Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Pascal 2005

(9^{e} année ou Secondaire III)

Le mercredi 23 février 2005

Solutions

1. On calcule d'abord le numérateur et le dénominateur : $\dfrac{200+10}{20+10} = \dfrac{210}{30} = 7$

Réponse : (E)

2. On simplifie les termes en paires : $6a - 5a + 4a - 3a + 2a - a = a + a + a = 3a$

Réponse : (A)

3. Lorsqu'on reporte $x = 3$ dans l'expression, celle-ci devient $3(2)(1)(0)(-1)$.
Puisque un des facteurs est égal à 0, le produit est égal à 0.

Réponse : (C)

4. Parmi les numéros de boules, soit 2, 3, 4, 5, 6 et 7, seuls 2, 3, 5 et 7 sont des nombres premiers. Puisque 4 des 6 numéros sont des nombres premiers, la probabilité de choisir un nombre premier est égale à $\frac{4}{6}$, c'est-à-dire à $\frac{2}{3}$.

Réponse : (D)

5. On calcule de l'intérieur vers l'extérieur : $\sqrt{36 \times \sqrt{16}} = \sqrt{36 \times 4} = \sqrt{144} = 12$

Réponse : (A)

6. Lorsqu'on enlève la moitié de l'eau du verre, la masse passe de 1000 g à 700 g.
Elle baisse donc de 300 g.
Si on vide le verre, c'est-à-dire si on enlève l'autre moitié de l'eau du verre, la masse du verre baissera encore de 300 g. Elle passera donc de 700 g à 400 g.
Le verre vide a donc une masse de 400 g.

Réponse : (D)

7. *Solution 1*
Puisque $\frac{1}{3}x = 12$, alors $x = 3 \times 12$, c'est-à-dire que $x = 36$.
Donc $\frac{1}{4}x = \frac{1}{4}(36)$, ou $\frac{1}{4}x = 9$.

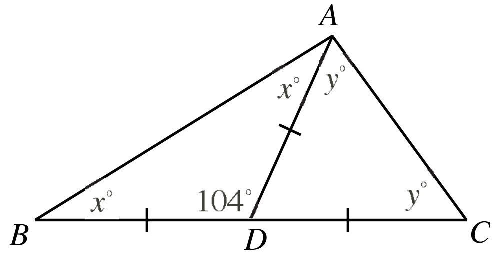
Solution 2
Puisque $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$, alors $\frac{1}{4}x = \frac{3}{4} \times (\frac{1}{3}x)$. Donc $\frac{1}{4}x = \frac{3}{4}(12)$, ou $\frac{1}{4}x = 9$.

Réponse : (C)

8. On calcule le carré de chaque nombre : $(-5)^2 = 25$, $(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$, $2^2 = 4$, $(\frac{3}{5})^2 = \frac{9}{25}$ et $8^2 = 64$.
On voit immédiatement que chacun des nombres -5, 2 et 8 est plus petit que son carré.
Puisque $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ et que $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$, alors $\frac{3}{2}$ est aussi plus petit que son carré.
Or $\frac{3}{5} = \frac{15}{25}$, ce qui indique que $\frac{3}{5}$ est plus grand que son carré $\frac{9}{25}$.

Réponse : (D)

9. *Solution 1*
Puisque le triangle BDA est isocèle, $\angle BAD = \angle ABD = x^\circ$.
Puisque le triangle CDA est isocèle, $\angle CAD = \angle ACD = y^\circ$.

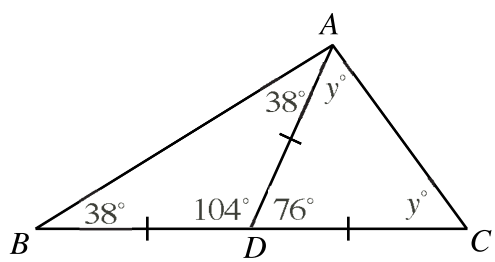


Donc $\angle BAC = (x+y)^\circ$.
Puisque la somme de la mesure des angles du triangle ABC est égale à 180°, alors :

$$\begin{aligned} x + y + (x+y) &= 180 \\ 2x + 2y &= 180 \\ x + y &= 90 \end{aligned}$$

Donc $x + y = 90$.

