC, alors AD est perpendiculaire à DE, c'est-à-dire que $\angle ADE = 90°$.
Donc, AE est un diamètre.
Or, les angles EAC et EBC sont congrus, puisqu'ils interceptent le même arc EC.
Donc $\angle EAC + \angle ABC = \angle EBC + \angle ABC = \angle EBA$. Ce dernier angle mesure 90°, puisque AE est un diamètre.

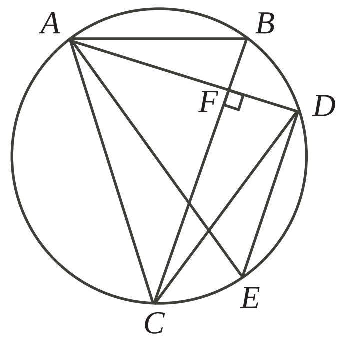
Solution 2

On trace les segments AE et AC.



Puisque DE est parallèle à BC et que AD est perpendiculaire à BC, alors AD est perpendiculaire à DE, c'est-à-dire que $\angle ADE = 90°$.
Donc, AE est un diamètre.
Donc $\angle ECA = 90°$.
Or, les angles ABC et AEC sont congrus, puisqu'ils interceptent le même arc AC.
Donc $\angle EAC + \angle ABC = \angle EAC + \angle AEC = 180° - \angle ECA$, d'après la somme de la mesure des angles du triangle AEC.
Puisque $\angle ECA = 90°$, alors $\angle EAC + \angle AEC = 90°$.

Solution 3
On trace les segments AE, AC et CD.



Puisque DE est parallèle à BC et que AD est perpendiculaire à BC, alors AD est perpendiculaire à DE, c'est-à-dire que $\angle ADE = 90°$.
Donc, AE est un diamètre.
Or, les angles ABC et ADC sont congrus, puisqu'ils interceptent le même arc AC.
De plus, les angles EAC et EDC sont congrus, puisqu'ils interceptent le même arc EC.
Donc $\angle EAC + \angle ABC = \angle EDC + \angle ADC = \angle ADE = 90°$.

9. (a) *Solution 1*
Puisque $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, alors $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^6 x + (1 - \sin^2 x)^3 + k(\sin^4 x + (1 - \sin^2 x)^2) \\ &= \sin^6 x + 1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x + k(\sin^4 x + 1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) \\ &= (1 + k) - (3 + 2k)\sin^2 x + (3 + 2k)\sin^4 x \end{aligned}$$

Si $3 + 2k = 0$, c'est-à-dire si $k = -\frac{3}{2}$, alors $f(x) = 1 + k$, ou $f(x) = -\frac{1}{2}$ pour toutes les valeurs de x. Si $k = -\frac{3}{2}$, la fonction est donc constante pour toutes les valeurs de x.
(Si $k \neq -\frac{3}{2}$, on a :

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 + k \\ f\left(\tfrac{1}{4}\pi\right) &= (1 + k) - (3 + 2k)\left(\tfrac{1}{2}\right) + (3 + 2k)\left(\tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}k \\ f\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) &= (1 + k) - (3 + 2k)\left(\tfrac{1}{4}\right) + (3 + 2k)\left(\tfrac{1}{16}\right) = \tfrac{7}{16} + \tfrac{5}{8}k \end{aligned}$$

Ces trois valeurs ne peuvent être égales pour une même valeur de k. Donc, $f(x)$ n'est pas constante si $k \neq -\frac{3}{2}$.)

Solution 2
Puisque $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) + k(\sin^4 x + \cos^4 x) \\ &= (\sin^4 + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x - 3\sin^2 x\cos^2 x) \\ &\qquad k(\sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x - 2\sin^2 x\cos^2 x) \\ &= ((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x) + k((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x) \\ &= 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x + k(1 - 2\sin^2 x\cos^2 x) \\ &= (1 + k) - (3 + 2k)\sin^2 x\cos^2 x \end{aligned}$$

Si $3 + 2k = 0$, c'est-à-dire si $k = -\frac{3}{2}$, alors $f(x) = 1 + k$, ou $f(x) = -\frac{1}{2}$ pour toutes les valeurs de x. Si $k = -\frac{3}{2}$, la fonction est donc constante pour toutes les valeurs de x. (On peut vérifier, comme dans la Solution 1, que si $k \neq -\frac{3}{2}$, $f(x)$ n'est pas constante.)

