**Concours canadien de mathématiques**
***Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario***

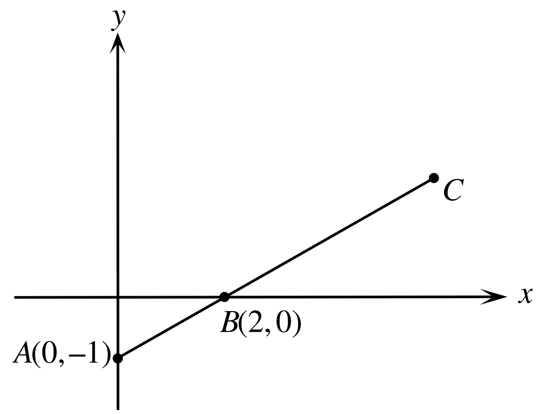
# *Concours Euclide 2005*

## Le mardi 19 avril 2005

*Solutions*

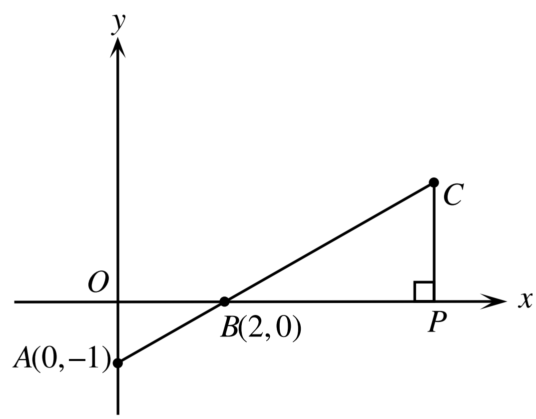
1. (a) RÉPONSE : $a = 5$
Puisque le point $(a, a)$ est situé sur la droite d'équation $3x - y = 10$, alors $3a - a = 10$, d'où $2a = 10$, ou $a = 5$.

(b) RÉPONSE : $(6, 2)$
*Solution 1*
Pour passer du point $A$ au point $B$, on monte de 1 unité et on bouge de 2 unités vers la droite.



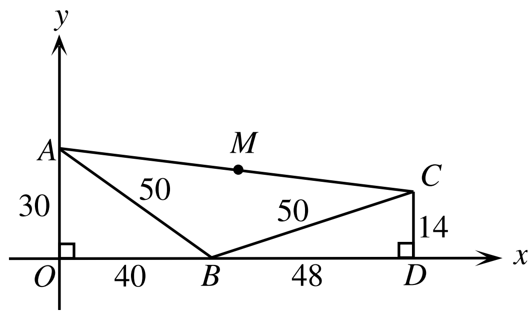

Puisque le point $C$ est situé sur la même droite que $A$ et $B$, alors pour passer du point $B$ au point $C$, on monte deux fois de 1 unité et on bouge deux fois de 2 unités vers la droite, c'est-à-dire que l'on monte de 2 unités et on bouge de 4 unités vers la droite.
Les coordonnées de $C$ sont donc $(6, 2)$.

*Solution 2*
Soit $O$ l'origine. Au point $C$, on abaisse une perpendiculaire $CP$ à l'axe des abscisses.




Les triangles $AOB$ et $CPB$ sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et que les angles $ABO$ et $CBP$ sont congrus (ils sont opposés par le sommet).
Puisque $BC = 2AB$, alors $CP = 2AO$, d'où $CP = 2(1)$, ou $CP = 2$. De même, $BP = 2BO$, d'où $BP = 2(2)$, ou $BP = 4$.
Donc, les coordonnées de $C$ sont $(2 + 4, 0 + 2)$, ou $(6, 2)$.

(c) Selon le théorème de Pythagore, $AO^2 = AB^2 - OB^2$, d'où $AO^2 = 50^2 - 40^2$, ou $AO^2 = 900$. Donc $AO = 30$. Les coordonnées de $A$ sont donc $(0, 30)$.
Selon le théorème de Pythagore, $CD^2 = CB^2 - BD^2$, d'où $CD^2 = 50^2 - 48^2$, ou $CD^2 = 196$. Donc $CD = 14$.




Donc, les coordonnées de $C$ sont $(40+48, 14)$, ou $(88, 14)$.
Puisque $M$ est le milieu du segment $AC$, ses coordonnées sont $\left(\frac{1}{2}(0+88), \frac{1}{2}(30+14)\right)$, ou $(44, 22)$.