Solution 2
Puisque le triangle BDA est isocèle, $\angle BAD = \angle ABD = x^\circ$.
Puisque la somme de la mesure des angles du triangle ABD est égale à 180°, alors $x + x + 104 = 180$, c'est-à-dire que $2x + 104 = 180$, d'où $2x = 76$, ou $x = 38$.
Puisque les angles BDA et ADC sont supplémentaires, alors $\angle ADC = 180^\circ - 104^\circ$, ou $\angle ADC = 76^\circ$.
Puisque le triangle CDA est isocèle, $\angle CAD = \angle ACD = y^\circ$.



Puisque la somme de la mesure des angles du triangle CDA est égale à 180°, alors $y + y + 76 = 180$, c'est-à-dire que $2y + 76 = 180$, d'où $2y = 104$, ou $y = 52$.
Donc $x + y = 38 + 52$, ou $x + y = 90$.

Réponse : (D)

10. D'après la définition de la suite, le 3e terme est égal à la moyenne des deux termes précédents, soit 8 et 32. Il est donc égal à $\frac{1}{2}(32+8)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(40)$, ou 20.
Le 4e terme est égal à la moyenne du 2e et du 3e. Il est donc égal à $\frac{1}{2}(8+20)$, c'est-à-dire à 14.
Le 5e terme est égal à la moyenne du 3e et du 4e. Il est donc égal à $\frac{1}{2}(20+14)$, c'est-à-dire à 17.
Donc $x = 17$.

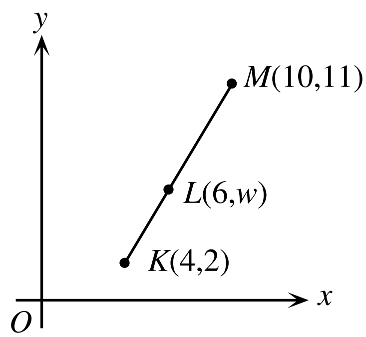
Réponse : (A)

11. Puisque a et b sont des entiers positifs, que $a \times b = 13$ et que 13 est un nombre premier, alors soit que $a = 13$ et $b = 1$, soit que $a = 1$ et $b = 13$.
Supposons que $b = 1$. Puisque $b \times c = 52$, il faut donc que $c = 52$. Il est alors impossible d'avoir $c \times a = 4$. Donc, b ne peut être égal à 1.
On a donc $b = 13$, $a = 1$ et $c = 4$ (cette dernière conclusion provient de $b = 13$ et de $b \times c = 52$,

ou encore de $a = 1$ et de $c \times a = 4$).
Donc $a \times b \times c = 1 \times 13 \times 4$, ou $a \times b \times c = 52$.

Réponse : (E)

12. *Solution 1*
Pour se rendre de K à M, on doit monter de 9 unités et aller de 6 unités vers la droite.



Puisque L est situé sur le segment KM et que pour se rendre de K à L, on doit aller de 2 unités vers la droite, c'est-à-dire de $\frac{1}{3} \times 6$ unités, il faut monter de $\frac{1}{3} \times 9$ unités, c'est-à-dire de 3 unités.
Donc $w = 2 + 3$, ou $w = 5$.

Solution 2
La pente du segment KM est égale à $\dfrac{11-2}{10-4}$, c'est-à-dire à $\frac{9}{6}$, ou $\frac{3}{2}$.
Puisque L est situé sur le segment KM, la pente du segment KL est aussi égale à $\frac{3}{2}$.
Donc $\dfrac{w-2}{6-4} = \dfrac{3}{2}$, ou $\dfrac{w-2}{2} = \dfrac{3}{2}$, d'où $w - 2 = 3$, ou $w = 5$.