Solution 3
Pour que $f(x)$ soit constante, il faut que $f'(x) = 0$ pour toutes les valeurs de x.
Par dérivation en chaîne, on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6\sin^5 x\cos x - 6\cos^5 x\sin x + k(4\sin^3 x\cos x - 4\cos^3 x\sin x) \\ &= 2\sin x\cos x(3(\sin^4 x - \cos^4 x) + 2k(\sin^2 x - \cos^2 x)) \\ &= 2\sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x)(3(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2k) \\ &= 2\sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x)(3 + 2k) \end{aligned}$$

Si $3 + 2k = 0$, c'est-à-dire si $k = -\frac{3}{2}$, alors $f'(x) = 0$ pour toutes les valeurs de x. La fonction est alors constante pour toutes les valeurs de x.
(Si $3 + 2k \neq 0$, on peut choisir $x = \frac{1}{6}\pi$, par exemple, pour montrer que $f'(\frac{1}{6}\pi) \neq 0$ et que $f(x)$ n'est pas constante.)

(b) *Solution 1*
On utilise l'expression simplifiée de $f(x)$ de la partie (a), Solution 1 :

$$f(x) = (1 + k) - (3 + 2k)\sin^2 x + (3 + 2k)\sin^4 x$$

On veut donc résoudre :

$$\begin{aligned} 0{,}3 - (1{,}6)\sin^2 x + (1{,}6)\sin^4 x &= 0 \\ 16\sin^4 x - 16\sin^2 x + 3 &= 0 \\ (4\sin^2 x - 3)(4\sin^2 x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Donc. $\sin^2 x = \frac{1}{4}$ ou $\sin^2 x = \frac{3}{4}$. Donc $\sin x = \pm\frac{1}{2}$ ou $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Donc :

$$x = \tfrac{1}{6}\pi + 2\pi k, \tfrac{5}{6}\pi + 2\pi k, \tfrac{7}{6}\pi + 2\pi k, \tfrac{11}{6}\pi + 2\pi k, \tfrac{1}{3}\pi + 2\pi k, \tfrac{2}{3}\pi + 2\pi k, \tfrac{4}{3}\pi + 2\pi k, \tfrac{5}{3}\pi + 2\pi k$$

$(k \in \mathbb{Z})$

Solution 2
On utilise l'expression simplifiée de $f(x)$ de la partie (a), Solution 2 :

$$f(x) = (1 + k) - (3 + 2k)\sin^2 x\cos^2 x$$

On veut donc résoudre :

$$\begin{aligned} 0{,}3 - (1{,}6)\sin^2 x\cos^2 x &= 0 \\ 0{,}3 - (1{,}6)\sin^2 x(1 - \sin^2 x) &= 0 \\ 1{,}6\sin^4 x - 1{,}6\sin^2 x + 0{,}3 &= 0 \end{aligned}$$

On continue comme dans la Solution 1.

Solution 3
On utilise l'expression simplifiée de $f(x)$ de la partie (a), Solution 2 :

$$f(x) = (1 + k) - (3 + 2k)\sin^2 x\cos^2 x$$

On utilise l'identité $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ pour simplifier $f(x)$ davantage :

$$f(x) = (1+k) - \tfrac{1}{4}(3+2k)\sin^2 2x$$

On veut donc résoudre :

$$\begin{aligned} 0{,}3 - \tfrac{1}{4}(1{,}6)\sin^2 2x &= 0 \\ 4\sin^2 2x &= 3 \\ \sin^2 2x &= \tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

Donc $\sin 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Donc :

$$2x = \tfrac{1}{3}\pi + 2\pi k, \tfrac{2}{3}\pi + 2\pi k, \tfrac{4}{3}\pi + 2\pi k, \tfrac{5}{3}\pi + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ou

$$x = \tfrac{1}{6}\pi + \pi k, \tfrac{1}{3}\pi + \pi k, \tfrac{2}{3}\pi + \pi k, \tfrac{5}{6}\pi + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(Bien qu'elle paraisse différente, cette solution est conforme à la Solution 1, puisque chacune des quatre familles de racines comporte « $+\pi k$ » et dans la Solution 1, chacune des huit familles de racines comporte « $+2\pi k$ ».)

