Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Cayley 2006

(10^{e} année ou Secondaire IV)

le mercredi 22 février 2006

Solutions

1. On a : $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Réponse : (E)

2. On a : $(\sqrt{100}-\sqrt{36})^2=(10-6)^2=4^2=16$

Réponse : (A)

3. On effectue d'abord les soustractions :

$$43-41+39-37+35-33+31-29=2+2+2+2=8$$

Réponse : (A)

4. Puisque $a=-3$ et $b=2$, alors $a(b-3)=(-3)(2-3)$, ce qui est égal à $(-3)(-1)$, ou 3.

Réponse : (C)

5. Pour connaître le nombre par lequel on multiplie le 1$^{\text{er}}$ terme pour obtenir le 2$^{\text{e}}$, on divise le 2$^{\text{e}}$ terme par le 1$^{\text{er}}$. On obtient $0{,}02\div 0{,}001=20$. (On peut vérifier que 20 fois le 2$^{\text{e}}$ terme est égal au 3$^{\text{e}}$ terme.) Le 4$^{\text{e}}$ terme est donc égal à $20(0{,}4)$, ou 8.

Réponse : (B)

6. La base BC du triangle ABC a une longueur de 20.
Puisque le triangle ABC a une aire de 240, alors $\frac{1}{2}bh=240$, c'est-à-dire que $\frac{1}{2}(20)h=240$, d'où $10h=240$, ou $h=24$. Donc, le point A a une ordonnée de 24.

Réponse : (D)

7. *Solution 1*
La fraction $\frac{3}{2}$ est égale à $\frac{6}{4}$. L'équation devient $\dfrac{6}{x+1}=\dfrac{6}{4}$.
Puisque les numérateurs sont égaux, les dénominateurs sont égaux. Donc $x+1=4$, d'où $x=3$.

Solution 2
On a $\dfrac{6}{x+1}=\dfrac{3}{2}$. Le produit en croix donne $2(6)=3(x+1)$, ou $12=3x+3$, d'où $x=3$.

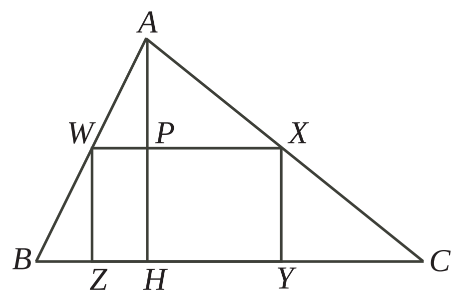
Solution 3
Si on inverse les deux membres de l'équation, l'égalité est conservée. Donc $\dfrac{x+1}{6}=\dfrac{2}{3}$, d'où $x+1=6\times\frac{2}{3}$. Donc $x=3$.

Réponse : (C)

8. *Solution 1*
Puisque $WXYZ$ est un rectangle, alors $\angle ZWX=\angle WXY=90^\circ$.
Donc $\angle AWX=180^\circ-\angle ZWX-\angle BWZ$, c.-à-d. que $\angle AWX=180^\circ-90^\circ-22^\circ$, ou $\angle AWX=68^\circ$. De même, $\angle AXW=180^\circ-\angle WXY-\angle CXY$, c.-à-d. que $\angle AXW=180^\circ-90^\circ-65^\circ$, ou $\angle AXW=25^\circ$.
Dans le triangle AWX, $\angle BAC=180^\circ-\angle AWX-\angle AXW$, ou $\angle BAC=180^\circ-68^\circ-25^\circ$.
Donc $\angle BAC=87^\circ$.

Solution 2
Puisque $WXYZ$ est un rectangle, les angles WZY et XYZ sont droits et les triangles WZB et XYC sont rectangles. Donc $\angle WBZ = 90° - \angle BWZ$, c.-à-d. que $\angle WBZ = 90° - 22°$, ou $\angle WBZ = 68°$.
De même, $\angle XCY = 90° - \angle CXY$, c.-à-d. que $\angle XCY = 90° - 65°$, ou $\angle XCY = 25°$.
Dans le triangle ABC, $\angle BAC = 180° - \angle ABC - \angle ACB$, c.-à-d. que $\angle BAC = 180° - 68° - 25°$, ou $\angle BAC = 87°$.

Solution 3
Au point A, on abaisse une perpendiculaire AH à BC.