2. (a) Réponse : $x = -2$

*Solution 1*
Puisque $y = 2x+3$, alors $4y = 4(2x+3)$, ou $4y = 8x+12$.
Puisque $4y = 8x+12$ et $4y = 5x+6$, alors $8x+12 = 5x+6$, d'où $3x = -6$, ou $x = -2$.

*Solution 2*
On a $4y = 5x+6$, d'où $y = \frac{5}{4}x + \frac{6}{4}$, ou $y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$.
Puisque $y = 2x+3$ et $y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$, alors $2x+3 = \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$, d'où $\frac{3}{4}x = -\frac{3}{2}$, ou $x = -2$.

*Solution 3*
Puisque la deuxième équation a un terme « $5x$ », on multiplie chaque membre de la première équation par $\frac{5}{2}$ pour obtenir un terme $5x$. On obtient $\frac{5}{2}y = 5x + \frac{15}{2}$.
On soustrait, membre par membre, de l'équation $4y = 5x+6$ pour obtenir $\frac{3}{2}y = -\frac{3}{2}$, d'où $y = -1$.
Puisque $y = -1$, alors $-1 = 2x+3$, d'où $2x = -4$, ou $x = -2$.

(b) Réponse : $a = 6$

*Solution 1*
On additionne les trois équations, membre par membre, pour obtenir
$a - 3b + b + 2b + 7c - 2c - 5c = -10 + 3 + 13$, ou $a = 6$.

*Solution 2*
On multiplie chaque membre de la deuxième équation par 3 pour obtenir $3b - 6c = 9$.
On additionne cette équation à la première, membre par membre, pour obtenir $c = -1$.
On reporte $c = -1$ dans la deuxième équation pour obtenir $b - 2(-1) = 3$, d'où $b = 1$.
On reporte $c = -1$ et $b = 1$ dans la troisième équation pour obtenir $a + 2(1) - 5(-1) = 13$, d'où $a = 6$.

(c) *Solution 1*
Soit $J$ la note de Jean et $M$ celle de Marie.
Puisque deux fois la note de Jean est 60 de plus que celle de Marie, alors $2J = M + 60$.
Puisque deux fois la note de Marie est 90 de plus que celle de Jean, alors $2M = J + 90$.
On additionne ces équations, membre par membre, pour obtenir $2J + 2M = M + J + 150$, ou $J + M = 150$. Donc $\dfrac{J+M}{2} = 75$.
La moyenne des deux notes est égale à 75.

(On remarque qu'on n'a pas déterminé la note de chacun.)

*Solution 2*
Soit $J$ la note de Jean et $M$ celle de Marie.
Puisque deux fois la note de Jean est 60 de plus que celle de Marie, alors $2J = M + 60$, ou $M = 2J - 60$.
Puisque deux fois la note de Marie est 90 de plus que celle de Jean, alors $2M = J + 90$.
On reporte $M = 2J - 60$ dans l'équation $2M = J + 90$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} 2(2J - 60) &= J + 90 \\ 4J - 120 &= J + 90 \\ 3J &= 210 \\ J &= 70 \end{aligned}$$

On reporte $J = 70$ dans l'équation $M = 2J - 60$ pour obtenir $M = 80$.
La moyenne des deux notes, c'est-à-dire la moyenne de 70 et de 80, est égale à 75.

3. (a) Réponse : $x = 50$
On simplifie en utilisant les lois des exposants :

$$2^x = 2(16^{12}) + 2(8^{16}) = 2((2^4)^{12}) + 2((2^3)^{16}) = 2(2^{48}) + 2(2^{48}) = 4(2^{48}) = 2^2(2^{48}) = 2^{50}$$

Donc $x = 50$.

(b) *Solution 1*
On factorise le membre de gauche de l'équation $(f(x))^2 - 3f(x) + 2 = 0$ pour obtenir $(f(x) - 1)(f(x) - 2) = 0$.
Donc $f(x) = 1$ ou $f(x) = 2$.
Si $f(x) = 1$, alors $2x - 1 = 1$, d'où $x = 1$.
Si $f(x) = 2$, alors $2x - 1 = 2$, d'où $x = \frac{3}{2}$.
Les valeurs de $x$ sont 1 et $\frac{3}{2}$.