(c) *Solution 1*
On utilise l'expression simplifiée de $f(x)$ de la partie (a), Solution 2 :

$$f(x) = (1+k) - (3+2k)\sin^2 x + (3+2k)\sin^4 x$$

On veut déterminer les valeurs de k de manière qu'il existe un nombre réel c pour lequel $f(c) = 0$. (De la partie (a), il n'existe pas un nombre réel c pour lequel $f(c) = 0$ si $k = -\frac{3}{2}$.)
Soit $u = \sin^2 x$.
Alors u prend toutes les valeurs dans l'intervalle de 0 à 1, car $\sin x$ prend toutes les valeurs dans l'intervalle de -1 à 1.
On cherche les valeurs de k pour lesquelles l'équation

$$(3+2k)u^2 - (3+2k)u + (1+k) = 0 \qquad (*)$$

admet une racine dans l'intervalle $0 \le u \le 1$.
On doit d'abord s'assurer que l'équation (*) admet des racines réelles, c'est-à-dire que :

$$\begin{aligned} (3+2k)^2 - 4(3+2k)(1+k) &\ge 0 \\ (3+2k)(3+2k-4(1+k)) &\ge 0 \\ (3+2k)(-1-2k) &\ge 0 \\ (3+2k)(1+2k) &\le 0 \end{aligned}$$

Cette condition est vérifiée dans l'intervalle $-\frac{3}{2} < k \le -\frac{1}{2}$ (puisque $k \ne -\frac{3}{2}$).
Ensuite, on détermine les valeurs de k pour lesquelles l'équation (*) admet des racines dans l'intervalle $0 \le u \le 1$. On peut supposer que $-\frac{3}{2} < k \le -\frac{1}{2}$.
On résout l'équation (*) à l'aide de la formule pour une équation du second degré :

$$u = \frac{(3+2k) \pm \sqrt{(3+2k)^2 - 4(3+2k)(1+k)}}{2(3+2k)}$$

ou

$$u = \frac{(3+2k) \pm \sqrt{-(3+2k)(1+2k)}}{2(3+2k)} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1+2k}{3+2k}}$$

Puisque $k > -\frac{3}{2}$, alors $3+2k > 0$.
Pour que u soit dans l'intervalle de 0 à 1, il faut que :

$$0 \leq \sqrt{-\frac{1+2k}{3+2k}} \leq 1$$

ou

$$0 \leq -\frac{1+2k}{3+2k} \leq 1$$

Puisque $-\frac{3}{2} < k \leq -\frac{1}{2}$, alors $3+2k > 0$ et $1+2k \leq 0$. Donc, l'inéquation de gauche est vérifiée.
On résout $-\dfrac{1+2k}{3+2k} \leq 1$, ou $-(1+2k) \leq (3+2k)$ (on peut multiplier chaque membre par $(3+2k)$, car l'expression ne prend aucune valeur négative). On obtient $-4 \leq 4k$, ou $k \geq -1$. Donc, l'inéquation de droite est vérifiée si $k \geq -1$ et $-\frac{3}{2} < k \leq -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire si $-1 \leq k \leq -\frac{1}{2}$.

Solution 2
On utilise l'expression simplifiée de $f(x)$ de la partie (b), Solution 3 :

$$f(x) = (1+k) - \tfrac{1}{4}(3+2k)\sin^2 2x$$

Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, il faut résoudre :

$$(1+k) - \tfrac{1}{4}(3+2k)\sin^2 2x = 0$$

ou

$$\sin^2 2x = \frac{4(1+k)}{3+2k}$$

Cette équation admet des racines réelles (des valeurs de $\sin 2x$, puis des valeurs de x), si :

$$0 \leq \frac{4(1+k)}{3+2k} \leq 1$$

Si $3+2k > 0$, on peut multiplier les membres de l'inéquation par $3+2k$ pour obtenir :

$$0 \leq 4(1+k) \leq 3+2k$$

L'inéquation de gauche donne $k \geq -1$ et celle de droite donne $k \leq -\frac{1}{2}$.
On obtient $-1 \leq k \leq -\frac{1}{2}$.

Si $3+2k < 0$, on peut multiplier les membres de l'inéquation par $3+2k$ pour obtenir :

$$0 \geq 4(1+k) \geq 3+2k$$

L'inéquation de gauche donne $k \leq -1$ et celle de droite donne $k \geq -\frac{1}{2}$. Ceci est impossible.
Si $3+2k = 0$, on a vu dans la partie (a) que $f(x)$ est constante et pas égal à 0.

