Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Galois 2005

Le mercredi 20 avril 2005

Solutions

1. (a) *Solution 1*

   On écrit les 11 premiers termes en ajoutant toujours 5 au terme précédent :

   $$17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52, 57, 62, 67$$

   Le 11^{e} terme est 67.

   Solution 2

   Puisqu'on ajoute toujours 5 au terme précédent pour obtenir le terme suivant, on doit ajouter 10 fois le nombre 5 au terme initial, soit 17, pour obtenir le 11^{e} terme.
   Le 11^{e} terme est donc égal à $17 + 5(10)$, ou 67.

   (b) *Solution 1*

   Chaque terme de la 1^{re} suite se termine par un 7 ou un 2. En effet, on ajoute toujours 5 au terme précédent pour obtenir le terme suivant et lorsqu'on ajoute 5 à un nombre qui se termine par un 7, on obtient un nombre qui se termine par un 2 ; lorsqu'on ajoute 5 à un nombre qui se termine par un 2, on obtient un nombre qui se termine par un 7.
   Chaque terme de la 2^{e} suite se termine par un 3 ou un 8. En effet, on ajoute 15 au terme précédent pour obtenir le terme suivant et lorsqu'on ajoute 15 à un nombre qui se termine par un 3, on obtient un nombre qui se termine par un 8 ; lorsqu'on ajoute 15 à un nombre qui se termine par un 8, on obtient un nombre qui se termine par un 3.
   Il n'existe aucun nombre qui soit un terme de chaque suite, car il n'existe aucun nombre qui se termine par deux chiffres différents.

   Solution 2

   Chaque terme de la 1^{re} suite est de la forme $17 + 5n$, n étant un entier non négatif quelconque.
   Chaque terme de la 2^{e} suite est de la forme $13 + 15m$, m étant un entier non négatif quelconque.
   Pour qu'un nombre soit un terme de chaque suite, il faudrait que $17 + 5n = 13 + 15m$, c'est-à-dire que $4 = 15m - 5n$, ou $4 = 5(3m - n)$.
   Or, le membre de droite est un multiple de 5, tandis que le membre de gauche ne l'est pas. Cette dernière équation n'admet donc aucune solution, c'est-à-dire aucune valeur de m et de n qui la vérifie.
   Donc, il n'existe aucun nombre qui soit un terme de chaque suite.

   (c) *Solution 1*

   On remarque que 22 est un terme de chaque suite.
   Puisque la différence entre les termes consécutifs de la 1^{re} suite est de 5 et que celle de la 2^{e} suite est de 6, alors un nombre qui est 30 (soit 5×6) de plus que 22 sera aussi un terme de chaque suite. (En effet, lorsqu'on ajoute 30 à un terme de la 1^{re} suite, on avance de 6 termes. Lorsqu'on ajoute 30 à un terme de la 2^{e} suite, on avance de 5 termes.)
   Les nombres qui sont des termes des deux suites sont 22, 52, 82, 112, 142, 172, 202, 232, 262, 292, 322, 352, 382, 412, ...
   Donc le nombre, entre 400 et 420, qui est un terme de chaque suite est 412.

   Solution 2

   Puisque la différence entre les termes consécutifs de la 1^{re} suite est de 5, cette suite contient tous les entiers positifs, à partir de 17, qui se terminent par un 2 ou un 7.
   Donc, les termes de la 1^{re} suite, entre 400 et 420, sont 402, 407, 412 et 417.
   Lequel de ces quatre nombres est aussi un terme de la 2^{e} suite ?

Puisque la différence entre les termes consécutifs de la 2e suite est de 6, tous les termes de cette suite sont de la forme $16 + 6n$, n étant un entier non négatif.
On cherche donc un entier n tel que $16 + 6n = 402$, $16 + 6n = 407$, $16 + 6n = 412$ ou $16+6n = 417$, c'est-à-dire tel que $6n = 386$, $6n = 391$, $6n = 396$ ou $6n = 401$. On voit que la 2e et la 4e équation ont un membre de gauche pair et un membre de droite impair. Elles n'admettent donc aucune solution entière. On voit aussi que 386 n'est pas divisible par 3. Il n'est donc pas divisible par 6. La 1re équation n'admet donc aucune solution entière. On vérifie que l'équation $6n = 396$ admet une solution, soit $n = 66$.
Donc, le nombre 412 est un terme de chaque suite.