*Solution 2*
On reporte $f(x) = 2x - 1$ dans l'équation $(f(x))^2 - 3f(x) + 2 = 0$ :

$$\begin{aligned} (2x - 1)^2 - 3(2x - 1) + 2 &= 0 \\ 4x^2 - 4x + 1 - 6x + 3 + 2 &= 0 \\ 4x^2 - 10x + 6 &= 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 &= 0 \\ (x - 1)(2x - 3) &= 0 \end{aligned}$$

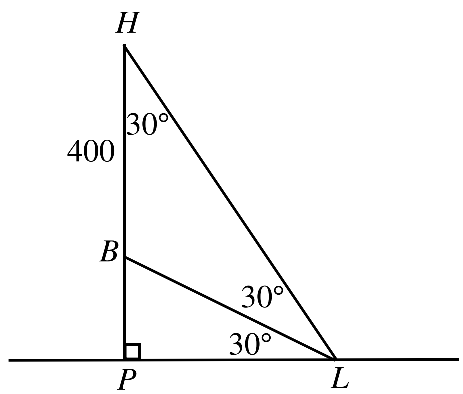
Donc, $x = 1$ ou $x = \frac{3}{2}$.

4. (a) Réponse : $\frac{14}{15}$
*Solution 1*
Les deux billets choisis peuvent être : $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,6)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(2,6)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(3,6)$, $(4,5)$, $(4,6)$ ou $(5,6)$.
Il y a 15 choix. (Puisque les deux billets sont choisis en même temps, le couple $(2,4)$ est

considéré le même que le couple $(4,2)$.)
Les choix pour lesquels le plus petit des numéros est inférieur ou égal à 4 sont $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,6)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(2,6)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(3,6)$, $(4,5)$ et $(4,6)$.
Il y en a 14.
La probabilité est donc égale à $\frac{14}{15}$.

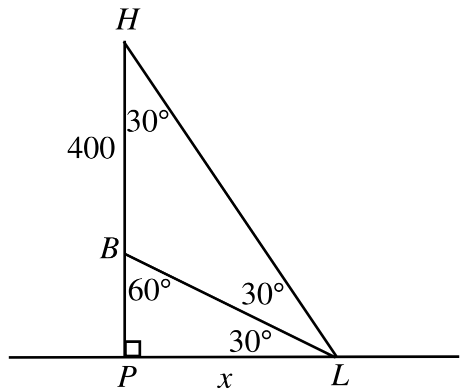
*Solution 2*
On détermine la probabilité pour que le plus petit numéro ne soit PAS inférieur ou égal à 4.
Le plus petit numéro doit être au moins 5.
Puisque deux numéros distincts sont choisis, ils doivent être 5 et 6.
Comme dans la Solution 1, on détermine qu'il y a 15 choix possibles.
Donc, la probabilité pour que le plus petit numéro ne soit PAS inférieur ou égal à 4 est égale à $\frac{1}{15}$. La probabilité pour que le plus petit numéro choisi soit inférieur ou égal à 4 est donc égale à $1 - \frac{1}{15}$, ou $\frac{14}{15}$.

(b) *Solution 1*
Puisque $\angle HLP = 60°$ et $\angle BLP = 30°$, alors $\angle HLB = 30°$.
Puisque $\angle HLP = 60°$ et $\angle HPL = 90°$, alors $\angle LHP = 180° - 90° - 60°$, d'où $\angle LHP = 30°$.




Le triangle $HBL$ est donc isocèle et $BL = HB = 400$ m.
Dans le triangle $BLP$, $BL = 400$ m et $\angle BLP = 30°$.
Donc $LP = BL\cos(30°)$ m, d'où $LP = 400\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ m, ou $LP = 200\sqrt{3}$ m.
Donc, la distance entre les points $L$ et $P$ est de $200\sqrt{3}$ m.

*Solution 2*
Puisque $\angle HLP = 60°$ et $\angle BLP = 30°$, alors $\angle HLB = 30°$.
Puisque $\angle HLP = 60°$ et $\angle HPL = 90°$, alors $\angle LHP = 180° - 90° - 60°$, d'où $\angle LHP = 30°$.
De plus, $\angle LBP = 60°$.
Soit $LP = x$.




