Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Hypatie 2005

Le mercredi 20 avril 2005

Solutions

1. (a) D'après la définition, $2 \diamond 3 = 2^2 - 4(3) = 4 - 12 = -8$.

   (b) D'après la définition, $k \diamond 2 = k^2 - 4(2) = k^2 - 8$.
   D'après la définition, $2 \diamond k = 2^2 - 4(k) = 4 - 4k$.
   On cherche donc toutes les valeurs de k pour lesquelles :

$$\begin{aligned} k^2 - 8 &= 4 - 4k \\ k^2 + 4k - 12 &= 0 \\ (k+6)(k-2) &= 0 \end{aligned}$$

   Donc $k = -6$ ou $k = 2$.
   On peut vérifier : $(-6) \diamond 2 = (-6)^2 - 4(2) = 28$ et $2 \diamond (-6) = 2^2 - 4(-6) = 28$.
   Donc, $k = -6$ vérifie la condition.
   De même, si $k = 2$, alors $2 \diamond 2 = 2 \diamond 2$. Donc, $k = 2$ vérifie la condition.

   (c) Puisque $3 \diamond x = y$, alors $3^2 - 4x = y$, ou $9 - 4x = y$.
   Puisque $2 \diamond y = 8x$, alors $2^2 - 4y = 8x$, ou $4 - 4y = 8x$.
   On doit donc résoudre un système de deux équations à deux inconnues.
   On reporte $y = 9 - 4x$ dans l'équation $4 - 4y = 8x$:

$$\begin{aligned} 4 - 4(9 - 4x) &= 8x \\ 4 - 36 + 16x &= 8x \\ 8x &= 32 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

   Puisque $x = 4$, alors $y = 9 - 4(4)$, ou $y = -7$.
   (Il y a d'autres façons de résoudre ce système.)
   On peut vérifier : $3 \diamond x = 3 \diamond 4 = 3^2 - 4(4) = -7 = y$ et
   $2 \diamond y = 2 \diamond (-7) = 2^2 - 4(-7) = 32 = 8x$.
   La solution est bien $x = 4$ et $y = -7$.

2. (a) Puisque 3 cure-dents, puis 1 cure-dent, puis 4 cure-dents ont été enlevés de la pile initiale de 11 cure-dents, il reste 3 cure-dents dans la pile.
   Selon les 2^e et 3^e règlements, Carla peut seulement enlever 2 ou 5 cure-dents, puisque 3 cure-dents, 1 cure-dent et 4 cure-dents ont déjà été enlevés.
   Puisqu'il reste 3 cure-dents, elle doit en enlever 2.
   Il reste maintenant 1 cure-dent dans la pile. Puisque Gilles ne peut en enlever que 5, il ne peut plus jouer.
   Puisque Carla est la dernière personne qui a réussi à jouer, elle est gagnante.

   (b) Après que Gilles a enlevé 5 cure-dents, il en reste 5. Carla peut donc en enlever 1, 2, 3 ou 4 à son tour.
   Si Carla en enlève 1, il en restera 4 et Gilles peut tous les enlever (puisque personne n'a encore enlevé 4 cure-dents à ce point-ci). La pile est alors vide et Gilles gagne.
   Si Carla en enlève 2, il en restera 3 et Gilles peut tous les enlever (puisque personne n'a encore enlevé 3 cure-dents à ce point-ci). La pile est alors vide et Gilles gagne.
   Si Carla en enlève 3, il en restera 2 et Gilles peut tous les enlever (puisque personne n'a encore enlevé 2 cure-dents à ce point-ci). La pile est alors vide et Gilles gagne.
   Si Carla en enlève 4, il en restera 1 et Gilles peut l'enlever (puisque personne n'a encore enlevé 1 cure-dent à ce point-ci). La pile est alors vide et Gilles gagne.
   Donc, peu importe le nombre de cure-dents que Carla enlève à son tour, Gilles peut gagner.

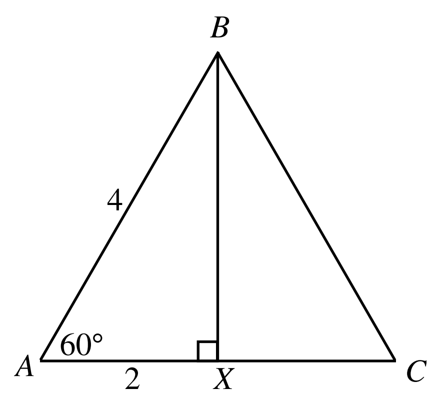
(c) Après que Gilles a enlevé 2 cure-dents, il en reste 7. Carla peut donc en enlever 1, 3, 4 ou 5 à son tour.
Si Carla enlève 5 cure-dents, il en reste 2. Or, Gilles a seulement le droit d'en enlever 1, 3 ou 4. Il en enlève donc 1 et il en reste alors 1. Carla ne peut plus enlever 1 cure-dent, car les choix qui restent sont 3 et 4. Elle serait alors perdante. Carla ne devrait donc pas enlever 5 cure-dents.

