Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat 2005

(11^{e} année ou Secondaire V)

Le mercredi 23 février 2005

Solutions

1. On calcule : $\dfrac{150 + (150 \div 10)}{15 - 5} = \dfrac{150 + 15}{10} = \dfrac{165}{10} = 16{,}5$

Réponse : (E)

2. Puisque $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, alors $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{9} = \frac{1}{2}$.

Réponse : (B)

3. *Solution 1*
Puisque $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{2}{3}$, alors $\dfrac{6a + 18b}{12a + 6b} = \dfrac{6(\frac{1}{2}) + 18(\frac{2}{3})}{12(\frac{1}{2}) + 6(\frac{2}{3})} = \dfrac{3 + 12}{6 + 4} = \dfrac{15}{10} = \dfrac{3}{2}$.

Solution 2
Puisque $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{2}{3}$, alors $\dfrac{6a + 18b}{12a + 6b} = \dfrac{6(a + 3b)}{6(2a + b)} = \dfrac{a + 3b}{2a + b} = \dfrac{\frac{1}{2} + 3(\frac{2}{3})}{2(\frac{1}{2}) + \frac{2}{3}} = \dfrac{2\frac{1}{2}}{1\frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{3}} = \dfrac{3}{2}$.

Réponse : (E)

4. Puisque $\sqrt{4 + 9 + x^2} = 7$, alors $4 + 9 + x^2 = 7^2$, ou $13 + x^2 = 49$, d'où $x^2 = 36$.
Les valeurs possibles de x sont donc 6 et -6. Donc, la réponse est (A).

Réponse : (A)

5. Pendant que la pièce de monnaie roule de P à Q, le F sur la face de la pièce subit une rotation de 270° dans le sens des aiguilles d'une montre.
Puisque la distance de Q à R est égale à la distance de P à Q, alors le F subit une autre rotation de 270° dans le sens des aiguilles d'une montre. La pièce est donc orientée comme suit : 

Réponse : (C)

6. Les quatre nombres, 1, 2, 3 et 4, se répètent à tous les quatre termes.
Combien de fois cette séquence 1,2,3,4 est-elle répétée dans les 2005 premiers termes ?
Puisque 2005 divisé par 4 donne un quotient de 501 et un reste de 1, alors la séquence $1, 2, 3, 4$ se répète 501 fois et le 2005ᵉ terme est donc 1.
La somme des 2005 premiers termes de la suite est donc égale à $501(1+2+3+4)+1$, c'est-à-dire à $501(10) + 1$, ou 5011.

Réponse : (A)

7. On sait que $\angle A = \angle B + 21°$ et $\angle C = \angle B + 36°$.
Puisque la somme de la mesure des angles d'un triangle est égale à 180°, alors :

$$\begin{aligned}
\angle A + \angle B + \angle C &= 180° \\
\angle B + 21° + \angle B + \angle B + 36° &= 180° \\
3(\angle B) + 57° &= 180° \\
3(\angle B) &= 123° \\
\angle B &= 41°
\end{aligned}$$

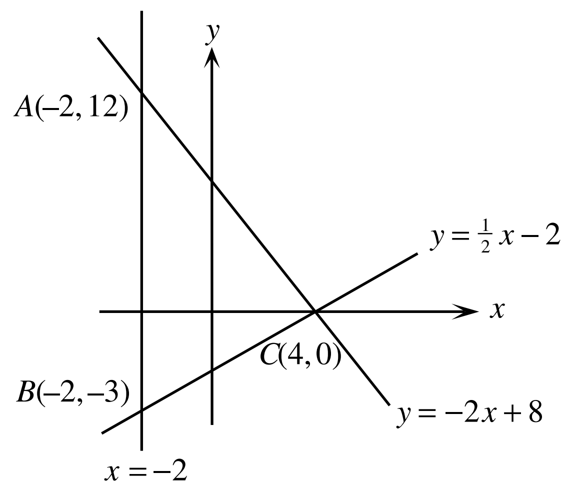
Réponse : (B)

8. *Solution 1*
On considère que les enfants sont placés en ordre, du plus jeune au plus vieux. Puisque les sept enfants sont nés sept années consécutives, le septième a 4 ans de plus que le troisième, le sixième a 4 ans de plus que le deuxième et le cinquième a 4 ans de plus que le premier.
Puisque la somme de l'âge des trois plus jeunes est égale à 42 ans, alors la somme de l'âge des trois plus vieux, en années, est égale à $42 + 4 + 4 + 4$, ou 54.