Puisque WZ, AH et XY sont perpendiculaires à BC, elles sont parallèles entre elles.
Donc $\angle BAH = \angle BWZ = 22°$ et $\angle CAH = \angle CXY = \angle 65°$.
Donc $\angle BAC = 22° + 65°$, ou $\angle BAC = 87°$.

Réponse : (A)

9. Puisque le triangle a un périmètre de 36, alors $7 + (x + 4) + (2x + 1) = 36$, ou $3x + 12 = 36$. Donc $3x = 24$, ou $x = 8$.
L'expression $x + 4$ est égale à $8 + 4$, ou 12, et l'expression $2x + 1$ est égale à $2(8) + 1$, ou 17. Les côtés du triangle ont pour longueurs 7, 12 et 17. Le plus grand côté a donc une longueur de 17.

Réponse : (C)

10. Selon les renseignements donnés, la somme des notes des élèves de la classe est égale à $20(80) + 8(90) + 2(100)$, ou 2520.
La note moyenne de la classe est égale à $2520 \div 30$, ou 84.

Réponse : (B)

11. *Solution 1*
Puisque les côtés du triangle DEF sont 50 % plus longs que ceux du triangle ABC, les côtés du triangle DEF ont pour longueurs respectives $\frac{3}{2}(6)$, $\frac{3}{2}(8)$ et $\frac{3}{2}(10)$, soit 9, 12 et 15.
On sait que le triangle DEF est rectangle. L'hypoténuse est le côté le plus long. Donc, les cathètes ont pour longueurs 9 et 12.
L'aire du triangle DEF est donc égale à $\frac{1}{2}(9)(12)$, ou 54.

Solution 2
L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(6)(8)$, ou 24.
Puisqu'on multiplie la longueur des côtés du triangle ABC par $\frac{3}{2}$ pour obtenir la longueur des côtés du triangle DEF, alors l'aire du triangle DEF est égale à $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ fois l'aire du triangle ABC.
L'aire du triangle DEF est donc égale à $\left(\frac{3}{2}\right)^2(24)$, c.-à-d. à $\frac{9}{4}(24)$, ou 54.

Réponse : (E)

12. *Solution 1*
Puisque Jules conduit de 19 h 45 à 21 h 30, il conduit pendant 1 heure et 45 minutes, c'est-à-dire $1\frac{3}{4}$ heure, ou $\frac{7}{4}$ heure.
Puisqu'il parcourt 84 km en $\frac{7}{4}$ heure à une vitesse constante, sa vitesse est égale à $\dfrac{84}{\frac{7}{4}}$ km/h, c'est-à-dire à $84 \times \frac{4}{7}$ km/h, ou 48 km/h.

Solution 2
Puisque Jules conduit de 19 h 45 à 21 h 30, il conduit pendant 1 heure et 45 minutes, ce qui correspond à 7 quarts d'heure. Il parcourt 84 km en 7 quarts d'heure, ou 12 km par quart d'heure. Il parcourt donc 4×12 km, ou 48 km, en une heure. Sa vitesse est donc égale à 48 km/h.

Réponse : (E)

13. On reporte $x = 2y$ dans l'équation $x + 1 = y - 8$ pour obtenir $2y + 1 = y - 8$, d'où $y = -9$.
Donc $x = 2(-9)$, ou $x = -18$. Donc $x + y = (-9) + (-18)$, ou $x + y = -27$.

Réponse : (D)

14. On évalue chacun des choix de réponse en utilisant $x = -3$:

$$(-3)^2 - 3 = 6 \qquad (-3-3)^2 = 36 \qquad (-3)^2 = 9 \qquad (-3+3)^2 = 0 \qquad (-3)^2 + 3 = 12$$

La plus petite valeur est celle de $(x + 3)^2$.

Réponse : (D)

15. *Solution 1*
Puisque le chiffre des unités du produit $39P \times Q3$ provient du produit $P \times 3$ et que ce chiffre des unités est un 1, alors P doit être le chiffre 7.
On a donc $397 \times Q3 = 32\,951$, d'où $Q3 = 32\,951 \div 397$, ou $Q3 = 83$. Donc $Q = 8$. Donc $P + Q = 15$.