Puisque $BLP$ est un triangle remarquable 30°-60°-90°, alors $BP : LP = 1 : \sqrt{3}$.
Donc $BP = \frac{1}{\sqrt{3}}LP$, ou $BP = \frac{1}{\sqrt{3}}x$.
Puisque $HLP$ est un triangle remarquable 30°-60°-90°, alors $HP : LP = \sqrt{3} : 1$.
Donc $HP = \sqrt{3}LP$, ou $HP = \sqrt{3}x$.
Or $HP = HB + BP$. Donc :

$$\begin{aligned} \sqrt{3}x &= 400 + \frac{1}{\sqrt{3}}x \\ 3x &= 400\sqrt{3} + x \\ 2x &= 400\sqrt{3} \\ x &= 200\sqrt{3} \end{aligned}$$

Donc, la distance entre les points $L$ et $P$ est de $200\sqrt{3}$ m.

5. (a) Réponse : (6,5)

Après 2 mouvements, la chèvre s'est déplacée de $1 + 2$ unités, ou 3 unités.
Après 3 mouvements, elle s'est déplacée de $1 + 2 + 3$ unités, ou 6 unités.
De même, après $n$ mouvements, la chèvre s'est déplacée de $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ unités.
On cherche la valeur de $n$ pour laquelle $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ est égal à 55.
La façon la plus rapide de déterminer la valeur de $n$ est d'additionner les entiers jusqu'à ce que la somme égale 55. On obtient $n = 10$.
(On aurait pu obtenir la valeur de $n$ en se souvenant que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ et en résolvant l'équation $\frac{1}{2}n(n+1) = 55$.)
Il faut déterminer les coordonnées du point où la chèvre se trouve après ces 10 mouvements.
On considère d'abord l'abscisse de ce point.
Depuis son départ du point $(0,0)$, la chèvre s'est déplacée de 2 unités vers la droite, de 4 unités vers la gauche, de 6 unités vers la droite, de 8 unités vers la gauche et de 10 unités vers la droite. L'abscisse de sa position est donc égale à $2 - 4 + 6 - 8 + 10$, ou 6.
De même, l'ordonnée de sa position est égale à $1 - 3 + 5 - 7 + 9$, ou 5.
Après ses 10 mouvements, la chèvre se trouve au point $(6,5)$.

(b) *Solution 1*

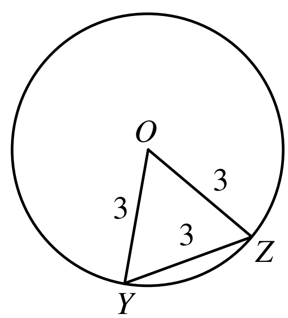
La suite 4, $4r$, $4r^2$ est arithmétique si la différence entre $4r^2$ et $4r$ est égale à la différence entre $4r$ et 4, c'est-à-dire si :

$$\begin{aligned} 4r^2 - 4r &= 4r - 4 \\ 4r^2 - 8r + 4 &= 0 \\ r^2 - 2r + 1 &= 0 \\ (r-1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

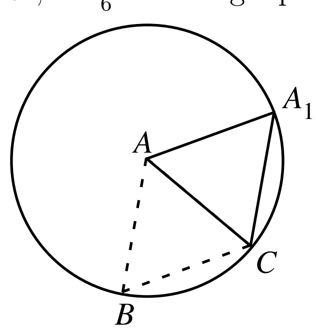
Donc, la seule valeur de $r$ est 1.

*Solution 2*
La suite $4, 4r, 4r^2$ est arithmétique s'il existe un nombre $d$ tel que $4r = 4+d$ et $4r^2 = 4+2d$. (On dit que $d$ est la raison arithmétique de cette suite.)
On a donc $d = 4r - 4$ et $2d = 4r^2 - 4$, ou $d = 2r^2 - 2$.
Puisque le membre de gauche des équations $d = 4r - 4$ et $d = 2r^2 - 2$ est le même, alors $2r^2 - 2 = 4r - 4$. Donc $2r^2 - 4r + 2 = 0$, ou $r^2 - 2r + 1 = 0$, d'où $(r-1)^2 = 0$.
Donc, la seule valeur de $r$ est 1.