Solution 2
Puisque les âges sont des entiers consécutifs, soit x, $x + 1$ et $x + 2$ l'âge des trois plus jeunes enfants, en années.
Donc $x + x + 1 + x + 2 = 42$, ou $3x + 3 = 42$, d'où $x = 13$.
Les enfants ont donc 13 ans, 14 ans, 15 ans, 16 ans, 17 ans, 18 ans et 19 ans.
Donc, la somme de l'âge des trois plus vieux, en années, est égale à $17 + 18 + 19$, ou 54.

Réponse : (B)

9. On détermine d'abord les points où les droites obliques coupent la droite verticale. Aux points d'intersection, on a $x = -2$.
Pour l'intersection avec la droite d'équation $y = -2x + 8$, posons $x = -2$. On a $y = -2(-2) + 8$, d'où $y = 12$. Le point d'intersection a pour coordonnées $(-2{,}12)$.
Pour l'intersection avec la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 2$, posons $x = -2$. On a $y = \frac{1}{2}(-2) - 2$, ou $y = -3$. Le point d'intersection a pour coordonnées $(-2, -3)$.



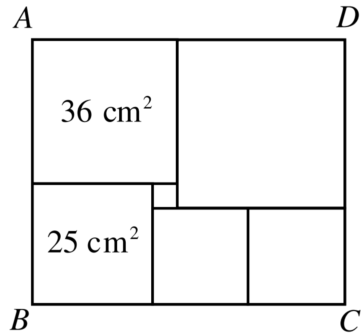
Le triangle ABC a donc une base AB de longueur $12 - (-3)$, ou 15. La hauteur correspondante est mesurée sur l'axe des abscisses, entre le sommet C et le segment AB. Sa longueur est de $4 - (-2)$, ou 6.
L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(15)(6)$, ou 45.

Réponse : (E)

10. Si 50 % de P est égal à 20 % de Q, alors $\frac{1}{2}P = \frac{1}{5}Q$, d'où $P = \frac{2}{5}Q$.
Donc, P est égal à 40 % de Q.

Réponse : (C)

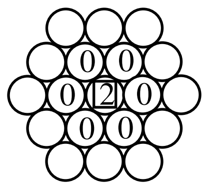
11. Puisque le carré supérieur gauche a une aire de 36 cm^2, ses côtés ont une longueur de 6 cm.
Puisque le carré inférieur gauche a une aire de 25 cm^2, ses côtés ont une longueur de 5 cm.
La hauteur AB du rectangle $ABCD$ est de $(5 + 6)$ cm, ou 11 cm.



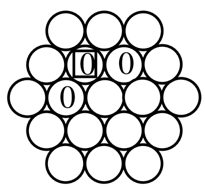
Puisque le carré supérieur gauche a des côés de 6 cm et que le carré inférieur gauche a des côtés de 5 cm, alors le petit carré, au milieu, a des côtés de 1 cm.
Le carré supérieur droit a donc des côtés de $(6 + 1)$ cm, ou 7 cm.
La longueur AD du rectangle $ABCD$ est donc égale à $(6 + 7)$ cm, ou 13 cm.
Le périmètre du rectangle $ABCD$ est égal à $[2(13) + 2(11)]$ cm, ou 48 cm.

Réponse : (E)

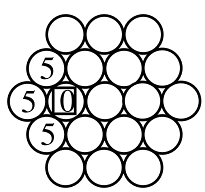
12. À partir du 2 au centre, on peut se déplacer vers six chiffres 0.



À partir de n'importe quel 0, on peut se déplacer vers deux chiffres 0.



