Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide

le mercredi 19 avril 2006

Avec la contribution de: University of Waterloo; Samson Bélair Deloitte & Touche Comptables agréés; London Life et La Great-West, compagnies d'assurance-vie; Sybase; iAnywhere Solutions

Avec la participation de: Institut canadien des actuaires; Maplesoft

Durée : 2 heures et demie

©2006 Waterloo Mathematics Foundation

L'utilisation de la calculatrice est permise, pourvu que celle-ci ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions valant 10 points chacune. Les parties de chaque question peuvent être de deux types. Les parties à **RÉPONSE COURTE** valent 2 points chacune (questions 1 et 2) ou 3 points chacune (questions 3 à 7). Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points pour la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci: .
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera accordée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT

1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci: .
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Soyez prudent en inscrivant votre nom sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont accordés pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

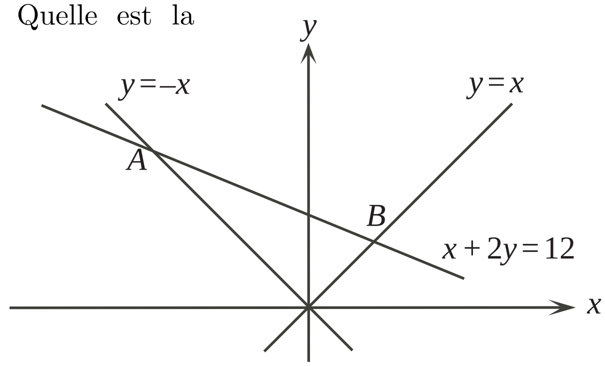
REMARQUES

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Si une réponse est incorrect, une partie des points peut être accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. Sauf avec indication contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de valeurs exactes, telles que 4π, $2+\sqrt{7}$, etc.

1. (a) Quelle est la somme de l'abscisse à l'origine et de l'ordonnée à l'origine de la droite définie par $3x-3y=24$?

   (b) Les droites d'équations $px=12$ et $2x+qy=10$ se coupent au point (1,1). Quelle est la valeur de $p+q$?

   (c) Dans la figure, la droite d'équation $x+2y=12$ coupe les droites d'équations $y=-x$ et $y=x$ aux points respectifs A et B. Quelle est la longueur du segment AB ?



2. (a) Les chiffres du nombre entier 46 ont une moyenne de 5. Combien y a-t-il d'entiers positifs de deux chiffres, y compris le nombre 46, dont les chiffres ont une moyenne de 5 ?

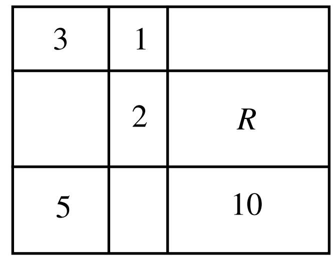
   (b) Le nombre n est un entier positif de deux chiffres. Lorsqu'on place une virgule décimale entre les chiffres de n, le nombre qui en résulte est égal à la moyenne des chiffres de n. Quelle est la valeur de n ?

   (c) Trois entiers positifs ont une moyenne de 28. Lorsqu'on ajoute deux entiers, s et t, à ces nombres, la moyenne des cinq entiers est égale à 34. Quelle est la moyenne de s et de t ?

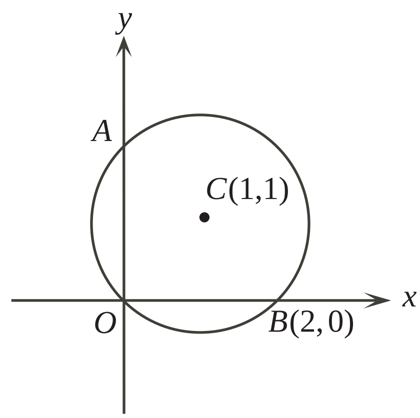
3. (a) Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole d'équation $y=(x-20)(x-22)$.

   (b) Soit O l'origine, A le sommet de la parabole d'équation $y=x^2+2$ et B le sommet de la parabole d'équation $y=x^2-6x+7$. Déterminer l'aire du triangle OAB.

4. (a) Le grand rectangle ci-contre a été divisé en neuf petits rectangles. L'aire de cinq de ces petits rectangles est indiquée. Déterminer l'aire du rectangle indiqué par la lettre R.



(b) Dans la figure ci-contre, le cercle de centre $C(1,1)$ passe au point $O(0,0)$. Le cercle coupe l'axe des ordonnées en A et l'axe des abscisses en $B(2,0)$. Déterminer les coordonnés de A, ainsi que l'aire de la partie du cercle qui se trouve dans le quadrant I. Justifier son travail.



5. (a) Si a est choisi au hasard dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ et si b est choisi au hasard dans l'ensemble $\{6, 7, 8\}$, quelle est la probabilité pour que a^b soit un nombre pair ?