6. (a) RÉPONSE : $4\pi$
On remarque d'abord que si un triangle équilatéral dont les côtés ont une longueur de 3 est placé dans un cercle de rayon 3 de manière que deux des sommets soient situés sur le cercle, alors le troisième sommet est situé au centre du cercle.
En effet, si on place les sommets $Y$ et $Z$ d'un tel triangle $XYZ$ sur le cercle et que l'on joint $Y$ et $Z$ au centre $O$, alors $OY = OZ = 3$. Le triangle $OYZ$ est alors équilatéral, puisque ses trois côtés ont une longueur de 3. Les triangles $XYZ$ et $OYZ$ sont donc identiques et les points $X$ et $O$ sont les mêmes.

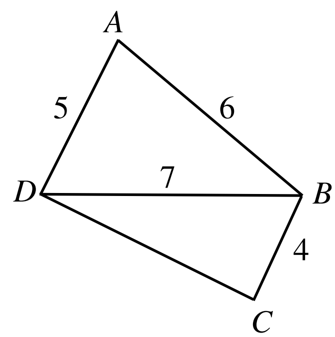



Donc, au départ, $A$ est situé au centre du cercle.
Lorsque le triangle subit une rotation de centre $C$, le point $B$ trace un arc de cercle de rayon 3. Cet arc est une fraction de cercle. De quelle fraction s'agit-il ?
Lorsque le point $A$ atteint le point $A_1$ sur le cercle, le triangle $AA_1C$ est équilatéral, car il s'agit de l'image du triangle équilatéral initial par une rotation. Donc $\angle A_1CA = 60°$. L'angle de rotation est donc de $60°$, ou $\frac{1}{6}$ d'un angle plein.



Le point $B$ a donc tracé $\frac{1}{6}$ d'un cercle de rayon 3.
Le point $A$ a aussi tracé un arc de la même longueur. Lorsque le point $A$ atteint le cercle, les points $A$ et $C$ sont sur le cercle et le point $B$ doit être au centre du cercle.
Donc, lors de la rotation suivante, $B$ trace $\frac{1}{6}$ d'un cercle en se rendant sur le cercle.
La troisième rotation est de centre $B$. Donc, $B$ ne se déplace pas. Après trois rotations, le point $A$ sera au centre et les points $B$ et $C$ seront sur le cercle. Le triangle aura alors subi l'équivalent d'une rotation de 180° dont le centre est le centre du cercle.
Donc, pour retourner à sa position initiale, le triangle doit subir trois autres rotations. Le point $B$ agira de la même façon que pendant les trois premières rotations.
Au total, le point $B$ trace donc 4 arcs dont la longueur est $\frac{1}{6}$ de la circonférence d'un cercle de rayon 3.
La distance totale parcourue par le point $B$ est égale à $4(\frac{1}{6})(2\pi(3))$, ou $4\pi$.

(b) Pour déterminer la longueur du côté $CD$, il faut d'abord déterminer la mesure d'un des angles du triangle $BCD$. (On déterminera son cosinus.)
Or, on sait que $\angle A + \angle C = 180°$. Si on connaît $\angle A$, on connaîtra $\angle C$.




D'après la loi du cosinus dans le triangle $ABD$ :

$$\begin{aligned} 7^2 &= 5^2 + 6^2 - 2(5)(6)\cos(\angle A) \\ 49 &= 61 - 60\cos(\angle A) \\ \cos(\angle A) &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Puisque $\angle A + \angle C = 180°$, alors $\cos(\angle C) = -\cos(180° - \angle A)$. Puisque $\cos(\angle A) = \frac{1}{5}$, alors $\cos(\angle C) = -\frac{1}{5}$.
(On aurait pu déterminer la mesure de l'angle $A$ à partir de $\cos(\angle A) = \frac{1}{5}$ pour ensuite calculer la mesure de l'angle $C$, mais il aurait fallu utiliser des approximations.)
D'après la loi du cosinus dans le triangle $BCD$ :