À partir de n'importe quel 0, on peut se déplacer vers trois chiffres 5.

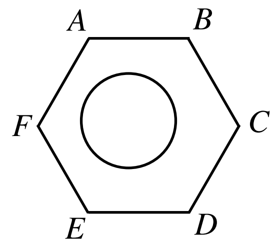


Pour chacun des 6 choix du premier chiffre 0, on peut choisir n'importe quel des 2 chiffres disponibles pour le deuxième 0 et dans chaque cas, on peut choisir n'importe quel des 3 chiffres 5 disponibles.
Le nombre de chemins disponibles est donc égal à $6 \times 2 \times 3$, ou 36.

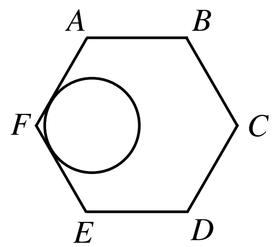
Réponse : (A)

13. Après plusieurs tâtonnements, on peut se convaincre que la réponse est 2 côtés. Peut-on justifier cette réponse de façon mathématique ? C'est plutôt compliqué.

On considère l'hexagone régulier $ABCDEF$ et un cercle situé complètement à l'intérieur de l'hexagone.



Il est évidemment possible pour le cercle de toucher à un ou deux côtés de l'hexagone.



Ensuite, on remarque que :

–si le cercle touche aux 6 côtés, alors son rayon est égal à la moitié de la distance entre deux côtés opposés (p. ex., AB et DE) ;

–si le cercle touche à deux côtés opposés, alors son rayon est égal à la moitié de la distance entre ces deux côtés ; pour être complètement situé à l'intérieur de l'hexagone, le cercle doit toucher aux 6 côtés ;

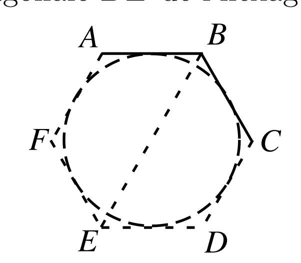
–si le cercle, à l'intérieur de l'hexagone, touche à au moins 4 côtés, il doit alors toucher à au moins une paire de côtés opposés. Il doit alors toucher aux 6 côtés. Si le cercle touche à moins de 6 côtés, il doit donc toucher à 1, 2 ou 3 côtés.

Est-il possible pour le cercle de toucher à 3 côtés sans toucher aux 6 côtés ?
Si c'est possible, il ne faut pas que le cercle touche à deux côtés opposés.
Il y a deux façons de le faire — le cercle touche à trois côtés consécutifs, (p. ex., AB, BC, CD) ou il touche à trois côtés dont aucuns deux ne sont consécutifs (p. ex., AB, CD, EF).

Pour compléter la justification, on examine ces deux possibilités, tout en utilisant la propriété suivante : si un cercle est tangent à deux droites sécantes, son centre est situé sur la bissectrice de l'angle formé par ces deux droites.

1$^{\text{er}}$ cas : Le cercle touche aux côtés AB, BC et CD.

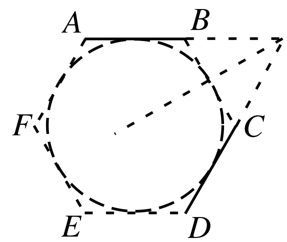
Puisque le cercle est tangent à AB et à BC, son centre doit être situé sur la bissectrice de l'angle ABC. Or, cette bissectrice est la diagonale BE de l'hexagone.



Puisque le cercle est tangent à BC et à CD, son centre doit être situé sur la bissectrice de l'angle BCD. Or, cette bissectrice est la diagonale CF de l'hexagone.
Puisque le centre du cercle est situé sur BE et sur CF, il doit être situé au centre de l'hexagone.
Le cercle doit donc toucher aux 6 côtés de l'hexagone.

2^{e} cas : Le cercle touche aux côtés AB, CD et EF.

Puisque le cercle est tangent à AB et à CD, son centre doit être situé sur la bissectrice de l'angle formé par le prolongement de AB et de DC . Par symétrie, cette bissectrice est la médiatrice de BC.