2. (a) Il reste un 5 et deux 6 à placer. Il n'y a que trois façons de les placer :

1	3	6	5
3	1	2	2
5	4	4	6

(sommes des colonnes : 9, 8, 12, 13 ; sommes des rangées : 15, 8, 19)

1	3	5	5
3	1	2	2
6	4	4	6

(sommes des colonnes : 10, 8, 11, 13 ; sommes des rangées : 14, 8, 20)

1	3	6	5
3	1	2	2
6	4	4	5

(sommes des colonnes : 10, 8, 12, 12 ; sommes des rangées : 15, 8, 19)

La première façon donne plus de points à Isaac :

1	3	6	5
3	1	2	2
5	4	4	6

Isaac obtient 4 points et Paulette en obtient 3.

(b) Il y a 4 colonnes et 3 rangées. Chacune fournit 1 point pour un total de 7 points. Le nombre de points d'Isaac et de Paulette doit donc avoir une somme de 7.
Puisque 7 est un nombre impair, Isaac et Paulette ne peuvent pas obtenir le même nombre de points.

(c) *Solution 1*
Il reste deux 2, un 4 et un 5 à placer, c'est-à-dire trois nombres pairs et un nombre impair. La quatrième colonne est déjà remplie et elle a une somme paire, ce qui accorde un point à Paulette.
On considère les 1re et 3e colonnes, ainsi que les 1re et 3e rangées.
Chacune a un espace vide et, à ce point, une somme paire.
Si un nombre pair est placé dans un espace vide d'une colonne ou d'une rangée, celle-ci sera complète et sa somme sera paire, ce qui accordera un point à Paulette. Si un nombre impair y est placé, la colonne ou la rangée sera complète et sa somme sera impaire, ce qui accordera un point à Isaac.
Or, il ne reste qu'un numéro impair à jouer. Donc, une seule de ces colonnes ou de ces rangées aura une somme impaire, tandis que trois d'entre elles auront une somme paire.
Donc, peu importe où Isaac place le 5, Paulette recevra au moins 3 points de plus pour un total d'au moins 4 points.

Isaac obtiendra au plus 3 points, car il y a un total de 7 points disponibles.

Solution 2
Il reste deux 2, un 4 et un 5 à placer, c'est-à-dire trois nombres pairs et un nombre impair.
Supposons qu'Isaac place son 5 dans la 1re colonne.
La somme de la 1re rangée est égale à $1+2+3+6$ ou $1+4+3+6$. Elle est donc paire.
La somme de la 3e rangée est égale à $3+2+1+6$ ou $3+4+1+6$. Elle est donc paire.
La somme de la 4e colonne est égale à 16. Elle est paire.
La somme de la 3e colonne est égale à $3+2+1$ ou $3+4+1$. Elle est donc paire.
Dans ce cas, Paulette recevra au moins 4 points et Isaac en recevra au plus 3. Elle gagnera.

Si Isaac place le 5 dans la 3e colonne, l'argument est le même que pour le cas précédent, sauf qu'on considère la 3e colonne au lieu de la 1re. Paulette obtient au moins 4 points.

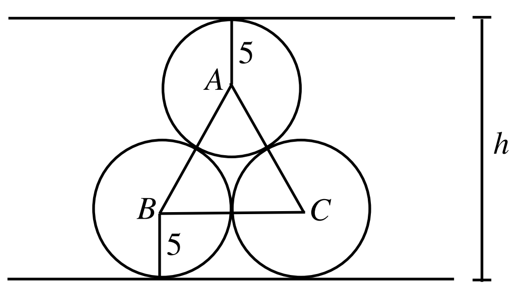
Supposons qu'Isaac place le 5 dans la 1re rangée.
Il reste alors deux 2 et un 4 à placer.
La somme de la 3e rangée est égale à $3+2+1+6$ ou $3+4+1+6$. Elle est donc paire.
La somme de la 4e colonne est égale à 16. Elle est paire.
La somme de la 1re colonne et celle de la 3e colonne est égale à $3+2+1$ ou $3+4+1$. Elle est donc paire.
Dans ce cas, Paulette recevra au moins 4 points et Isaac en recevra au plus 3. Elle gagnera.

Si Isaac place le 5 dans la 3e rangée, l'argument est le même que pour le cas précédent, sauf qu'on considère la 1re rangée au lieu de la 3e. Paulette obtient au moins 4 points.

Dans chacun des cas possibles, Paulette gagne, peu importe où Isaac place le 5.