Solution 2
Puisque le chiffre des unités du produit $39P \times Q3$ provient du produit $P \times 3$ et que ce chiffre des unités est un 1, alors P doit être le chiffre 7. On a donc :

$$\begin{array}{r} 3\,9\,7 \\ \times \quad Q\,3 \\ \hline 1\,1\,9\,1 \\ \square \\ \hline 3\,2\,9\,5\,1 \end{array}$$

Or, le chiffre des unités du produit $Q \times 7$ doit être un 6 (là où est placé le $\square$) pour que le chiffre des dizaines du produit donné soit un 5. Puisque le chiffre des unités de $Q \times 7$ est un 6, alors $Q = 8$. Donc $P + Q = 15$.

Réponse : (C)

16. Soit c le coût, en cents, du téléchargement d'une chanson en 2005.
En 2004, le coût du téléchargement d'une chanson était donc de $c + 32$ cents.
Le coût total des téléchargements était donc de $360c$ cents en 2005 et de $200(c + 32)$ cents en 2004. Donc $360c = 200(c + 32)$, d'où $160c = 6400$, ou $c = 40$.
Le coût total des téléchargements de 2005 était donc de $360(40)$ cents, soit 14 400 cents, ou 144,00 \$.

RÉPONSE : (A)

17. Puisque w est strictement positif, alors $w \neq 0$. On peut donc diviser chaque membre de l'équation $w^3 = 9w$ par w (qui n'est pas nul) pour obtenir $w^2 = 9$. Puisque w est positif, alors $w = 3$.
Donc $w^5 = 3^5$, ou $w^5 = 243$.

RÉPONSE : (B)

18. Soit a, b et c les longueurs des côtés, c étant celle de l'hypoténuse.
D'après le théorème de Pythagore, $c^2 = a^2 + b^2$. Or, on sait que $a^2 + b^2 + c^2 = 1800$.
Cette équation devient donc $c^2 + c^2 = 1800$, ou $2c^2 = 1800$. Donc $c^2 = 900$, d'où $c = 30$ (car on sait que les longueurs sont positives). Donc, l'hypoténuse a une longueur de 30.

RÉPONSE : (D)

19. *Solution 1*
Au départ, 90 % des 200 bonbons sont noirs. Il y avait donc 180 bonbons noirs. Les 20 autres bonbons étaient donc rouges.
Puisque Jacob ne mange que des bonbons noirs, le nombre de bonbons rouges ne change pas.
À la fin, les 20 bonbons rouges représentent 20 % des bonbons qui restent dans la boîte. Il doit donc y avoir 100 bonbons dans la boîte.
Donc, Jacob a mangé $(200 - 100)$ bonbons noirs, soit 100 bonbons noirs.

Solution 2
Au départ, 90 % des 200 bonbons sont noirs. Il y avait donc 180 bonbons noirs.
Supposons que Jacob a mangé n bonbons noirs.
Il reste donc $200 - n$ bonbons en tout, dont $180 - n$ sont noirs.
Puisque 80 % des bonbons qui restent sont noirs, alors $\dfrac{180 - n}{200 - n} = \dfrac{4}{5}$, c'est-à-dire que $5(180 - n) = 4(200 - n)$, ou $900 - 5n = 800 - 4n$, d'où $n = 100$.
Donc, Jacob a mangé 100 bonbons noirs.

RÉPONSE : (D)

20. *Solution 1*
D'après l'équation $y = -\frac{3}{4}x + 9$, la droite a une ordonnée à l'origine de 9. Donc, Q a pour coordonnées $(0, 9)$. Pour déterminer l'abscisse à l'origine, posons $y = 0$. L'équation devient $0 = -\frac{3}{4}x + 9$, ou $\frac{3}{4}x = 9$, d'où $x = 12$. Donc, P a pour coordonnées $(12, 0)$.
Puisque le triangle POQ est rectangle en O, son aire est égale à $\frac{1}{2}(12)(9)$, ou 54.
Or, l'aire du triangle TOP doit être $\frac{1}{3}$ de celle du triangle POQ. Elle doit donc être égale à 18.
Puisque T a pour coordonnées (r, s), le triangle TOP a une base TO de longueur 12 et une hauteur de s. Donc $\frac{1}{2}(12)(s) = 18$, d'où $6s = 18$, ou $s = 3$.
Puisque T est sur la droite, alors $s = -\frac{3}{4}r + 9$, c'est-à-dire $3 = -\frac{3}{4}r + 9$, d'où $\frac{3}{4}r = 6$, ou $r = 8$.
Donc $r + s = 8 + 3$, ou $r + s = 11$.

