

**Concours Hypatie (11<sup>e</sup> année – Sec. V)**  
**le mercredi 20 avril 2005**

---

1. Étant donné les nombres  $a$  et  $b$ , la notation  $a \diamond b$  représente l'expression  $a^2 - 4b$ .  
Par exemple,  $5 \diamond 3 = 5^2 - 4(3)$ , d'où  $5 \diamond 3 = 13$ .

(a) Évaluer  $2 \diamond 3$ .

(b) Quelles sont toutes les valeurs de  $k$  pour lesquelles  $k \diamond 2 = 2 \diamond k$  ?

(c) Les nombres  $x$  et  $y$  sont tels que  $3 \diamond x = y$  et  $2 \diamond y = 8x$ .  
Déterminer la valeur de  $x$  et de  $y$ .

2. Un jeu se joue avec une pile de cure-dents selon les règlements suivants :

- Les deux joueurs jouent à tour de rôle.
- À son tour, un joueur peut enlever 1, 2, 3, 4 ou 5 cure-dents de la pile.
- Le même nombre de cure-dents ne peut être enlevé plus d'une fois.
- La dernière personne qui réussit à jouer est gagnante, peu importe s'il reste des cure-dents sur la table.

Par exemple, s'il y avait 8 cure-dents au départ, voici un déroulement possible :

Gilles enlève 1 cure-dent. Il en reste 7 dans la pile.

Carla enlève 4 cure-dents. Il en reste 3 dans la pile.

Gilles enlève 2 cure-dents. Il en reste 1 dans la pile.

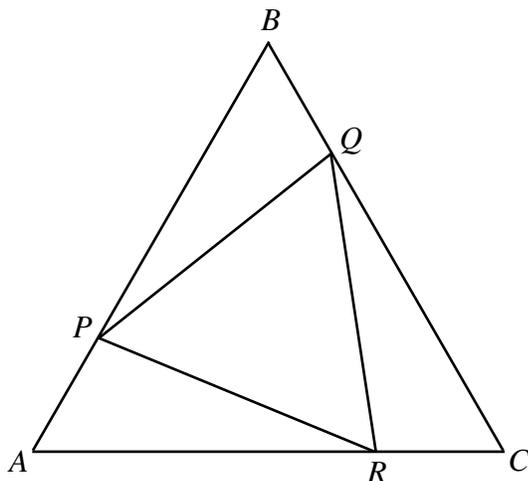
Gilles est gagnant, car Carla ne peut enlever le cure-dent qui reste. (Gilles a déjà enlevé 1 cure-dent et selon le 3<sup>e</sup> règlement, il est interdit d'enlever 1 cure-dent une autre fois.)

(a) Supposons qu'il y a 11 cure-dents au départ. Gilles enlève 3 cure-dents. Ensuite, Carla en enlève 1. Gilles en enlève alors 4. Expliquer comment Carla peut gagner.

(b) Supposons qu'il y a 10 cure-dents au départ. Gilles enlève 5 cure-dents. Expliquer pourquoi Gilles peut gagner, peu importe le nombre de cure-dents que Carla enlève à son tour.

(c) Supposons qu'il y a 9 cure-dents au départ. Gilles enlève 2 cure-dents. Expliquer pourquoi Gilles peut gagner, peu importe comment Carla joue par la suite.

3. Dans la figure suivante, le triangle  $ABC$  est équilatéral, ses côtés ayant chacun une longueur de 4. Les points  $P$ ,  $Q$  et  $R$  sont choisis sur les côtés respectifs  $AB$ ,  $BC$  et  $CA$ , de manière que  $AP = BQ = CR = 1$ .



- (a) Déterminer l'aire exacte du triangle  $ABC$ . Expliquer sa démarche.
- (b) Déterminer l'aire exacte des triangles  $PBQ$  et  $PQR$ . Expliquer sa démarche.
4. Une *permutation* d'un ensemble d'objets est un classement de ces objets dans un ordre particulier. Par exemple, 312 et 231 sont deux des permutations possibles de l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ .
- (a) Déterminer combien il existe de triplets  $(a, b, c)$  tels que les nombres  $a$ ,  $b$  et  $c$  soient trois nombres différents tirés de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , de manière que  $a < b$  et  $b > c$ . Expliquer sa démarche.
- (b) Combien y a-t-il de permutations de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  qui contiennent les chiffres 254, dans cet ordre en positions adjacentes? Expliquer sa démarche.
- (c) On dit qu'une permutation admet un *sommet local* lorsqu'elle contient une suite de 3 nombres dans laquelle le nombre du milieu est supérieur à ses deux voisins. Par exemple, la permutation 35241 de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  contient deux sommets locaux. Déterminer le nombre moyen de sommets locaux dans les 40 320 permutations possibles de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Expliquer et justifier sa démarche.