Si Carla enlève 3 ou 4 cure-dents, il en reste respectivement 4 ou 3. Gilles peut tous les enlever, car dans chaque cas, le nombre n'a pas été utilisé. Donc, Carla ne devrait pas enlever 3 ou 4 cure-dents. (Si Gilles enlevait 1 cure-dent au lieu de 4 ou 3 cure-dents, il serait tout de même assuré de gagner, car Carla ne pourrait plus jouer. Pourquoi ?)

Si Carla enlève 1 cure-dent, il en reste 6. Gilles peut en enlever 3, 4 ou 5. Si Gilles en enlève 5, il en reste 1 et Carla ne peut plus jouer, puisqu'elle ne peut en enlever que 3 ou 4. Gilles gagne. Si Gilles enlève 4 cure-dents, il en reste 2 et Carla ne peut en enlever 2 ou 3 puisque ces nombres ont déjà été utilisés. Gilles gagne. Si Gilles enlève 3 cure-dents, il en reste 3 et Carla ne peut en enlever 1, 2 ou 3, puisque ces nombres ont déjà été utilisés. Gilles gagne.

Donc, peu importe comment Carla joue par la suite, Gilles peut gagner.

3. (a) *Solution 1*
Au point B, on abaisse une perpendiculaire BX au côté AC.
Puisque le triangle ABC est équilatéral, alors $AB = CB$ et X est donc le milieu de AC. Donc $AX = 2$.



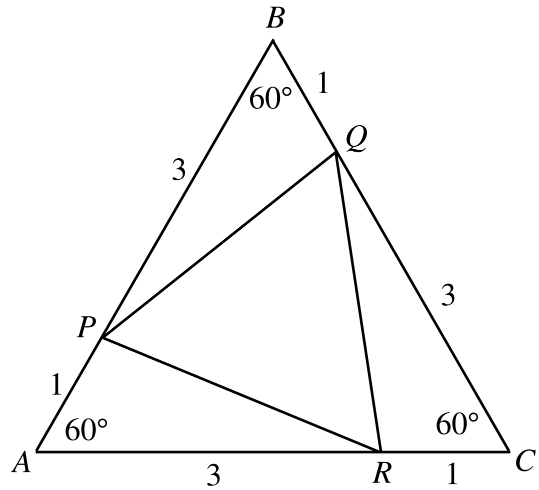
D'après le théorème de Pythagore, $BX = \sqrt{AB^2 - AX^2}$, c'est-à-dire que $BX = \sqrt{4^2 - 2^2}$, d'où $BX = \sqrt{12}$, ou $BX = 2\sqrt{3}$.
L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(AC)(BX)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(2\sqrt{3})$, ou $4\sqrt{3}$.

Solution 2
Au point B, on abaisse une perpendiculaire BX au côté AC.
Puisque le triangle ABC est équilatéral, alors $AB = CB$ et X est donc le milieu de AC. Donc $AX = 2$.
Puisque $\angle BAX = 60°$ et que BX est perpendiculaire à AX, alors le triangle BAX est un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $BX = \sqrt{3}AX$, d'où $BX = 2\sqrt{3}$.
L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(AC)(BX)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(2\sqrt{3})$, ou $4\sqrt{3}$.

Solution 3
Au point B, on abaisse une perpendiculaire BX au côté AC.
Puisque le triangle ABC est équilatéral, alors $AB = CB$ et X est donc le milieu de AC. Donc $AX = 2$.
Puisque $\angle BAX = 60^\circ$, alors $BX = BA\sin(60^\circ)$, d'où $BX = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ou $BX = 2\sqrt{3}$.
L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(AC)(BX)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(2\sqrt{3})$, ou $4\sqrt{3}$.

Solution 4
L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(AB)(AC)\sin(\angle BAC)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(4)\sin(60^\circ)$, ou $8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ou $4\sqrt{3}$.