Solution 2
L'ordonnée à l'origine de la droite d'équation $y = -\frac{3}{4}x + 9$ est égale à 9. Donc, Q a pour coordonnées $(0, 9)$.
Pour déterminer l'abscisse à l'origine, posons $y = 0$. L'équation devient $0 = -\frac{3}{4}x + 9$, ou $\frac{3}{4}x = 9$, d'où $x = 12$. Donc, P a pour coordonnées $(12, 0)$.
Puisque les triangles POQ et TOP ont la même base OP, leur aire est proportionnelle à leur hauteur. Puisque l'aire du triangle POQ est égale à 3 fois celle du triangle TOP, alors la hauteur du triangle TOP est égale à $\frac{1}{3}$ de la hauteur du triangle POQ.
Donc, T est situé à $\frac{1}{3}$ de la distance de P vers Q, le long de PQ.
Puisque P a pour coordonnées $(12, 0)$ et que Q a pour coordonnées $(0, 9)$, alors T a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}(12), \frac{1}{3}(9)\right)$, ou (8,3).
Donc $r + s = 8 + 3$, ou $r + s = 11$.

Réponse : (C)

21. *Solution 1*
On sait que $\dfrac{25}{19} = 1 + \dfrac{6}{19} = 1 + \dfrac{1}{\frac{19}{6}} = 1 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{6}}$. Si on compare cette dernière expression à $p + \dfrac{1}{q + \dfrac{1}{r}}$, on peut conclure que $p = 1$, $q = 3$ et $r = 6$.

Solution 2
Puisque p, q et r sont des entiers strictement positifs, alors $q + \dfrac{1}{r}$ est supérieur à 1. Donc $\dfrac{1}{q + \dfrac{1}{r}}$ est supérieur à 0 et inférieur à 1.
Puisque $p + \dfrac{1}{q + \dfrac{1}{r}}$ est égal à $\dfrac{25}{19}$ et que cette fraction est supérieure à 1 et inférieure à 2, alors p doit être égal à 1. Donc $\dfrac{1}{q + \dfrac{1}{r}} = \dfrac{25}{19} - 1$, ou $\dfrac{1}{q + \dfrac{1}{r}} = \dfrac{6}{19}$. Donc $q + \dfrac{1}{r} = \dfrac{19}{6}$.
Puisque r est un entier strictement positif, alors $\dfrac{1}{r}$ est supérieur à 0 et inférieur à 1. Or, puisque $\dfrac{19}{6}$ est supérieur à 3 et inférieur à 4, alors $q = 3$. On peut aussi vérifier que $q = 3$.

Réponse : (C)

22. Soit n un entier multiplicativement parfait. Il ne peut être un nombre premier, car un nombre premier n'admet qu'un seul diviseur propre, soit 1.
Supposons que n peut être exprimé comme produit de deux entiers positifs supérieurs à 1, soit a et b. On a donc $n = a \times b$. n ne peut admettre un autre diviseur autre que 1, car on a déjà $n = 1 \times a \times b$ et un autre diviseur viendrait s'ajouter au membre de droite qui ne serait plus égal à n. Donc, n ne peut admettre plus de deux diviseurs autres que 1. On peut aussi affirmer qu'il ne peut admettre plus de deux diviseurs premiers distincts (autrement il aurait plus de deux diviseurs autres que 1).
1^{er} cas
n admet deux diviseurs premiers distincts, soit p et q. Alors ni p, ni q, ne paraît plus d'une fois dans la factorisation première de n, autrement p^2 ou q^2 serait un autre diviseur propre de n. On

a donc $n = p \times q$ (qui admet trois diviseurs propres, soit 1, p et q). Les entiers de 2 à 30 qui sont de la forme $n = p \times q$ sont 6, 10, 14, 15, 21, 22 et 26. Il y en a 7.
2^e cas
n admet un seul diviseur premier, soit p. On doit avoir $n = p^3$ pour que n admette exactement trois diviseurs propres (soit 1, p et p^2). Les plus grandes puissances de p admettent plus de trois diviseurs propres, tandis que les plus petites puissances de p admettent moins de trois diviseurs propres. (Par exemple, p^2 admet 2 diviseurs propres et p^5 admet 5 diviseurs propres.)
Les entiers de 0 à 30 qui sont de la forme $n = p^3$ sont 8 et 27. Il y en a 2.
De 2 à 30, il y a donc 9 entiers multiplicativement parfaits.