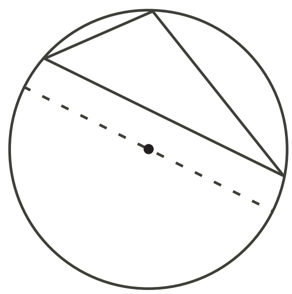
Alors, $-1 \leq k \leq -\frac{1}{2}$.

10. Partout, dans ce qui suit, on utilisera les propriétés suivantes :

Lorsqu'un triangle acutangle est inscrit dans un cercle : le centre du cercle est situé à l'intérieur du triangle ; chaque côté du triangle définit un grand arc dans lequel est inscrit l'angle opposé au côté ; les sommets du triangle divisent le cercle en trois arcs qui sont chacun moins d'un demi-cercle.

Comment le sait-on ?

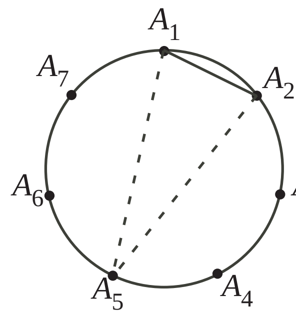
On considère une corde qui n'est pas un diamètre. Un angle qui intercepte la corde et qui est inscrit dans le grand arc est aigu ; un angle qui intercepte la corde et qui est inscrit dans le petit arc est obtus.
On considère maintenant un triangle acutangle inscrit dans le cercle. Puisque chaque angle du triangle est aigu, chacun est inscrit dans le grand arc défini par le côté opposé. De même, un arc de cercle délimité par deux sommets consécutifs doit être un petit arc, puisqu'il est intercepté par un angle aigu.
Si le centre du cercle était à l'extérieur du triangle, on pourrait tracer un diamètre complètement à l'extérieur du triangle.



Un des angles aigus du triangle intercepterait alors une corde, tout en étant inscrit dans le petit arc défini par la corde, ce qui contredit la premier énoncé ci-haut.
Le centre du cercle est donc situé à l'intérieur du triangle.

(a) Puisque $N = 7$, on peut choisir les 3 sommets d'un triangle parmi 7 points. On peut le faire de $\binom{7}{3}$ façons, c'est-à-dire de 35 façons. On peut donc former 35 triangles. On détermine le nombre de ces triangles qui sont acutangles.

Soit A_1 le premier sommet d'un triangle.
On construit le triangle en choisissant les deux autres sommets dans le sens des aiguilles d'une montre dans la figure qui suit.
On choisit ces sommets en tenant compte de la longueur de l'arc depuis le sommet précédent — chacun de ces arcs doit être plus petit qu'un demi-cercle.
Puisqu'il y a 7 points placés à intervalles réguliers, on suppose que la circonférence a une longueur de 7. Chaque arc délimité par deux sommets consécutifs doit avoir une longueur de 3 ou moins.
Le deuxième sommet peut donc être A_2, A_3 ou A_4.
Si on choisit A_2, le troisième sommet doit être A_5 pour que les deux autres arcs aient une longueur de 3 ou moins. (La figure suivante le montre bien.)



Si on choisit A_3, le troisième sommet doit être A_5 ou A_6.
Si on choisit A_4, le troisième sommet doit être A_5, A_6 ou A_7.
On peut donc former 6 triangles acutangles qui ont A_1 pour premier sommet.

On peut recommencer en choisissant chacun des 6 autres points comme premier sommet, pour un total de 7×6 triangles acutangles, c'est-à-dire 42 triangles acutangles.
Or, chaque triangle a alors été compté 3 fois, car chacun de ses sommets aura été choisi comme premier sommet. Le nombre total de triangles acutangles possibles est égal à $\frac{42}{3}$, ou 14.
La probabilité de choisir un triangle acutangle est donc égale à $\frac{14}{35}$, ou $\frac{2}{5}$.

(b) *Solution 1*
Puisque $N = 2k$, on peut choisir les 3 sommets d'un triangle parmi $2k$ points. On peut donc choisir $\binom{2k}{3}$ triangles, c'est-à-dire $\dfrac{2k(2k-1)(2k-2)}{6}$ triangles en tout.
On détermine le nombre de triangles acutangles comme dans la partie (a), en déterminant le nombre de triangles acutangles qui ont un premier sommet en A_1, en multipliant ce nombre par $2k$, puis en divisant par 3.

