Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fryer 2005

Le mercredi 20 avril 2005

Solutions

1. (a) L'aire d'un cercle de rayon r est égale à πr^2.
L'aire du grand cercle est égale à $\pi(10^2)$, ou 100π, et l'aire du petit cercle est égale à $\pi(6^2)$, ou 36π.
L'aire de l'anneau ombré est égale à la différence des deux aires.
Elle est donc égale à $100\pi - 36\pi$, ou 64π.

(b) L'aire du petit cercle (l'aire de la région X) est égale à $\pi(4^2)$, ou 16π.
On utilise la même méthode que dans la partie (a) pour déterminer l'aire de l'anneau au milieu (région Y) : Elle est égale à $\pi(6^2) - \pi(4^2)$, c'est-à-dire à $36\pi - 16\pi$, ou 20π.
De même, l'aire du grand anneau (région Z) est égale à $\pi(7^2) - \pi(6^2)$, c'est-à-dire à $49\pi - 36\pi$, ou 13π.
Donc, la région Y a la plus grande aire.

(c) L'aire de l'anneau formé par les deux grands cercles est égale à $\pi(13^2) - \pi(12^2)$, c'est-à-dire à $169\pi - 144\pi$, ou 25π.
Soit r le rayon du petit cercle.
L'aire du petit cercle est donc égale à πr^2.
Puisque l'aire de l'anneau formé par les deux grands cercles est égale à l'aire du plus petit cercle, alors $\pi r^2 = 25\pi$, d'où $r^2 = 25$ et $r = 5$, puisque $r > 0$.
Le petit cercle a donc un rayon de 5.

2. (a) Anne joue en premier et place un A dans la case du milieu.
Bruno ne peut pas placer deux initiales, car il aurait besoin de deux cases adjacentes. Il peut donc seulement placer un B dans une des deux cases non adjacentes.

B	A	

	A	B

Il reste une case vide. Anne place un A dans cette case et gagne.
Anne gagne donc, peu importe le jeu de Bruno.

(b) *Solution 1*
Anne place un A dans la cinquième case.

B		A		A

Bruno peut seulement placer un B dans une des cases vides, car elles ne sont pas adjacentes.
Anne peut placer un A dans la dernière case vide et elle gagne.
Anne peut donc gagner en plaçant un A dans la cinquième case.

Solution 2
Anne place un A dans la quatrième case.

B		A	A	

Bruno peut seulement placer un B dans une des cases vides, car elles ne sont pas adjacentes.
Anne peut placer un A dans la dernière case vide et elle gagne.
Anne peut donc gagner en plaçant un A dans la quatrième case.

Solution 3
Anne place un A dans la cinquième case.

B		A		A

On enlève la première et la cinquième case. Il reste trois cases avec la lettre A au milieu. C'est au tour de Bruno de jouer.
Puisque la situation est la même que dans la partie (a), Anne gagne.

(c) 1re possibilité
Bruno place un B dans les quatrième et cinquième cases.

	A		B	B

Anne peut seulement placer un A dans une des cases vides, car elles ne sont pas adjacentes.
Bruno place un B dans la dernière case vide et il gagne.
Donc, Bruno peut s'assurer d'une victoire avec ce coup.

2e possibilité
Bruno place un B dans les troisième et quatrième cases.

	A	B	B	

Anne peut seulement placer un A dans une des cases vides, car elles ne sont pas adjacentes.
Bruno place un B dans la dernière case vide et il gagne.
Donc, Bruno peut s'assurer d'une victoire avec ce coup.

Ces coups sont les deux seuls qui assurent une victoire à Bruno.
(Il y a quatre autres coups possibles, soit de placer un seul B dans une des quatre cases vides. Pourquoi ces coups assurent-ils une victoire à Anne ?)

3. (a) *Solution 1*
Puisque dans un triangle de Nakamoto les côtés ont des longueurs entières dans le rapport 3 : 4 : 5, alors les longueurs doivent être des produits de 3, de 4 et de 5 par un même entier.
Puisqu'un des côtés a une longueur de 28, cette longueur est un multiple de 4, soit 4×7.
Les autres longueurs doivent être 3×7 et 5×7, ou 21 et 35.