Réponse : (A)

23. On procède d'abord par tâtonnements, tout en analysant les résultats.
Puisque Céline est plus rapide à déplacer les petites boîtes et que René est plus rapide à déplacer les grandes, on suppose que Céline déplace toutes les petites, ce qui prend 32 minutes, et que René déplace toutes les grandes, ce qui prend 50 minutes. Ils finissent donc en 50 minutes.
Si on laisse Céline déplacer 2 grandes boîtes, en plus des 16 petites, elle mettra 44 minutes pour le faire. René mettra alors 40 minutes à déplacer 8 grandes boîtes. Ils finissent donc en 44 minutes. On peut donc éliminer le choix de réponse (E).
Si on laisse René déplacer 1 des petites boîtes, en plus des 8 grandes boîtes, il mettra 43 minutes pour le faire. Céline mettra alors 42 minutes pour déplacer 15 petites boîtes et 2 grandes boîtes. Ils finissent donc en 43 minutes. On peut donc éliminer le choix de réponse (D).

Pourquoi est-il impossible de finir en moins de 43 minutes ? Supposons qu'ils finissent en 42 minutes. Ils mettraient, en tout, un total d'au plus 84 minutes pour finir le travail.
Supposons que Céline déplace x petites boîtes et y grandes boîtes, ce qui lui prendrait $2x + 6y$ minutes. Alors René déplace $16 - x$ petites boîtes et $10 - y$ grandes boîtes, ce qui lui prendrait $3(16 - x) + 5(10 - y)$ minutes, ou $98 - 3x - 5y$ minutes.
Puisqu'ils mettent au plus 84 minutes de travail au total, alors $(2x + 6y) + (98 - 3x - 5y) \leq 84$, ou $14 \leq x - y$.
Puisque $0 \leq x \leq 16$ et $0 \leq y \leq 10$, alors les couples (x,y) qui vérifient l'inéquation $14 \leq x - y$ sont (16,0), (16,1), (16,2), (15,0), (15,1), (14,0). Ces valeurs donnent les résultats suivants :

x	y	Céline N^bre de pet. boîtes	Céline N^bre de gr. boîtes	Céline N^bre de minutes	René N^bre de pet. boîtes	René N^bre de gr. boîtes	René N^bre de minutes
16	0	16	0	32	0	10	50
16	1	16	1	38	0	9	45
16	2	16	2	44	0	8	40
15	0	15	0	30	1	10	53
15	1	15	1	36	1	9	48
14	0	14	0	28	2	10	56

Dans chacun de ces cas, bien que le temps total soit inférieur à 84 minutes, il faut plus de 43 minutes pour que les deux aient fini de déplacer les boîtes.
Il est donc impossible de finir en moins de 43 minutes. Ils peuvent donc finir à 9 h 43.

Réponse : (C)

24. Examinons la situation pour les premières valeurs de n.
Si $n = 1$, Anne gagne en enlevant le cure-dent.
Si $n = 2$, Anne doit enlever 1 cure-dent (car il n'y en a pas suffisamment pour qu'elle puisse en

enlever 3 ou 4). Bahia enlève le dernier cure-dent et gagne.
Si $n = 3$ ou $n = 4$, Anne peut gagner en enlevant tous les cure-dents.
Si $n = 5$, Anne peut enlever 3 cure-dents et en laisser 2 pour Bahia. Cette dernière ne peut gagner, car Anne ne pouvait pas gagner devant 2 cure-dents. Anne gagne.
Si $n = 6$, Anne peut enlever 4 cure-dents, ce qui produit la même situation que dans le cas précédent. Anne gagne.
Si $n = 7$, Anne peut enlever 1, 3 ou 4 cure-dents, laissant 6, 4 ou 3 cure-dents pour Bahia. Or, comme on l'a vu, 6, 4 ou 3 cure-dents accordent une stratégie gagnante à la prochaine personne qui joue, soit Bahia. Donc si $n = 7$ Bahia gagne, puisque dans chaque cas, elle peut utiliser la stragégie gagnante d'Anne.
De façon générale, dans un jeu de n cure-dents, Bahia a une stratégie gagnante si Anne avait une stratégie gagnante dans un jeu de $n - 1$, $n - 3$ et $n - 4$ cure-dents. (En effet, puisque Anne commence avec n cure-dents et en enlève 1, 3 ou 4, Bahia se retrouve devant $n - 1$, $n - 3$ ou $n - 4$ cure-dents qui offrent des stratégies gagnantes à la prochaine personne qui joue.)
Anne aura une stratégie gagnante autrement. (En effet, si Bahia ne peut gagner devant $n - 1$, $n - 3$ ou $n - 4$ cure-dents, Anne peut enlever le nombre approprié de cure-dents de manière à laisser la position perdante à Bahia.)
On construit une liste de situations initiales qui offrent une stratégie gagnante pour chacune. Devant un entier n, on ajoute ce nombre à la liste de Bahia si $n - 1$, $n - 3$ et $n - 4$ sont tous dans la liste d'Anne. On ajoute n à la liste d'Anne autrement.