Soit A_1 le 1^{er} sommet d'un triangle et soit $2k$ la circonférence du cercle.
Le point A_{k+1} est diamétralement opposé à A_1.
Puisque le triangle ne peut être situé d'un côté d'un diamètre, le 2^{e} sommet doit être choisi parmi les points $A_2, A_3, \ldots, A_k$. Le 3^{e} sommet doit être choisi parmi les points A_{k+2}, A_{k+3}, $\ldots$, A_{2k}, de manière que les trois arcs soient moins longs qu'un demi-cercle.
Si le 2^{e} sommet est A_2, peu importe le point choisi pour le 3^{e} sommet, un des arcs, soit de A_2 au 3^{e} sommet ou du 3^{e} sommet à A_1, aura une longueur plus grande que k. Il n'y a donc aucune possibilité pour un 3^{e} sommet d'un triangle acutangle.
Si le 2^{e} sommet est A_3, le 3^{e} sommet doit être A_{k+2}. En effet, l'arc entre les 2^{e} et 3^{e} sommets a alors une longueur de $k-1$, de même que l'arc entre les 3^{e} et 1^{er} sommets. Il y a donc une possibilité pour le 3^{e} sommet.
Si le 2^{e} sommet est A_4, le 3^{e} sommet doit être A_{k+2} ou A_{k+3}. En effet, si le 3^{e} sommet est A_{k+2}, l'arc entre les 2^{e} et 3^{e} sommets a une longueur de $k-2$ et l'arc entre les 3^{e} et 1^{er} sommets a une longueur de $k-1$. Si le 3^{e} sommet est A_{k+3}, l'arc entre les 2^{e} et 3^{e} sommets a une longueur de $k-1$ et l'arc entre les 3^{e} et 1^{er} sommets a une longueur de $k-2$. Si le 3^{e} sommet est un autre point, un des deux arcs sera plus long que $k-1$.
De façon générale, si le 2^{e} sommet est A_i $(3 \leq i \leq k)$ et le 3^{e} sommet est A_j, la longueur d'arc de A_i à A_j et la longueur d'arc de A_j à A_1 doivent être inférieures à k. Donc $j - i < k$ et $(2k+1) - j < k$, d'où $j < i + k$ et $k + 1 < j$, ou $k + 1 < j < k + i$. Le nombre de possibilités pour j est égal à $(k + i - 1) - (k + 1)$, ou $i - 2$.
À mesure que i avance de 3 à k, les valeurs de $i - 2$ avancent de 1 à $k - 2$, ce qui donne

un total de $1+2+\cdots+(k-2)$ triangles acutangles, c'est-à-dire $\frac{1}{2}(k-2)(k-1)$ triangles acutangles dont le premier sommet est A_1.
En tout, il y a $\frac{1}{3}(2k)\times\frac{1}{2}(k-2)(k-1)$ triangles acutangles, c'est-à-dire $\frac{1}{6}(2k)(k-2)(k-1)$ triangles acutangles.

La probabilité pour que le triangle soit acutangle est donc égale à $\dfrac{\frac{1}{6}(2k)(k-2)(k-1)}{\frac{1}{6}(2k)(2k-1)(2k-2)}$, ou $\dfrac{k-2}{4k-2}$.

Solution 2
Comme dans la Solution 1, si $N=2k$, il y a $\binom{2k}{3}$ triangles en tout.
On détermine le nombre de triangles acutangles qui ont un sommet en A_1.
Soit $2k$ la circonférence du cercle.
Les sommets de n'importe quel triangle divisent la circonférence en trois longueurs, soit a, b et c, à partir de A_1 en procédant dans le sens des aiguilles d'une montre.
On veut compter le nombre de triangles acutangles formés de cette manière, puis multiplier ce nombre par $\dfrac{2k}{3}$, comme dans la Solution 1, pour obtenir le nombre total de triangles acutangles.
On cherche les solutions de l'équation $a+b+c=2k$ $(a,b,c\geq 1)$. (Ces solutions correspondent à des partitions du cercle.) Puisqu'on cherche des triangles acutangles, on doit aussi avoir $a,b,c<k$ (ceci a été établi dans le préambule). Chaque solution de l'équation correspond à un triangle particulier et vice-versa.