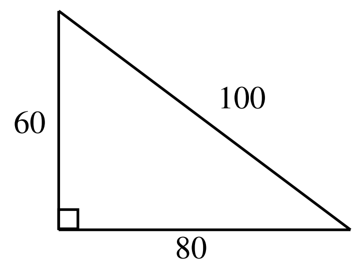
Solution 2
Puisque dans un triangle de Nakamoto les côtés ont des longueurs entières dans le rapport 3 : 4 : 5, alors les longueurs doivent égaler $3x$, $4x$ et $5x$, pour une valeur entière de x.
Puisqu'une de ces longueurs est égale à 28, alors $4x = 28$ (ou $x = 7$), puisque 28 n'est pas un multiple de 3 ou de 5.
Donc, les autres longueurs doivent être 3×7 et 5×7, ou 21 et 35.

(b) *Solution 1*
Puisque dans un triangle de Nakamoto les côtés ont des longueurs entières dans le rapport 3 : 4 : 5, alors les longueurs doivent être des produits de 3, de 4 et de 5 par un même entier.
Le plus petit triangle de Nakamoto a des côtés de longueurs 3, 4 et 5. Son pémimètre est égal à $3 + 4 + 5$, ou 12.
Puisque le triangle donné a un périmètre de 96 et que $96 = 12 \times 8$, ses côtés ont donc une

longueur respective de 3×8, 4×8 et 5×8.
Le triangle a donc des côtés de longueurs 24, 32 et 40.

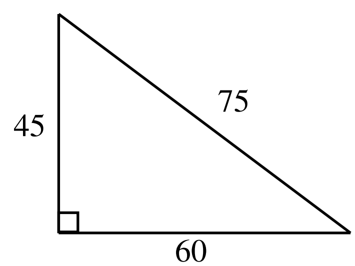
Solution 2
Puisque dans un triangle de Nakamoto les côtés ont des longueurs entières dans le rapport $3 : 4 : 5$, alors les longueurs doivent égaler $3x$, $4x$ et $5x$, pour une valeur entière de x.
Puisque le triangle donné a un périmètre de 96, alors $3x + 4x + 5x = 96$, d'où $12x = 96$, ou $x = 8$.
Le triangle a donc des côtés de longueurs 3×8, 4×8 et 5×8, ou 24, 32 et 40.

(c) Puisque 60 est un multiple de 3, $(60 = 20 \times 3)$, il existe un triangle de Nakamoto dont les côtés ont une longueur respective de 20 fois les longueurs 3, 4 et 5. Les côtés ont donc une longueur respective de 60, 80 et 100.
Les longueurs étant dans le rapport $3 : 4 : 5$, ce triangle est rectangle. On peut vérifier que $60^2 + 80^2 = 100^2$, et que les cathètes ont une longueur respective de 60 et 80.



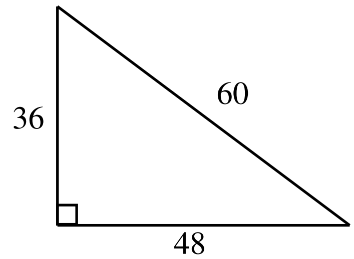
L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(60)(80)$, ou 2400.

Puisque 60 est un multiple de 4, $(60 = 15 \times 4)$, il existe un triangle de Nakamoto dont les côtés ont une longueur respective de 15 fois les longueurs 3, 4 et 5. Les côtés ont donc une longueur respective de 45, 60 et 75.
Puisque l'hypoténuse a une longueur de 75, 75 étant la plus grande longueur, les cathètes ont une longueur respective de 45 et 60.



L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(45)(60)$, ou 1350.

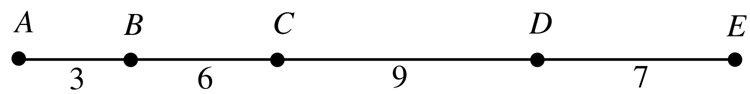
Puisque 60 est un multiple de 5, $(60 = 12 \times 5)$, il existe un triangle de Nakamoto dont les côtés ont une longueur respective de 12 fois les longueurs 3, 4 et 5. Les côtés ont donc une longueur respective de 36, 48 et 60.
Puisque l'hypoténuse a une longueur de 60, 60 étant la plus grande longueur, les cathètes ont une longueur respective de 36 et 48.



L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(36)(48)$, ou 864.

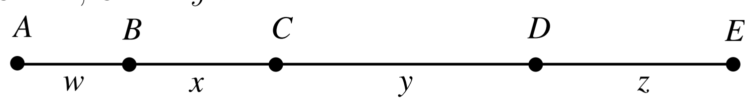
Donc, un triangle de Nakamoto qui a un côté de longueur 60 doit avoir une aire de 2400, de 1350 ou de 864.