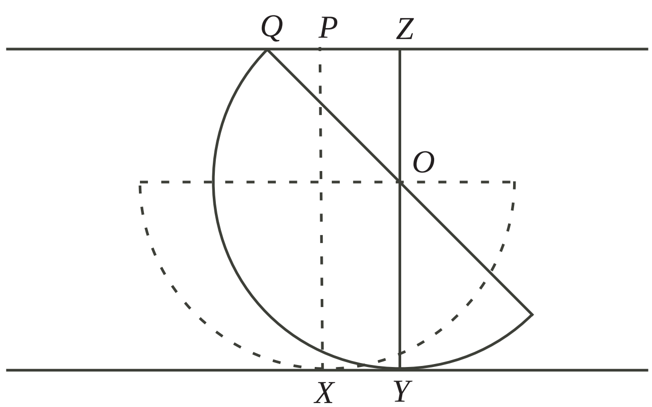
Anne gagne : 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 25, 26, 27, 29, 31, 32, 33, 34

Bahia gagne : 2, 7, 9, 14, 16, 21, 23, 28, 30, 35

Parmi les choix de réponse, un jeu de 35 cure-dents offre une stratégie gagnante à Bahia.

Réponse : (E)

25. En position initiale, soit X le point où le demi-disque touche à la ligne du dessous. P est le point, sur la deuxième droite, qui est directement au-dessus de X . On considère ce qui arrive lorsque le demi-disque est bercé vers la droite et qu'il frappe la ligne du dessus au point Q.



Dans cette position, soit Y le point de contact du demi-disque et de la ligne du dessous et Z le point directement au-dessus de lui sur la deuxième ligne. O est le point d'intersection du haut du demi-disque et du segment YZ. On a $XY = PZ$. Q est un des deux points où le demi-disque frappe la ligne du dessus. Par symétrie, l'autre point est l'image de Q par réflexion par rapport à la droite XP. Donc, la distance que l'on cherche est deux fois la longueur de PQ.
Or $PQ = QZ - PZ = QZ - XY$.
Puisque le demi-disque est tangent à la droite du dessous, YO est perpendiculaire à cette droite. Puisque O est aussi situé sur le diamètre, il est le centre du demi-disque. Donc $OY = OQ = 8$ cm,

puisque OY et OQ sont des rayons.
De plus, $OZ = 4$ cm, puisqu'il y a une distance de 12 cm entre les deux droites.
Puisque le triangle QZO est rectangle, alors $QZ^2 = QO^2 - ZO^2$, c'est-à-dire que $QZ^2 = 8^2 - 4^2$, ou $QZ^2 = 48$, d'où $QZ = 4\sqrt{3}$ cm. Puisque $QZ : ZO = \sqrt{3} : 1$, alors $\angle QOZ = 60°$.
Donc, l'angle entre QO et l'horizontale est de 30°. Le demi-disque a donc tourné sur 30°, ce qui constitue $\frac{1}{12}$ d'une rotation complète (s'il s'agissait d'un disque complet).
La distance de Y à X est donc égale à $\frac{1}{12}$ de la circonférence d'un disque ayant un rayon de 8 cm.
Donc $XY = \frac{1}{12}(2\pi(8))$ cm, ou $XY = \frac{4}{3}\pi$ cm. (On peut penser à une roue qui tourne sur 30° et à la distance qu'elle a parcourue.)
Donc $PQ = QZ - XY$, ou $PQ = 4\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$ cm.
La distance que l'on cherche est le double de cette distance, soit $8\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi$ cm, ou environ 5,4788 cm. Parmi les choix de réponse, la réponse la plus près est 55 mm.

Réponse : (A)