Réponse : (B)

13. *Solution 1*
Chaque cube-unité a trois faces exposées sur le grand cube et trois faces cachées.
Donc, lorsque le grand cube est peint, 3 des 6 faces de chaque cube-unité sont peintes (c'est-à-dire que $\frac{1}{2}$ de l'aire de chaque cube-unité est peinte). Donc, $\frac{1}{2}$ de l'aire totale des cubes-unités est peinte.

Solution 2
Le grand cube mesure 2 sur 2 sur 2. Donc, chacune de ses six faces mesure 2 sur 2. Son aire totale est donc égale à $6 \times 2 \times 2$ unités carrées, c'est-à-dire à 24 unités carrées, ce qui est l'aire totale de la surface peinte.
Chaque cube-unité a une aire de 6 unités carrées (puisque chacune de ses faces mesure 1 sur 1).
L'aire totale des 8 cubes-unités est donc égale à 8×6 unités carrées, c'est-à-dire à 48 unités carrées.
Or, 24 des 48 unités carrées sont peintes, ce qui correspond à la fraction $\frac{24}{48}$, ou $\frac{1}{2}$.

Réponse : (C)

14. Chaque entier, entre 2005 et 3000, est composé de quatre chiffres.
Puisqu'un palindrome se lit de gauche à droite ou de droite à gauche, chaque palindrome de quatre chiffres doit être de la forme $xyyx$, x et y étant des chiffres.
Un palindrome entre 2005 et 3000 doit avoir 2 pour premier chiffre. Il doit donc être de la forme $2yy2$. De plus, y peut prendre n'importe quelle valeur de 1 à 9.

Il y a donc 9 palindromes entre 2005 et 3000, soit 2112, 2222, 2332, 2442, 2552, 2662, 2772, 2882 et 2992.

Réponse : (C)

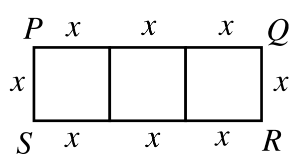
15. Lorsqu'on divise 14 par n, le reste est égal à 2. Donc, n doit être un diviseur de $14-2$, c'est-à-dire de 12.
Donc, n pourrait être égal à 1, 2, 3, 4, 6 ou 12.
Or, le reste doit être *inférieur* au diviseur. Donc, n ne peut être égal à 1 ou à 2.
n peut donc être égal à 3, 4, 6 ou 12. Il y a donc 4 valeurs possibles de n.

Réponse : (D)

16. Pour former le plus grand nombre possible en utilisant chacun des chiffres 1, 2, 5, 6 et 9 une fois chacun, le plus grand chiffre doit paraître en premier, le deuxième plus grand en deuxième position, et ainsi de suite. Le plus grand nombre possible est donc 96 521.
Le deuxième plus grand nombre est 96 512. En effet, tous les autres sont plus petits que 96 500. Donc, 96 512 est le plus grand nombre pair formé de ces chiffres.
On utilise une logique semblable, mais renversée, pour conclure que 12 569 est le plus petit nombre formé de ces chiffres. Le plus petit nombre pair formé de ces chiffres est 12 596. En effet, tous les autres nombres sont plus grands que 12 600.
La différence entre le plus grand et le plus petit est égale à $96\,512 - 12\,596$, c'est-à-dire à 83 916.

Réponse : (A)

17. Soit x la longueur des côtés des carrés en centimètres.



Le périmètre de $PQRS$ est égal à $8x$. Donc $8x = 120$, d'où $x = 15$.
Puisque $PQRS$ est formé de trois carrés ayant des côtés de 15 cm, son aire est égale à $3(15^2)$ cm^2, c'est-à-dire à $3(225)$ cm^2, ou 675 cm^2.