Puisque le cercle est tangent à CD et à EF, son centre doit être situé sur la bissectrice de l'angle formé par le prolongement de CD et de FE. Par symétrie, cette bissectrice est la médiatrice de DE.

Puisque le centre du cercle est situé sur la médiatrice de BC et sur celle de DE, il doit être situé au centre de l'hexagone. Le cercle doit donc toucher aux 6 côtés de l'hexagone.

Donc, si le cercle touche à trois côtés de l'hexagone, il doit toucher aux 6 côtés.

Si le cercle ne touche pas aux six côtés de l'hexagone, il peut toucher à un maximum de 2 côtés.

(Ce problème est un exemple d'un cas où la réponse est facile à obtenir, mais dont la justification est passablement complexe. Elle a été ajoutée par souci de précision.)

Réponse : (B)

14. *Solution 1*

Soit L le poids de la lionne, en kg.

Le poids du lionceau femelle, en kg, est donc égal à $\frac{1}{6}L$ et celui du lionceau mâle est égal à $\frac{1}{4}L$.

Donc $\frac{1}{4}L - \frac{1}{6}L = 14$, c'est-à-dire que $\frac{3}{12}L - \frac{2}{12}L = 14$, d'où $\frac{1}{12}L = 14$, ou $L = 168$.

Le poids de la lionne est de 168 kg.

Solution 2

Soit F le poids du lionceau femelle, en kg.

Le poids du lionceau mâle est donc de $(F + 14)$ kg.

Le poids de la lionne, en kg, est égal à $6F$ et à $4(F + 14)$.

Donc $6F = 4F + 56$, d'où $2F = 56$, ou $F = 28$.

Le poids de la lionne est donc de $6(28)$ kg, ou 168 kg.

Réponse : (C)

15. Puisque $(x - 4)(5x + 2) = 0$, alors $x - 4 = 0$ ou $5x + 2 = 0$.

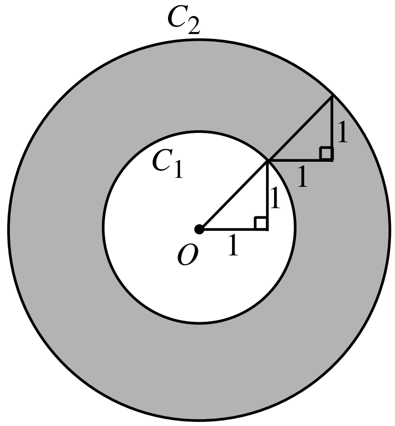
Si $x - 4 = 0$, alors $x = 4$ et l'expression $5x + 2$ a une valeur de 22.

Si $5x + 2 = 0$, alors l'expression $5x + 2$ a une valeur de 0. (Dans ce cas, il n'est pas nécessaire d'obtenir la valeur de x, qui est de $-\frac{2}{5}$.)

L'expression $5x + 2$ peut donc admettre une valeur de 0 ou de 22.

Réponse : (C)

16. Dans chacun des triangles rectangles, la longueur de l'hypoténuse est égale à $\sqrt{1^2+1^2}$, ou $\sqrt{2}$. Le cercle C_1 a donc un rayon de $\sqrt{2}$ et le cercle C_2 a un rayon de $2\sqrt{2}$.



L'aire de la région ombrée est égale à la différence de l'aire des cercles C_2 et C_1.
Elle est égale à $\pi(2\sqrt{2})^2 - \pi(\sqrt{2})^2$, c'est-à-dire à $8\pi - 2\pi$, ou 6π.

Réponse : (D)

17. Un cylindre de rayon r et de hauteur h a un volume de $\pi r^2 h$.
Le cylindre qui a un rayon de 2 cm et une hauteur de 8 cm a un volume de $(\pi \times 2^2 \times 8)$ cm^3, ou 32π cm^3. Rempli, il contient 32π cm^3 d'eau.
Soit h la profondeur de l'eau dans le deuxième cylindre lorsque l'on y a versé l'eau du premier.
Donc $32\pi = \pi(4^2)h$, ou $16\pi h = 32\pi$, d'où $h = 2$ cm.
La profondeur de l'eau, dans le deuxième cylindre, est de 2 cm.