4. (a)



On a $AB = 3$, $AC = 9$, $AD = 18$, $AE = 25$, $BC = 6$, $BD = 15$, $BE = 22$, $CD = 9$, $CE = 16$ et $DE = 7$.
La super-somme de AE est égale à $3 + 9 + 18 + 25 + 6 + 15 + 22 + 9 + 16 + 7$, ou 130.

(b) *Solution 1*
Si les 10 segments ont pour longueur respective les entiers de 1 à 10, alors la super-somme de AE est égale à $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$, ou 55.
Soit $AB = w$, $BC = x$, $CD = y$ et $DE = z$.

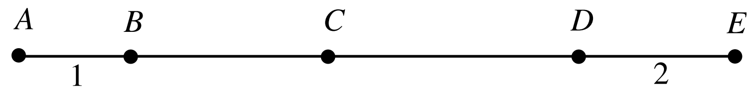


Puisque les segments de base ont une longueur entière, les segments ont tous une longueur entière.
On écrit la longueur de chaque segment en fonction de w, x, y et z.
On a $AB = w$, $AC = w + x$, $AD = w + x + y$, $AE = w + x + y + z$, $BC = x$, $BD = x + y$, $BE = x + y + z$, $CD = y$, $CE = y + z$ et $DE = z$.
La super-somme de AE est égale à :

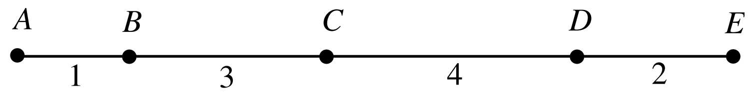
$$w+(w+x)+(w+x+y)+(w+x+y+z)+x+(x+y)+(x+y+z)+y+(y+z)+z = 4w+6x+6y+4z$$

Puisque $4w + 6x + 6y + 4z = 2(2w + 3x + 3y + 2z)$, la super-somme est donc un nombre pair. Elle ne peut donc pas égaler 55.
Il est donc impossible pour le segment AE d'avoir des segments qui ont pour longueur respective les entiers de 1 à 10.

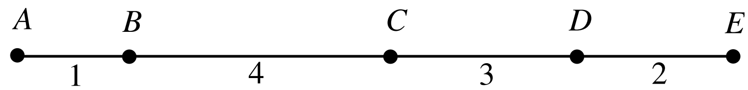
Solution 2
Puisque AE est le segment le plus long, alors on doit avoir $AE = 10$.
Puisque la somme de la longueur des segments de base est égale à la longueur de AE et que ces longueurs font partie de la liste, elles doivent avoir une longueur respective de 1, 2, 3 et 4.
Pour avoir un segment de longueur 9, il faut que les segments de base de longueurs 2, 3 et 4 soient en positions adjacentes. Le segment de base de longueur 1 doit donc se trouver à une extrémité.
Pour avoir un segment de longueur 8, il faut que les segments de base de longueurs 1, 3 et 4 soient en positions adjacentes. Le segment de base de longueur 2 doit donc se trouver à une extrémité.



Il y a donc deux possibilités :

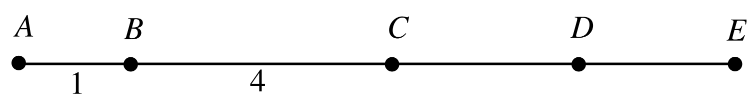


ou



Dans le premier cas, il n'y a aucun segment de longueur 5 et il y a deux segments de longueur 4, soit AC et CD, ce qui contredit la condition initiale.
Dans le deuxième cas, il n'y a aucun segment de longueur 6 et il y a deux segments de longueur 5, soit AC et CE, ce qui contredit la condition initiale.
Puisque les deux possibilités contredisent la condition initiale, il est impossible pour le segment AE d'avoir des segments qui ont pour longueur respective les entiers de 1 à 10.

Solution 3
Puisque AE est le segment le plus long, alors on doit avoir $AE = 10$.
Puisque la somme de la longueur des segments de base est égale à la longueur de AE et que ces longueurs font partie de la liste, elles doivent avoir une longueur respective de 1, 2, 3 et 4.
Pour éviter qu'une même longueur soit répétée, il ne faut pas que le segment de longueur 2 ou 3 soit à côté du segment de longueur 1.
Il faut donc que le segment de longueur 1 soit placé à une extrémité avec le segment de longueur 4 à son côté.



On a alors les segments de base de longueurs 2 et 3 l'un à côté de l'autre, ce qui donne deux segments de longueur 5. Cela contredit la condition initiale.
Il est donc impossible pour le segment AE d'avoir des segments qui ont pour longueur respective les entiers de 1 à 10.