Réponse : (B)

18. D'abord, $2005^2 = 4020025$. Les deux derniers chiffres de 2005^2 sont donc 25.
On doit aussi examiner 2005^5. Puisqu'on veut connaître les deux derniers chiffres seulement, il n'est pas nécessaire de tout calculer.
On considère 2005^3, qui est égal à $2005^2 \times 2005$, c'est-à-dire à 4020025×2005. Lorsqu'on multiplie au long, seuls les deux derniers chiffres de chaque facteur participent à déterminer les deux derniers chiffres du produit (on peut l'essayer !). Les deux derniers chiffres de 2005^3 sont les mêmes que les deux derniers chiffres du produit de 25×5, qui est égal à 125. Les deux derniers chiffres sont 25.
De même, pour déterminer les deux derniers chiffres de 2005^4, on multiplie les deux derniers chiffres de 2005^3 par ceux de 2005. On multiplie donc 25 par 5. Les deux derniers chiffres de 2005^4 sont donc 25.
De même, les deux derniers chiffres de 2005^5 sont 25.
Or $2005^0 = 1$. La somme des deux derniers chiffres de la somme est égale à $\ldots 25 + 1 + 1 + \ldots 25$, c'est-à-dire à $\ldots 52$.

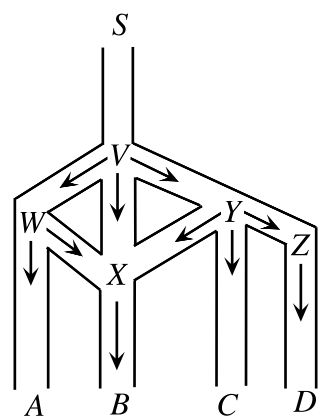
Les deux derniers chiffres sont 52.

Réponse : (A)

19. La façon la plus facile de procéder, c'est d'écrire les nombres, en ordre, en regardant d'abord le chiffre des centaines.
Le chiffre des centaines est 1 : Il n'y a aucun entier décroissant, car le chiffre des dizaines doit être 0 et il ne reste aucun chiffre pour le chiffre des unités.
Le chiffre des centaines est 2 : Il y a un seul nombre possible, soit 210.
Le chiffre des centaines est 3 : Le chiffre des dizaines peut être 2 ou 1, ce qui donne les nombres 321, 320 et 310.
Le chiffre des centaines est 4 : Le chiffre des dizaines peut être 3, 2 ou 1, ce qui donne les nombres 432, 431, 430, 421, 420 et 410.
Il y a 10 entiers décroissants entre 100 et 500.

Réponse : (B)

20. On nomme les bifurcations V, W, X, Y et Z.



D'après les flèches, on voit que pour se rendre à B, Henri doit d'abord se rendre à X (et de X, il doit continuer jusqu'à B). On calcule donc la probabilité pour qu'il se rende à X.
Pour se rendre à X, Henri peut aller de S à V à W à X, ou de S à V à Y à X, ou encore de S à V et directement à X.
À V, la probabilité pour qu'Henri emprunte n'importe quel des chemins (c'est-à-dire vers W, X ou Y) est égale à $\frac{1}{3}$.
Donc, la probabilité pour qu'Henri aille directement de V à X est égale à $\frac{1}{3}$.
À W, la probabilité pour qu'Henri tourne en direction de X est égale à $\frac{1}{2}$. La probabilité pour qu'il aille de V à W à X est égale à $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{6}$.
À Y, la probabilité pour qu'Henri aille vers X est égale à $\frac{1}{3}$. Donc, la probabilité pour qu'il aille de V à Y à X est égale à $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{9}$.
Donc, la probabilité pour qu'Henri aboutisse à X (et donc à B) est égale à $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}$, c'est-à-dire à $\frac{6+3+2}{18}$, ou $\frac{11}{18}$.

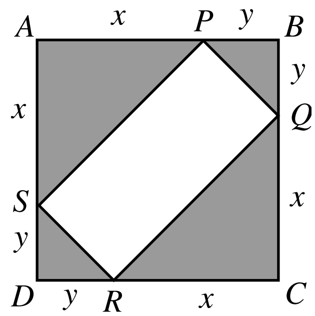
Réponse : (C)

21. On examine chacun des cinq choix de réponse.
Si $m : n = 9 : 1$, on pose $m = 9x$ et $n = x$. On a donc $9x + x = 300$, d'où $10x = 300$, ou $x = 30$. Donc $m = 9(30)$, d'où $m = 270$ et $n = 30$.
Si $m : n = 17 : 8$, on pose $m = 17x$ et $n = 8x$. On a donc $17x + 8x = 300$, d'où $25x = 300$, ou $x = 12$. Donc $m = 17(12)$ et $n = 8(12)$, d'où $m = 204$ et $n = 96$.