Réponse : (B)

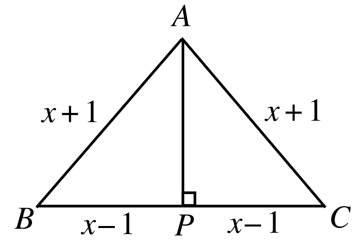
18. On peut obtenir un total de 11 points avec 3 bonnes réponses, 2 questions sans réponse et 5 réponses incorrectes.
On peut obtenir un total de 13 points avec 4 bonnes réponses, 1 question sans réponse et 5 réponses incorrectes.
On peut obtenir un total de 17 points avec 5 bonnes réponses, 2 questions sans réponse et 3 réponses incorrectes.
On peut obtenir un total de 23 points avec 7 bonnes réponses, 2 questions sans réponse et 1 réponse incorrecte.
Par élimination, il est impossible d'obtenir un total de 29 points.
(Pourquoi est-ce impossible ? Si on répond correctement aux 10 questions, on obtient un total de 30 points. Si on répond correctement à 9 questions, on obtient 27 points pour ces bonnes réponses. Si l'autre question est laissée sans réponse, on obtient un point de plus pour un total de 28 points. Si on donne une mauvaise réponse, on a un total de 27 points. Il est donc impossible d'obtenir un total de 29 points.)

Réponse : (E)

19. Puisque Vincent pédale à une vitesse de 24 km/h et que Samuel pédale à une vitesse de 16 km/h, alors Vincent se rapproche de Samuel à une vitesse de 8 km/h.
Puisque Samuel commence à une distance de 1 km au nord de Vincent, alors Vincent met $\frac{1}{8}$ d'une heure pour rattraper Samuel, ce qui est équivalent à $\frac{1}{8} \times 60$ min, c'est-à-dire à $\frac{60}{8}$ min, ou $7\frac{1}{2}$ min.

Réponse : (D)

20. On trace la hauteur AP.
Puisque le triangle ABC est isocèle, P est le milieu du côté BC. Donc $BP = PC = x - 1$.



D'après le théorème de Pythagore :

$$AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{(x+1)^2 - (x-1)^2} = \sqrt{(x^2+2x+1) - (x^2-2x+1)} = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$$

Donc, l'aire du triangle ABC est égale à :

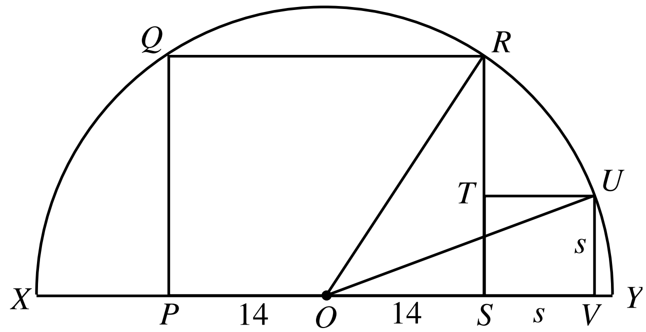
$$\frac{1}{2}(BC)(AP) = \frac{1}{2}(2x-2)(2\sqrt{x}) = 2(x-1)\sqrt{x}$$

Réponse : (E)