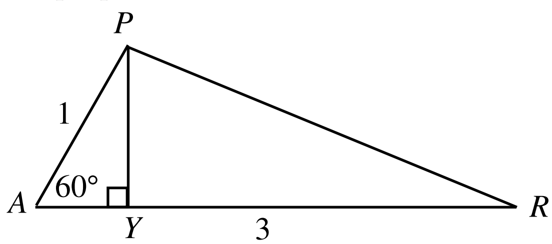
(b) Puisque $AP = BQ = CR = 1$ et que $AB = BC = CA = 4$, alors $AR = BP = CQ = 3$.



Puisque $AP = BQ = CR = 1$, que $PB = QC = RA = 3$ et que $\angle RAP = \angle BPQ = \angle QCR = 60^\circ$, alors les triangles RAP, PBQ et QCR sont congruents (deux côtés et l'angle compris). Donc, les triangles RAP, PBQ et QCR ont la même aire.
On détermine donc l'aire du triangle RAP.

1^re^ méthode

Au point P, on abaisse une perpendiculaire PY au côté AR.



L'aire du triangle RAP est égale à $\frac{1}{2}(AR)(PY)$. On a donc besoin de la longueur de PY.
Puisque $\angle RAP = 60^\circ$, alors $PY = AP\sin(60^\circ)$, d'où $PY = 1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ou $PY = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Donc, l'aire du triangle RAP est égale à $\frac{1}{2}(3)(\frac{\sqrt{3}}{2})$, c'est-à-dire à $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

2^e^ méthode

L'aire du triangle RAP est égale à $\frac{1}{2}(RA)(AP)\sin(\angle RAP)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(3)(1)\sin(60^\circ)$, ou $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Il reste à déterminer l'aire du triangle PQR.
<u>1$^{\text{re}}$ méthode</u>
On peut soustraire l'aire des triangles PBQ, RAP et QCR de l'aire du triangle ABC. Les trois petits triangles sont congruents et leur aire est égale. De plus, on a calculé l'aire du triangle ABC dans la partie (a).
Donc, l'aire du triangle PQR est égale à $4\sqrt{3} - 3\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, c'est-à-dire à $\frac{16\sqrt{3}}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{4}$, ou $\frac{7\sqrt{3}}{4}$.

<u>2$^{\text{e}}$ méthode</u>
Puisque les triangles RAP, PBQ et QCR sont congruents, alors $PQ = QR = RP$. Le triangle PQR est donc équilatéral.
Si on connaît la longueur d'un de ses côtés, on peut utiliser une des méthodes de la partie (a) pour calculer son aire.
D'après la loi du cosinus dans le triangle RAP, on a :

$$\begin{aligned} PR^2 &= PA^2 + AR^2 - 2(PA)(AR)\cos(\angle PAR) \\ PR^2 &= 1^2 + 3^2 - 2(1)(3)\cos(60^\circ) \\ PR^2 &= 10 - 6\left(\frac{1}{2}\right) \\ PR^2 &= 7 \end{aligned}$$

Donc $PR = \sqrt{7}$.
On utilise une des méthodes de la partie (a) pour calculer l'aire du triangle PQR.
On obtient $\frac{7\sqrt{3}}{4}$.

4. (a) *Solution 1*
Dans un triplet, le nombre du milieu doit être supérieur aux deux autres. Donc, b peut seulement prendre les valeurs de 3, 4 ou 5.
Si $b = 3$, alors a peut égaler 1 ou 2 et la valeur correspondante de c est 2 ou 1. Il y a donc 2 triplets possibles.
Si $b = 4$, alors les valeurs correspondantes de a et de c peuvent être 1 et 2, 1 et 3, 2 et 3 et les mêmes valeurs en ordre inverse. Il y a donc 6 triplets possibles.
Si $b = 5$, alors les valeurs correspondantes de a et de c peuvent être 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 2 et 3, 2 et 4, 3 et 4 et les mêmes valeurs en ordre inverse. Il y a donc 12 triplets possibles.
En tout, il y a 20 triplets.

Solution 2
Cette solution utilise les notations $\binom{n}{r}$ et $n!$ de la combinatoire.
On choisit d'abord trois nombres de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Il y a $\binom{5}{3}$ façons, c'est-à-dire 10 façons de le faire.
Avec ces nombres, on veut former des triplets (a, b, c) de manière que $a < b$ et $b > c$. Le nombre du milieu, soit b, doit être le plus grand des trois. Il n'y a qu'un choix.
On peut placer les deux autres nombres de deux façons, soit en plaçant l'un en première position et l'autre en troisième ou dans l'ordre inverse.
Donc, chaque choix de trois nombres donne deux triplets, pour un total de 10×2 triplets, ou 20 triplets.
(Pour être plus rigoureux, il faudrait ajouter que cette façon de choisir les nombres nous

assure que les choix sont tous distincts. De plus, tous les triplets possibles peuvent être choisis de cette façon.)