(c) *Solution 1*
Qu'arrive-t-il à la super-somme lorsqu'on ajoute un segment de base JK de longueur $\frac{1}{10}$?
Les segments de AK incluent tous les segments de AJ (dont la somme des longueurs est égale à 45), ainsi que d'autres segments.
Ces derniers segments sont des segments de AK, mais pas de AJ. En d'autres mots, ce sont des segments qui comprennent le segment de base JK. Ce sont donc les segments JK, IK, HK, ainsi de suite, jusqu'à BK et AK.
Quelle est la longueur de chacun de ces segments ?
$JK = \frac{1}{10}$
$IK = IJ + JK = \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$
$HK = HI + IJ + JK = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$
$\vdots$
$AK = AB + BC + \cdots + IJ + JK = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$

Chacun de ces 10 segments contient le segment de base JK, 9 contiennent IJ, 8 contiennent HI, etc., 2 contiennent BC et 1 contient AB.
La super-somme de AK est donc égale à $45+10\left(\frac{1}{10}\right)+9\left(\frac{1}{9}\right)+\cdots+2\left(\frac{1}{2}\right)+1(1)$, c'est-à-dire à $45+10$, ou 55.
Qu'arrive-t-il à la super-somme lorsqu'on ajoute un segment de base KL de longueur $\frac{1}{11}$?
Comme ci-haut, cela ajoutera aux segments déjà contenus dans AK 11 segments contenant KL, 10 segments contenant JK, ainsi de suite, jusqu'à 1 segment contenant AB.
La super-somme de AL est donc égale à $55+11\left(\frac{1}{11}\right)+10\left(\frac{1}{10}\right)+\cdots+1(1)$, c'est-à-dire à $55+11$, ou 66. De la même manière, à mesure qu'on ajoute les autres segments de base pour en arriver au segment AP, on ajoute 12, puis 13, puis 14, puis 15 à la super-somme.
La super-somme de AP est donc égale à $66+12+13+14+15$, ou 120.

Solution 2
Chaque segment de AP est formé de segments de base adjacents. On peut déterminer la super-somme de AP en comptant le nombre de segments qui contiennent chaque segment de base. On détermine ainsi la contribution de chaque segment de base à la super-somme.
Le segment de base AB se retrouve dans les segments AB, AC, ..., AP, ou dans 15 segments en tout.
Par symétrie, OP se retrouve aussi dans 15 segments.
Le segment de base BC se retrouve dans les segments BC, BD, ..., BP (soit dans 14 segments), ainsi que dans les segments AC, AD, ..., AP (soit dans 14 autres segments). Il se retrouve donc dans 28 segments en tout.
Par symétrie, NO se retrouve aussi dans 28 segments.
Y a-t-il une façon plus efficace de compter le nombre de segments dans lequel chaque segment de base se retrouve sans avoir à tous les nommer ?
On considère de nouveau le segment BC.
Un segment qui contient BC doit avoir pour extrémité gauche A ou B (2 possibilités) et pour extrémité droite un point de C à P (14 possibilités). Chaque choix d'une extrémité gauche et d'une extrémité droite est possible, ce qui donne 2×14 segments, ou 28 segments possibles. (On peut utiliser le même argument pour NO, avec 14 extrémités gauches possibles et 2 extrémités droites possibles.)
On construit un tableau dans lequel on indique chacun des autres segments de base, le nombre d'extrémités gauches possibles pour un segment qui le contient, le nombre d'extrémités droites possibles et le nombre total de segments qui le contiennent :

Segments de base	Nombre possible d'extrémités gauches	Nombre possible d'extrémités droites	Nombre total de segments
CD	3	13	39
DE	4	12	48
EF	5	11	55
FG	6	10	60
GH	7	9	63
HI	8	8	64
IJ	9	7	63
JK	10	6	60
KL	11	5	55
LM	12	4	48
MN	13	3	39

La super-somme est donc égale à :

$15(1) + 28(\frac{1}{2}) + 39(\frac{1}{3}) + 48(\frac{1}{4}) + 55(\frac{1}{5}) + 60(\frac{1}{6}) + 63(\frac{1}{7}) + 64(\frac{1}{8}) + 63(\frac{1}{9}) + 60(\frac{1}{10}) + 55(\frac{1}{11}) + 48(\frac{1}{12}) + 39(\frac{1}{13}) + 28(\frac{1}{14}) + 15(\frac{1}{15})$
ou

$$15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

La super-somme de AP est égale à 120.