21. On considère d'abord l'expression a^b et on choisit des valeurs possibles distinctes de a et de b parmi les nombres -1, -2, -3, -4 et -5.
Quelle est la plus grande valeur possible de l'expression a^b ?
Puisque b est nécessairement négatif, on écrit $a^b = \dfrac{1}{a^{-b}}$, tout en remarquant que $-b > 0$.
Si b est impair, alors a^b sera négatif, car a est négatif.
Si b est pair, alors a^b sera positif.
Pour que l'expression a^b ait la plus grande valeur possible, on attribue à b une valeur paire, soit -2 ou -4.
De plus, pour que a^b, ou $\dfrac{1}{a^{-b}}$, ait une valeur aussi grande que possible, il faut que a^{-b} ait une valeur aussi petite que possible. Donc, a doit avoir une valeur de -1.
L'expression a^b admet donc la plus grande valeur possible lorsque $a = -1$ et que b est égal à -2 ou à -4. Dans chaque cas, $a^b = 1$, car $(-1)^{-2} = (-1)^{-4} = 1$.
Quelle est la deuxième plus grande valeur possible de a^b ?
Il faut encore que b ait une valeur paire pour que la valeur de a^b soit positive. On peut supposer que $a \neq -1$.
Pour s'assurer que a^b ait une valeur aussi grande que possible, on utilise la même logique pour choisir $b = -2$ et $a = -3$, ce qui donne $a^b = \dfrac{1}{(-3)^2}$, c'est-à-dire $a^b = \frac{1}{9}$.
Les deux plus grandes valeurs possibles de a^b sont 1 et $\frac{1}{9}$.
On considère maintenant l'expression $a^b + c^d$. Puisqu'une seule variable peut prendre la valeur -1, la plus grande valeur possible de l'expression est égale à la somme des deux plus grandes valeurs possibles de l'expression a^b, soit $1 + \frac{1}{9}$, ou $\frac{10}{9}$. On l'obtient en calculant $(-1)^{-4} + (-3)^{-2}$.

Réponse : (D)

22. Soit O le centre du cercle, r son rayon et s la longueur d'un côté du carré. On cherche la valeur de s^2.
Par symétrie, O est le milieu de PS. Donc $OP = OS = \frac{1}{2}QR$, d'où $OP = OS = 14$.
On trace les segments OR et OU qui sont des rayons du cercle. On a donc $OR = OU = r$.



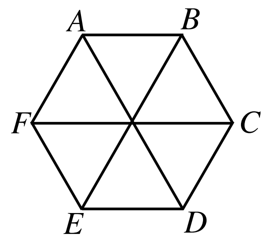
Puisque le triangle OSR est rectangle en S, alors selon le théorème de Pythagore, on a $OR^2 = OS^2 + SR^2$, c'est-à-dire $r^2 = 14^2 + 12^2$, d'où $r^2 = 196 + 144$, ou $r^2 = 340$.
Puisque le triangle OVU est rectangle en S, alors $OU^2 = OV^2 + VU^2$, ou $r^2 = (14 + s)^2 + s^2$.
Or $r^2 = 340$. Donc :

$$\begin{aligned} 340 &= s^2 + 28s + 196 + s^2 \\ 0 &= 2s^2 + 28s - 144 \\ 0 &= s^2 + 14s - 72 \\ 0 &= (s + 18)(s - 4) \end{aligned}$$

Puisque s doit être positif, alors $s = 4$. L'aire du carré $STUV$ est égale à s^2, ou 16.

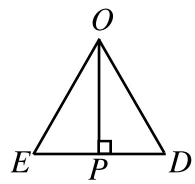
Réponse : (C)

23. Lorsque le cube est découpé de la sorte, chaque demi-cube a 7 faces, soit une face hexagonale formée par la découpure et 6 autres faces provenant chacune d'une des faces du cube.
Par symétrie, l'aire totale de ces 6 faces est égale à la moitié de l'aire totale du cube, soit $\frac{1}{2} \times 6 \times 4^2$ cm^2, ou 48 cm^2.
Il reste à calculer l'aire d'une face hexagonale. Par symétrie, il s'agit d'un hexagone régulier. La longueur d'un de ses côtés est égale à la longueur du segment qui joint le milieu de deux côtés adjacents d'un carré 4 sur 4, soit $\sqrt{2^2 + 2^2}$, ou $2\sqrt{2}$.
On cherche l'aire d'un hexagone régulier dont les côtés mesurent $2\sqrt{2}$.
On considère l'hexagone régulier $ABCDEF$. Chaque angle intérieur mesure 120°.
On trace les diagonales AD, BE et CF.