Si $m : n = 5 : 3$, on pose $m = 5x$ et $n = 3x$. On a donc $5x + 3x = 300$, d'où $8x = 300$, ou $x = \frac{75}{2}$.
Donc $m = 5(\frac{75}{2})$ et $n = 3(\frac{75}{2})$, d'où $m = \frac{375}{2}$ et $n = \frac{225}{2}$.
Si $m : n = 4 : 1$, on pose $m = 4x$ et $n = x$. On a donc $4x + x = 300$, d'où $5x = 300$, ou $x = 60$.
Donc $m = 4(60)$, d'où $m = 240$ et $n = 60$.
Si $m : n = 3 : 2$, on pose $m = 3x$ et $n = 2x$. On a donc $3x + 2x = 300$, d'où $5x = 300$, ou $x = 60$.
Donc $m = 3(60)$ et $n = 2(60)$, d'où $m = 180$ et $n = 120$.
La seule possibilité pour laquelle m et n sont des entiers supérieurs à 100 est $m : n = 3 : 2$.

Réponse : (E)

22. Soit $AS = x$ et $SD = y$.
Puisque les triangles SAP et SDR sont isocèles, alors $AP = x$ et $DR = y$.
Puisqu'il y a deux paires de triangles identiques, alors $BP = BQ = y$ et $CQ = CR = x$.



Le triangle SDR est rectangle (puisque $ABCD$ est un carré) et isocèle. Son aire (et celle du triangle BPQ) est égale à $\frac{1}{2}y^2$.
De même, l'aire du triangle SAP (et celle du triangle QCR) est égale à $\frac{1}{2}x^2$.
L'aire totale des quatre triangles est donc égale à $2(\frac{1}{2}x^2) + 2(\frac{1}{2}y^2)$, c'est-à-dire à $x^2 + y^2$.
Donc $x^2 + y^2 = 200$.
D'après le triangle de Pythagore dans le triangle PRS, puis dans les triangles SAP et SDR :

$$\begin{aligned} PR^2 &= PS^2 + SR^2 \\ &= (SA^2 + AP^2) + (SD^2 + DR^2) \\ &= 2x^2 + 2y^2 \\ &= 2(200) \\ &= 400 \end{aligned}$$

Donc $PR = 20$ m.

Réponse : (B)

23. En partant du centre, soit à 2, on peut se déplacer vers huit chiffres 0, soit quatre « 0 latéraux ».

		0		
	0	2	0	
		0		

et quatre « 0 de coins ».

	0		0	
		2		
	0		0	

À partir d'un 0 latéral, on peut se déplacer vers quatre chiffres 0, soit deux 0 latéraux et deux 0 de coin.

	0	0	0	
	0		0	

À partir d'un 0 de coin, on peut se déplacer vers deux chiffres 0, soit deux 0 latéraux.

	0	0		
	0			

À partir d'un 0 latéral, on peut se déplacer vers trois chiffres 5.

5				
5	0			
5				

À partir d'un 0 de coin, on peut se déplacer vers cinq chiffres 5.

5	5	5		
5	0			
5				

Les trois combinaisons possibles de deux 0 sont donc « latéral-latéral », « latéral-coin » et « coin-latéral ».
Le nombre de chemins qui correspondent à la combinaison « latéral-latéral » est égal à $4 \times 2 \times 3$, c'est-à-dire à 24, car au départ, il y a quatre 0 latéraux et pour *chacun*, on peut se rendre à deux 0 latéraux et pour *chacun* de ces 0 latéraux, on peut se rendre à trois 5.
Le nombre de chemins qui correspondent à la combinaison « latéral-coin » est égal à $4 \times 2 \times 5$, c'est-à-dire à 40.
Le nombre de chemins qui correspondent à la combinaison « coin-latéral » est égal à $4 \times 2 \times 3$, c'est-à-dire à 24.
En tout, on peut emprunter $24 + 40 + 24$ chemins, c'est-à-dire 88 chemins, pour former le nombre 2005.