(b) *Solution 1*
Chaque permutation de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ comporte un nombre dans chacune de 6 positions.
Si une permutation contient 254, en bloc dans cet ordre, alors la permutation doit être de la forme $254xyz$, $x254yz$ $xy254z$ ou $xyz254$, x, y et z étant les nombres 1, 3 et 6 dans un ordre quelconque.
Pour chacune de ces quatre formes, il y a 6 façons de placer les trois autres nombres en ordre, soit 1,3,6 ou 1,6,3 ou 3,1,6 ou 3,6,1 ou 6,1,3 ou 6,3,1.
Le nombre de permutations qui contiennent les chiffres 254 dans cet ordre en positions adjacentes est donc égal à 4×6, ou 24.

Solution 2
On traite 254 comme un bloc qu'on nomme B.
On cherche donc le nombre de permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3, B\}$.
Il y a 4! permutations, ou 24 permutations des 4 éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, B\}$. En effet, il y a 4 choix pour le premier élément ; pour chacun de ces choix, il y a 3 choix pour le deuxième élément, etc.
Le nombre de permutations qui contiennent les chiffres 254 dans cet ordre en positions adjacentes est donc égal à 4×6, ou 24.

(c) *Solution 1*
Pour déterminer le nombre moyen de sommets locaux dans les 40 320 permutations, on compte le nombre total de sommets locaux et on divise par le nombre de total de permutations.
Au lieu de compter le nombre de sommets locaux dans chaque permutation, on examine plutôt les sommets locaux possibles et on compte le nombre de permutations qui les contiennent.
Dans une permutation de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, un sommet local est une séquence abc de trois nombres de la permutation de manière que $a < b$ et $b > c$.
Combien y a-t-il de telles séquences ?
Il s'agit d'un prolongement de la partie (a). On peut utiliser l'une ou l'autre des stratégies de la partie (a) pour déterminer qu'il y a 112 telles séquences.
Soit abc une de ces 112 séquences. Combien des 40 320 permutations contiennent cette séquence en bloc ?
Il s'agit d'un prolongement de la partie (b). On peut utiliser l'une ou l'autre des stratégies de la partie (b) pour déterminer qu'il y a 6! permutations, ou 720 permutations qui la contiennent.
Donc, chacun des 112 sommets locaux possibles paraît dans 720 permutations. Il y a donc un total de 112×720, ou 80 640 sommets locaux en tout.
(Puisque chaque sommet local paraît dans une telle séquence de trois nombres, on a compté tous les lommets locaux.)
Le nombre moyen de sommets locaux dans les 40 320 permutations possibles est égal à $\frac{80\,640}{40\,320}$, ou 2.

Solution 2
Dans une permutation de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, un sommet local occupe trois

places consécutives. Il peut donc se présenter dans un de six endroits, soit dans les positions 1 à 3, 2 à 4, 3 à 5, 4 à 6, 5 à 7 ou 6 à 8.
On considère une de ces places, soit les positions 1 à 3. Le même argument s'applique aux autres places.
Quelle fraction de toutes les permutations auront un sommet local à cet endroit ?
Si on choisit trois nombres, a, b, c, de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, de manière que $a < b < c$, il y a six façons de les placer, soit abc, acb, bac, bca, cab et cba. Deux des six façons, soit acb and bca, forment un sommet local (d'après la condition $a < b < c$). Donc, $\frac{1}{3}$ des permutations de a, b et c forment un sommet local.
On considère toutes les permutations de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dont les trois premiers nombres sont a, b et c dans un ordre quelconque.
Le nombre de permutations qui commencent par abc, par acb, par bac, par bca, par cab ou par cba est le même dans chaque cas. Donc, $\frac{1}{3}$ des permutations de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ qui commencent par a, b et c, dans un ordre quelconque, ont un sommet local dans les positions 1 à 3.
Le nombre de permutations de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ qui contiennent un ensemble fixe de trois nombres dans les trois premières positions est toujours le même. Donc, $\frac{1}{3}$ des permutations de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ont un sommet local dans les positions 1 à 3.
Le même argument s'applique aux cinq autres places où un sommet local peut se produire.
Donc, le nombre moyen de sommets locaux dans les permutations de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ est égal à $6 \times \frac{1}{3}$, ou 2.