Par symétrie, ces diagonales divisent l'hexagone en 6 triangles équilatéraux ayant des côtés de longueur $2\sqrt{2}$.

On considère maintenant un de ces triangles, soit ODE.
On trace la hauteur OP.



Puisque le triangle ODE est équilatéral, P est le milieu du côté DE. Donc $EP = \sqrt{2}$.
Or, OPE est un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $OP = \sqrt{3}EP$, d'où $OP = \sqrt{6}$.
L'aire du triangle ODE est égale à $\frac{1}{2}(ED)(OP)$. Elle est donc égale à $\frac{1}{2}(2\sqrt{2})(\sqrt{6})$ cm^2, c'est-à-dire à $\sqrt{12}$ cm^2, ou $2\sqrt{3}$ cm^2.
L'aire de l'hexagone $ABCDEF$ est donc égale à $6(2\sqrt{3})$ cm^2, ou $12\sqrt{3}$ cm^2.
L'aire totale de chaque moitié de cube est donc égale à $48 + 12\sqrt{3}$ cm^2, ou environ 69 cm^2.

Réponse : (A)

24. D'après la 1$^{\text{re}}$ propriété, il y a un nombre impair de termes. Après le 1$^{\text{er}}$ terme, le nombre de termes est donc un multiple de 2.
D'après la 2$^{\text{e}}$ propriété, après le 1$^{\text{er}}$ terme, le nombre de termes est un multiple de 3, car on saute toujours 3 termes pour arriver au dernier.
Donc, après le 1$^{\text{er}}$ terme, le nombre de termes doit être un multiple de 6. Le nombre total de termes peut donc être représenté par $6k + 1$.
On considère maintenant les sommes connues, sachant que $n = 6k + 1$.
Lorsqu'on additionne les termes suivants, soit les 1$^{\text{er}}$, 3$^{\text{e}}$, 5$^{\text{e}}$, ..., jusqu'au dernier, on additionne un total de $3k + 1$ termes.
On a donc $\frac{1}{2}(3k + 1)(a + a + 6kd) = 320$, ou $(3k + 1)(2a + 6kd) = 640$.
(En effet, la somme des termes d'une suite arithmétique est égale à la moitié du produit du nombres de termes et de la somme des premier et dernier termes. La suite formée des 1$^{\text{er}}$, 3$^{\text{e}}$, 5$^{\text{e}}$ termes, etc., est arithmétique, de même que celle formée des 1$^{\text{er}}$, 4$^{\text{e}}$, 7$^{\text{e}}$ termes, etc.)
Lorsqu'on additionne les termes suivants, soit les 1$^{\text{er}}$, 4$^{\text{e}}$, 7$^{\text{e}}$, ..., jusqu'au dernier, on additionne un total de $2k + 1$ termes.
On a donc $\frac{1}{2}(2k + 1)(a + a + 6kd) = 224$, ou $(2k + 1)(2a + 6kd) = 448$.
On divise la 1$^{\text{re}}$ équation par la 2$^{\text{e}}$, terme par terme, pour obtenir $\dfrac{3k+1}{2k+1} = \dfrac{640}{448}$, ou $\dfrac{3k+1}{2k+1} = \dfrac{10}{7}$, d'où $k = 3$.
Donc $(3(3) + 1)(2a + 6kd) = 640$, ou $2a + 6kd = 64$.
La somme de tous les termes de la suite est égale à $\frac{1}{2}(6k+1)(a+a+6kd)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(19)(64)$, ou 608.

Réponse : (C)

25. Malheureusement, cette question a causé un problème qui n'a été découvert qu'après la journée du concours. Nous remercions le Dr. Yongmoo Kim qui a signalé cette erreur.

Si la question avait été posée comme suit :

> Une *triligne* est une droite dont la somme de l'abscisse à l'origine et de l'ordonnée à l'origine est égale à trois fois la pente. Combien y a-t-il d'entiers q, $1 \leq q \leq 10\,000$, pour lesquels il existe au moins un entier <u>positif</u> p de manière qu'il y ait exactement une triligne qui passe par le point (p, q) ?