Réponse : (E)

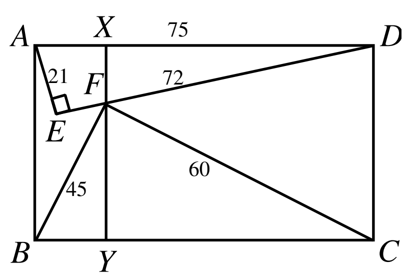
24. Puisque la suite est croissante, le 1000$^{\text{e}}$ terme est supérieur ou égal à 1000.
On détermine d'abord le nombre de puissances parfaites parmi les nombres de 1 à 1000. (Ceci nous dira combien d'entiers, de 1 à 1000, ont été laissés de côté pour former la suite.)
Or, on ira même jusqu'à 1100, car le 1000$^{\text{e}}$ terme sera plus grand que 1000.

Carrés parfaits : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961, 1024, 1089
Cubes parfaits : 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000
4$^{\text{e}}$ puissances parfaites : 1, 16, 81, 256, 625
5$^{\text{e}}$ puissances parfaites : 1, 32, 243, 1024
6$^{\text{e}}$ puissances parfaites : 1, 64, 729
7$^{\text{e}}$ puissances parfaites : 1, 128
8$^{\text{e}}$ puissances parfaites : 1, 256
9$^{\text{e}}$ puissances parfaites : 1, 512
10$^{\text{e}}$ puissances parfaites : 1, 1024

Cette liste compte 41 puissances parfaites distinctes inférieures ou égales à 1000.
De 1 à 1000, il y a donc 959 entiers qui ne sont pas des puissances parfaites.
Donc, le 959$^{\text{e}}$ terme de la suite est 999. (Si 1000 n'était pas une puissance parfaite, il serait le 959$^{\text{e}}$ terme.)
Donc, le 960$^{\text{e}}$ terme est 1001 et le 961$^{\text{e}}$ terme est 1002. On continue de la sorte jusqu'à la prochaine puissance parfaite, soit 1024.
Les 982$^{\text{e}}$ et 983$^{\text{e}}$ termes sont donc 1023 et 1025.
On peut continuer de la sorte jusqu'au 1000$^{\text{e}}$ terme, soit 1042, car la prochaine puissance parfaite est 1089.
La somme des carrés des chiffres de 1042 est égale à $1^2 + 0^2 + 4^2 + 2^2$, c'est-à-dire à 21.

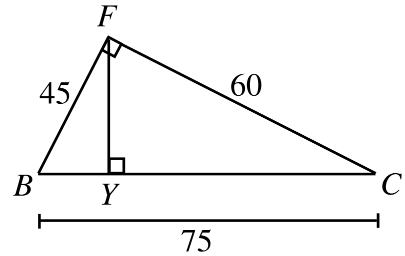
Réponse : (E)

25. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AED, $AD^2 = AE^2 + ED^2$.
Donc $AD^2 = 21^2 + 72^2$, d'où $AD^2 = 5625$ et $AD = 75$.
Puisque $ABCD$ est un rectangle, $BC = AD = 75$. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle BFC, $FC^2 = BC^2 - BF^2$. Donc $FC^2 = 75^2 - 45^2$, d'où $FC^2 = 3600$ et $FC = 60$.
Au point F, on trace une droite parallèle à AB, qui coupe AD en X et BC en Y.
Pour déterminer la longueur AB, on déterminera les longueurs FY et FX.



1$^{\text{re}}$ étape : Calcul de la longueur FY

Pour le faire, on calculera l'aire du triangle BFC de deux façons.
On sait que le triangle BFC est rectangle en F. Donc, BF est une base et FC est la hauteur correspondante. L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}(BF)(FC)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(45)(60)$, ou 1350.
De plus, FY est la hauteur qui correspond à la base BC du même triangle. L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}(FY)(BC)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(FY)(75)$.