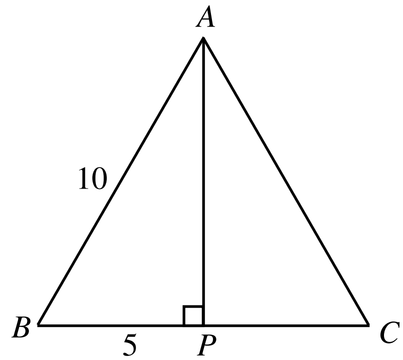
3. (a) Dans la 1re caisse, il y a 10 tuyaux par rangée. Puisque la caisse contient 200 tuyaux, elle contient 10 rangées de tuyaux.
Dans la 2e caisse, le nombre de tuyaux par rangée alterne entre 9 et 10. Dans deux rangées adjacentes, il y a un total de 19 tuyaux. Dans 20 rangées, il y a donc 190 tuyaux. La rangée du dessus a 9 tuyaux, car les rangées dont le numéro est pair contiennent chacune 9 tuyaux. Donc, si on ajoute une autre rangée de tuyaux, on ajoute 10 tuyaux pour un total de 200 tuyaux. Donc, il y a 21 rangées de tuyaux dans la 2e caisse.

(b) Soit A, B et C le centre des trois cercles. On les joint pour former un triangle.
Les segments AB, BC et CA passent chacun par un point de contact de deux cercles. Chacun a donc une longueur de 10 cm, soit le double du rayon d'un cercle.
On divise la hauteur de la pile en trois parties, soit la distance entre le bas de la pile et le segment BC, la hauteur du triangle équilatéral ABC et la distance de A jusqu'au sommet de la pile.



La première et la troisième partie ont chacun une hauteur de 5 cm, soit le rayon d'un cercle.

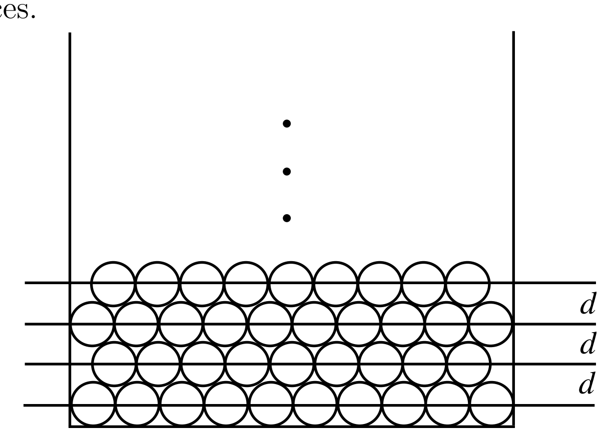
Il reste à déterminer la hauteur du triangle ABC, qui est équilatéral avec des côtés de 5 cm.
On peut s'y prendre de plusieurs façons.
On abaisse la hauteur AP.
Puisque $AB = AC$, alors P est le milieu de BC, d'où $BP = 5$ cm.



Le triangle ABP est un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $AP = \sqrt{3}BP$, d'où $AP = 5\sqrt{3}$ cm.
La hauteur de la pile est donc égale à $(5 + 5\sqrt{3} + 5)$ cm, ou $(10 + 5\sqrt{3})$ cm.

(c) Dans la 1re caisse, il y a 20 rangées de 10 tuyaux empilés directement les uns sur les autres. La hauteur totale de la pile est égale à 20 fois le diamètre d'un tuyau, c'est-à-dire à 200 cm.

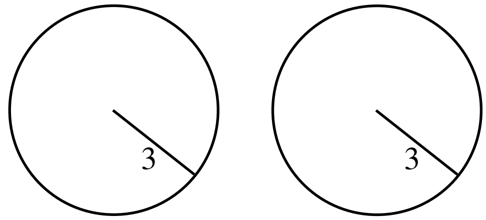
Pour calculer la hauteur de la pile dans la 2e caisse, on trace une ligne horizontale à travers le centre des tuyaux de chaque pile.
La distance entre deux droites consécutives est la même, disons d. Puisqu'il y a 21 rangées, il y a 20 telles distances.