(incluant le mot souligné « positif »), alors la solution suivante aurait été correcte.

On considère une droite de pente m qui passe au point (p,q).
Cette droite a pour équation $y = m(x - p) + q$, ou $y = mx + (q - mp)$.
L'ordonnée à l'origine de cette droite est donc égale à $q - mp$. En posant $y = 0$, on obtient l'abscisse à l'origine, soit $\dfrac{mp - q}{m}$.
Pour que cette droite soit une triligne, il faut que $3m = (q - mp) + \dfrac{mp - q}{m}$, ou
$3m^2 = qm - pm^2 + mp - q$, ou $(3 + p)m^2 - (p + q)m + q = 0$.
Étant donné un point fixe (p,q), il y a exactement une triligne qui passe par (p,q) s'il y a une seule pente m qui vérifie l'équation $(3 + p)m^2 - (p + q)m + q = 0$. Cette équation du second degré ne peut donc admettre qu'une solution. (Il s'agit bien d'une équation du second degré, car le premier coefficient, soit $3 + p$, est positif, p étant positif.)
Donc, pour un point fixe (p,q), il y a exactement une triligne qui passe par (p,q) si le discriminant de l'équation $(3 + p)m^2 - (p + q)m + q = 0$ est égal à 0, c'est-à-dire si :

$$\begin{aligned}
(p+q)^2 - 4(3+p)q &= 0\\
p^2 + 2pq + q^2 - 12q - 4pq &= 0\\
p^2 - 2pq + q^2 - 12q &= 0\\
(p-q)^2 &= 12q
\end{aligned}$$

Il faut maintenant déterminer combien il y a d'entiers q, $1 \le q \le 10\,000$, pour lesquels il existe au moins un entier p de manière que $(p - q)^2 = 12q$.
Pour que cette dernière équation soit vérifiée, il faut que $12q$ soit un carré parfait. Il faut donc que $3q$ soit un carré parfait.
Pour que $3q$ soit un carré parfait, il faut que q soit 3 fois un carré parfait (en effet, la factorisation première de q doit avoir un nombre impair de facteurs 3 et un nombre pair de chaque autre facteur).
Si $q = 3k^2$, on peut alors résoudre l'équation $(p - q)^2 = 12q$ qui devient $(p - 3k^2)^2 = 36k^2$ et on a alors $p - 3k^2 = \pm 6k$, ou $p = 3k^2 \pm 6k$.
Combien y a-t-il d'entiers q, de 1 à 10 000, qui ont la forme $q = 3k^2$? La première valeur de k est 1 et la dernière est 57, car $3(58)^2 = 10\,092$, ce qui est à l'extérieur de l'intervalle.
Il y a donc 57 valeurs de q et la réponse serait (B).

Or, la question a été posée comme suit :

> Une *triligne* est une droite dont la somme de l'abscisse à l'origine et de l'ordonnée à l'origine est égale à trois fois la pente. Combien y a-t-il d'entiers q, $1 \le q \le 10\,000$, pour lesquels il existe au moins un entier p de manière qu'il y ait exactement une triligne qui passe par le point (p, q) ?

On procède comme dans la solution précédente pour conclure que m doit vérifier l'équation suivante :

$$(3 + p)m^2 - (p + q)m + q = 0$$

Cette équation admet exactement une solution si le premier coefficient $p + 3$ est égal à 0 ou si ce premier coefficient n'est pas égal à 0 et que le discriminant est égal à 0.
Si $p = -3$, l'équation $(q - 3)m + q = 0$, en m, doit admettre exactement une solution. Or, elle admet exactement une solution *pour chaque valeur de* q, sauf $q = 3$.
Si $q = 3$, alors pour $p = 9$, le discriminant de l'équation du second degré est égal à 0.
En d'autres mots, chaque valeur de q, de 1 à 10 000, admet au moins une valeur de p de manière

qu'il y a exactement une triligne qui passe par le point (p,q). Il y a donc 10 000 valeurs possibles de q.

Nous nous excusons d'avoir causé cette confusion.