Donc $\frac{1}{2}(FY)(75) = 1350$, d'où $FY = 36$.

(On aurait pu prendre une autre approche en posant $FY = h$ et $BY = x$. On aurait alors $YC = 75 - x$. En utilisant ensuite le théorème de Pythagore dans les deux petits triangles, on aurait obtenu deux équations à deux inconnues.)

Puisque $FY = 36$, alors d'après le théorème de Pythagore dans le triangle BFY, $BY^2 = BF^2 - FY^2$. Donc $BY^2 = 45^2 - 36^2$, d'où $BY^2 = 729$ et $BY = 27$.
Donc $YC = BC - BY$, ou $YC = 48$.

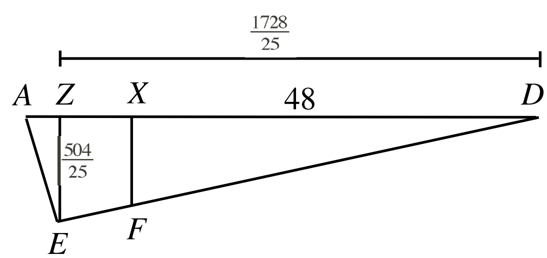
2e étape : Calcul de la longueur FX

1re méthode – Triangles semblables

Puisque les triangles AED et FXD sont rectangles et qu'ils partagent un angle, soit l'angle D, ils sont semblables.
Puisque $YC = 48$, alors $XD = 48$.
Puisque les triangles AED et FXD sont semblables, alors $\dfrac{FX}{XD} = \dfrac{AE}{ED}$, c'est-à-dire que $\dfrac{FX}{48} = \dfrac{21}{72}$, d'où $FX = 14$.

2e méthode – Imitation de l'étape 1

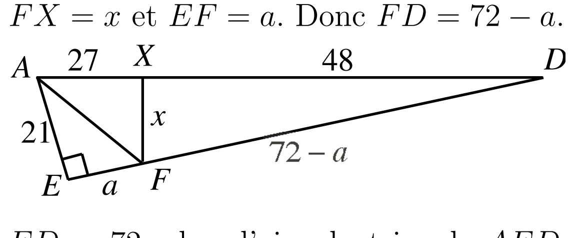
Au point E, on abaisse une perpendiculaire EZ au côté AD.



On utilise le même argument que dans la 1re étape pour montrer que $EZ = \frac{504}{25}$ et que $ZD = \frac{1728}{25}$.
Puisque les points D, F et E sont alignés, alors le rapport $FX : EZ$ est égal au rapport $DX : DZ$, c'est-à-dire que $\dfrac{FX}{\frac{504}{25}} = \dfrac{48}{\frac{1728}{25}}$, ou $\dfrac{FX}{504} = \dfrac{48}{1728}$, d'où $FX = 14$.

3e méthode – Aires

On joint A et F. Soit $FX = x$ et $EF = a$. Donc $FD = 72 - a$.



Puisque $AE = 21$ et $ED = 72$, alors l'aire du triangle AED est égale à $\frac{1}{2}(21)(72)$, c'est-à-dire à 756.

Or, l'aire du triangle AED est égale à la somme de l'aire des triangles AEF et AFD.
Donc :

$$756 = \frac{1}{2}(21)(a) + \frac{1}{2}(75)(x),$$

d'où $21a + 75x = 1512$, ou $a + \frac{25}{7}x = 72$.
Or, dans le triangle FXD, on a $FX = x$, $GD = 48$ et $FD = 72 - a$.
D'après le théorème de Pythagore, $x^2 + 48^2 = (72 - a)^2$, d'où $x^2 + 48^2 = (\frac{25}{7}x)^2$, ou $x^2 + 48^2 = \frac{625}{49}x^2$.
On a donc $48^2 = \frac{576}{49}x^2$, d'où $x = 14$.

Puisque $AB = XY = FX + FY$, alors $AB = 36 + 14$, ou $AB = 50$.

Réponse : (A)