Il faut donc établir le nombre de solutions de l'équation $a+b+c=2k$, $(1\leq a,b,c<k)$.
On considère la transformation définie par $a'=k-a$, $b'=k-b$ et $c'=k-c$.
Puisque $a,b,c<k$, alors $a',b',c'>0$.
De plus, $a+b+c=2k$ si et seulement si $3k-(a+b+c)=k$ si et seulement si $(k-a)+(k-b)+(k-c)=k$ si et seulement si $a'+b'+c'=k$.
La transformation établit donc une correspondance biunivoque entre les triangles acutangles que l'on cherche et *tous* les triangles dont les sommets sont choisis parmi k points et dont un sommet est A_1. (Puisque la transformation peut être renversée, il s'agit d'une correspondance biunivoque, c'est-à-dire d'une bijection.)

Le nombre total de tels triangles est égal à $\binom{k-1}{2}$, puisqu'on choisit 2 sommets parmi $k-1$ points.
Donc, le nombre total de triangles acutangles ayant un sommet au point A_1 est égal à $\binom{k-1}{2}$. Le nombre total de triangles acutangles est donc égal à $\dfrac{2k}{3}\binom{k-1}{2}$, c'est-à-dire à $\dfrac{2k}{3}\dfrac{(k-1)(k-2)}{2}$, ou $\dfrac{k(k-1)(k-2)}{3}$. Pour obtenir la probabilité, on divise par $\binom{2k}{3}$.
On obtient $\dfrac{6}{(2k)(2k-1)(2k-2)}\dfrac{k(k-1)(k-2)}{3}$, ou $\dfrac{k-2}{4k-2}$.

(c) D'après (b), la probabilité est égale à $\dfrac{k-2}{4k-2}$.

On cherche les valeurs de k pour lesquelles $\dfrac{k-2}{4k-2}=\dfrac{a}{2007}$, a étant un entier strictement positif.

On utilise le produit en croix pour obtenir $2007(k-2) = a(4k-2)$.
Puisque le membre de droite est pair, le membre de gauche doit être pair. Donc $k-2$ est pair, d'où k est pair. Posons $k = 2m$, m étant un entier positif, $m \geq 1$.
Donc $2007(2m-2) = a(8m-2)$, ou $2007(m-1) = a(4m-1)$.
Puisque

$$(4m-1) - 4(m-1) = 3 \qquad (*)$$

les diviseurs communs possibles de $4m-1$ et de $m-1$ sont 1 et 3 (puisqu'un diviseur commun de $4m-1$ et de $m-1$ doit aussi être un diviseur de 3 selon (*)).
On a donc PGCD($4m-1$,$m-1$) = 1, ou PGCD($4m-1$,$m-1$) = 3.

Si PGCD($4m-1$,$m-1$) = 1 alors $4m-1$ et $m-1$ n'admettent aucun diviseur commun autre que 1. Puisque $2007(m-1) = a(4m-1)$, alors $4m-1$ est un diviseur de $2007(m-1)$ et $4m-1$ est donc un diviseur de 2007, puisque $4m-1$ et $m-1$ n'admettent aucun diviseur commun.
Or $2007 = 9 \times 223 = 3^2 \times 223$. Les diviseurs positifs de 2007 sont donc 1, 3, 9, 223, 669 et 2007.
Les diviseurs de la forme $4m-1$, m étant un entier positif quelconque, sont 3, 233 et 2007.
On a donc :

$4m-1$	3	233	2007
m	1	56	502
a	0	495	2004
k		112	1004

(Si $m = 1$, alors $a = 0$, ce qui est inadmissible. Il n'y a alors aucune valeur de k.)

Si PGCD($4m-1$,$m-1$) = 3, alors $m-1$ est divisible par 3.
Donc $m-1 = 3p$, p étant un entier non négatif.
Donc $4m-1 = 12p+3$ et l'équation $2007(m-1) = a(4m-1)$ devient $2007(3p) = a(12p+3)$, ou $2007p = a(4p+1)$.
Remarquer que PGCD($4p+1$,p) = 1, puisque PGCD($12p+3, 3p$) = 3.
Puisque $4p+1$ est un diviseur de $2007p$ et que $4p+1$ et p n'admettent aucun diviseur commun, alors $4p+1$ est un diviseur de 2007.
Les diviseurs de 2007 de la forme $4p+1$ sont 1, 9 et 669. On a donc :

$4p+1$	1	9	669
p	0	2	167
m	1	7	502
a	0	446	501
k		14	1004

(Si $m = 1$, alors $a = 0$, ce qui est inadmissible. Il n'y a alors aucune valeur de k.)

Donc, les valeurs possibles de k sont 14, 112 et 1004.