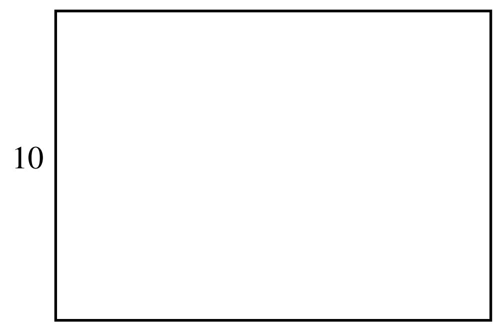
La distance entre le bas de la pile et la ligne du bas est égale au rayon d'un tuyau. Il en est de même de la distance entre la ligne du haut et le haut de la pile. La hauteur de la pile dans la 2e caisse est donc égale à $(10 + 20d)$ cm.
Quelle est la valeur de d ?
Si on considère trois tuyaux placés comme dans la partie (b), on voit que d est égal à la hauteur du triangle équilatéral de (b). On a donc $d = 5\sqrt{3}$ cm.
La hauteur de la pile dans cette caisse est égale à $(10 + 100\sqrt{3})$ cm, soit environ 183,2 cm.

La différence entre la hauteur totale des deux piles est de $[200 - (10 + 100\sqrt{3})]$ cm, ou $(190 - 100\sqrt{3})$ cm, ou environ 16,8 cm. La 1re pile est la plus haute.

4. (a) Pour calculer l'aire totale du cylindre, on imagine qu'on découpe les deux extrémités pour obtenir deux disques de rayon 3.



L'aire totale des disques est égale à $2\pi r^2$, c'est-à-dire à $2\pi(3^2)$, ou 18π.
On calcule ensuite l'aire de la surface latérale.
Pour la calculer, on découpe la surface latérale à la verticale et on la déroule pour la placer à plat.
On obtient alors un rectangle de hauteur 10. La base du rectangle est égale à la circonférence du cylindre avant le déroulement.



Cette circonférence est égale à $2\pi r$, c'est-à-dire à $2\pi(3)$, ou 6π. La base du rectangle a donc une longueur de 6π.
L'aire du rectangle est donc égale à $10 \times 6\pi$, ou 60π.
L'aire totale du cylindre est égale à $18\pi + 60\pi$, ou 78π.
Le volume du cylindre est égal à $\pi r^2 h$, c'est-à-dire à $\pi(3^2)(10)$, ou 90π.

(b) Le volume de la sphère est égal à $\frac{4}{3}\pi r^3$ et celui du cylindre est égal à $\pi r^2 H$. Puisque ces volumes sont égaux, alors $\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^2 H$, d'où $H = \frac{4}{3}r$ (on a divisé chaque membre par πr^2).
D'après le travail de la partie (a) et en généralisant, on voit qu'un cylindre de rayon r et de hauteur H a une aire totale de $2\pi r^2 + 2\pi r H$ (aire des extrémités plus l'aire latérale).
Il est donné que l'aire totale d'un cône de rayon r et de hauteur h est égale à $\pi r^2 + \pi r s$, s étant la longueur de la génératrice.
Puisque le cône et le cylindre ont la même aire totale, alors :

$$\begin{aligned} 2\pi r^2 + 2\pi r H &= \pi r^2 + \pi r s \\ 2r + 2H &= r + s \qquad \text{(On a divisé chaque membre par } \pi r.\text{)} \\ r + 2H &= s \end{aligned}$$

Puisqu'on veut démontrer une relation entre h et H, on devrait tenter d'éliminer s.
On trace un segment entre le sommet (l'apex) du cône et le centre de la base du cône. Puisque ce segment est perpendiculaire à la base, il forme un triangle rectangle ayant une hypoténuse de longueur s et des cathètes de longueurs r et h.
D'après le théorème de Pythagore, $s = \sqrt{r^2 + h^2}$.
L'équation ci-haut devient alors $r + 2H = \sqrt{r^2 + h^2}$.
Or, on sait que $H = \frac{4}{3}r$, d'où $r = \frac{3}{4}H$. On reporte $r = \frac{3}{4}H$ dans l'équation précédente

pour qu'elle soit exprimée en fonction de H et de h seulement :

$$\begin{aligned}
r + 2H &= \sqrt{r^2 + h^2} \\
\frac{3}{4}H + 2H &= \sqrt{\left(\frac{3}{4}H\right)^2 + h^2} \\
\frac{11}{4}H &= \sqrt{\frac{9}{16}H^2 + h^2} \\
\frac{121}{16}H^2 &= \frac{9}{16}H^2 + h^2 \qquad \text{(On a mis chaque membre au carré.)} \\
\frac{112}{16}H^2 &= h^2 \\
7H^2 &= h^2
\end{aligned}$$

Puisque $h^2 = 7H^2$, alors $h = \sqrt{7}H$. Donc, h et H ne peuvent tous deux être des entiers, car $\sqrt{7}$ est un nombre irrationnel.