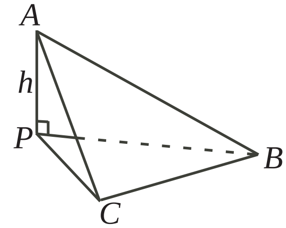
(b) Dans un sac, il y a des chapeaux bleus et des chapeaux verts. À chaque tour, Julie enlève un chapeau du sac, sans regarder, chaque chapeau du sac ayant la même chance d'être choisi. Si le chapeau choisi est vert, elle prend un chapeau bleu de sa réserve de chapeaux et l'ajoute au sac. Si le chapeau choisi est bleu, elle prend un chapeau vert de sa réserve et l'ajoute au sac. Au départ, le sac contient 4 chapeaux bleus et 2 chapeaux verts. Quelle est la probabilité pour qu'après deux tours, le sac contienne de nouveau 4 chapeaux bleus et 2 chapeaux verts ?

6. (a) Pour les mesures d'angles x et y, on a :

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 y &= \tfrac{3}{2}a \\ \cos^2 x + \sin^2 y &= \tfrac{1}{2}a^2 \end{aligned}$$

Déterminer les valeurs possibles de a.

(b) Des survivants, sur une île déserte, ont trouvé une planche de contreplaqué (ABC) de la forme d'un triangle équilatéral avec des côtés de 2 m. Pour protéger leur chèvre du soleil, ils placent le côté BC sur le sol, soulèvent le coin A et le soutiennent au moyen d'un poteau vertical PA de longueur h m. Lorsque le soleil est directement au-dessus de leurs têtes, l'ombre de la planche est un triangle isocèle PBC dont le plus grand angle, soit l'angle BPC, mesure 120°. Déterminer la valeur de h au centimètre près.

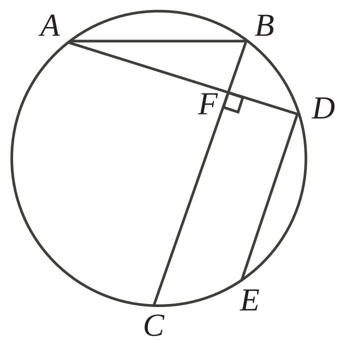


7. (a) La suite $2, 5, 10, 50, 500, \ldots$ est formée de manière que chaque terme, après le deuxième, est égal au produit des deux termes précédents. Le 15^{e} terme se termine avec exactement k zéros. Quelle est la valeur de k ?

(b) Soit a, b, c trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Démontrer que $a^2 - bc$, $b^2 - ac$ et $c^2 - ab$ sont aussi trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.
(Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en additionnant une constante au terme précédent. Par exemple, 3, 5, 7 est une suite arithmétique de trois termes.)

8. (a) Soit $\log_2 x - 2\log_2 y = 2$. Exprimer y en fonction de x et esquisser la courbe représentative de cette équation dans le plan indiqué par les axes dans le cahier-réponse.

(b) Dans la figure ci-contre, AB et BC sont des cordes du cercle de manière que $AB < BC$. D est le point du cercle pour lequel AD est perpendiculaire à BC et E est le point du cercle pour lequel DE est parallèle à BC. Démontrer avec soin que $\angle EAC + \angle ABC = 90°$, tout en justifiant chaque étape.



9. On définit $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + k\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)$, k étant un nombre réel quelconque.

(a) Déterminer tous les nombres réels k de manière que $f(x)$ soit constante pour toutes les valeurs de x.

(b) Soit $k = -0{,}7$. Déterminer toutes les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

(c) Déterminer tous les nombres réels k de manière qu'il existe un nombre réel c tel que $f(c) = 0$.

10. Les points A_1, A_2, …, A_N sont placés à intervalles réguliers sur un cercle et $N \geq 3$. On choisit trois de ces points au hasard et on les utilise comme sommets pour former un triangle.

(a) Soit $N = 7$. Quelle est la probabilité pour que le triangle soit acutangle ? (Un triangle est acutangle si chacun de ses angles mesure moins de 90°.)

(b) Soit $N = 2k$, k étant un entier positif tel que $k \geq 2$. Déterminer la probabilité pour que le triangle soit acutangle.

(c) Soit $N = 2k$, k étant un entier positif tel que $k \geq 2$. Déterminer toutes les valeurs possibles de k de manière que la probabilité pour que le triangle soit acutangle puisse être exprimée sous la forme $\dfrac{a}{2007}$, a étant un entier strictement positif.

Concours canadien de mathématiques

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2006!
En 2005, plus de 15 600 élèves à travers le monde se sont inscrits au concours Euclide.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bonne chance.
Si vous retournerez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Défi ouvert canadien de mathématiques qui aura lieu fin novembre.

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- plus d'information à propos du Défi ouvert canadien de mathématiques
- des copies gratuites des concours précédents
- des ateliers pour vous aider à vous préparer aux concours futurs
- de l'information au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours
- de l'information concernant les carrières en mathématiques

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- obtenir des renseignements concernant les concours de 2006/2007
- vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles aux enseignants
- trouver les résultats de votre école