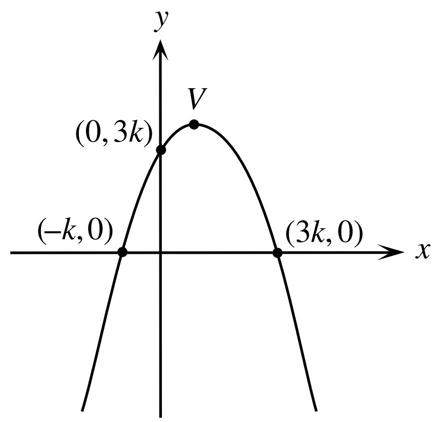
$$\begin{aligned} 7^2 &= 4^2 + CD^2 - 2(4)(CD)\cos(\angle C) \\ 49 &= 16 + CD^2 - 8(CD)\left(-\frac{1}{5}\right) \\ 0 &= 5CD^2 + 8CD - 165 \\ 0 &= (5CD + 33)(CD - 5) \end{aligned}$$

Donc $CD = -\frac{33}{5}$ ou $CD = 5$. (On aurait pu résoudre l'équation en utilisant la formule.)
On rejette la première racine, car la longueur doit être positive. Donc $CD = 5$.

(On aurait pu utiliser $\cos(\angle C) = -\frac{1}{5}$ pour déterminer $\sin(\angle C)$ et utiliser la loi des sinus dans le triangle $BCD$ pour déterminer $\angle BDC$, ce qui aurait donné $\angle DBC$, nous permettant ainsi de calculer $CD$ en utilisant la loi des sinus. Cependant, cette approche aurait fait intervenir des valeurs approximatives.)

7. (a) RÉPONSE : Maximum = 5, Minimum = 1
On récrit $f(x) = \sin^2 x - 2\sin x + 2$ en complétant le carré pour obtenir $f(x) = (\sin x - 1)^2 + 1$.
Puisque $(\sin x - 1)^2 \geq 0$, alors $f(x) \geq 1$ ; on a $f(x) = 1$ lorsque $\sin x = 1$ (ce qui se produit, par exemple, lorsque $x = \frac{\pi}{2}$).
La valeur minimale de $f(x)$ est donc égale à 1.
La valeur maximale $f(x)$ se produit lorsque l'expression $(\sin x - 1)^2$ admet une valeur maximale.
Puisque $-1 \leq \sin x \leq 1$, alors $(\sin x - 1)^2$ admet une valeur maximale lorsque $\sin x = -1$ (par exemple, lorsque $x = \frac{3\pi}{2}$). Dans ce cas, $(\sin x - 1)^2 = 4$ et $f(x) = 5$.
La valeur maximale de $f(x)$ est égale à 5.

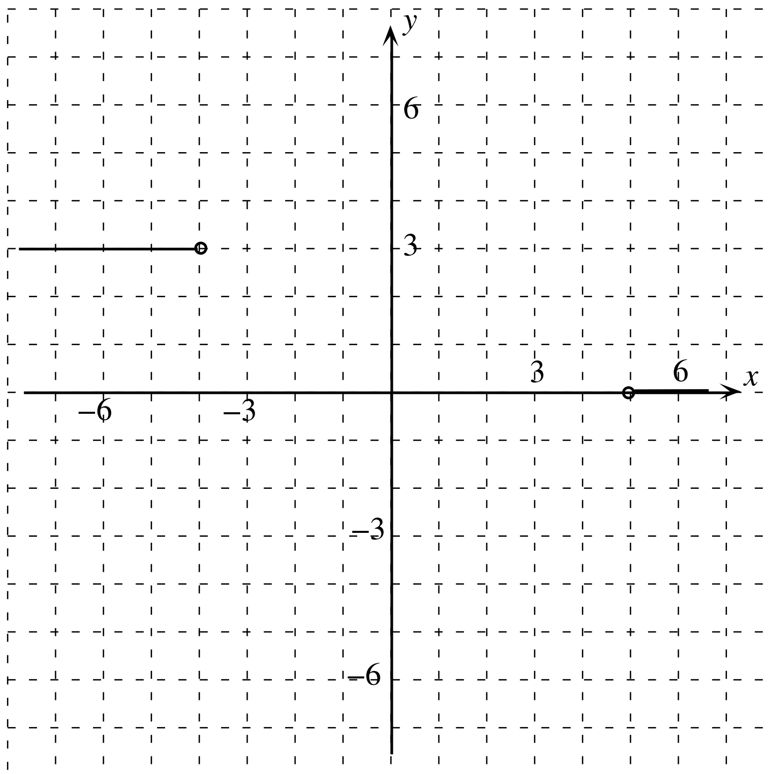
(b) D'après la figure, les abscisses à l'origine de la parabole sont $-k$ et $3k$.



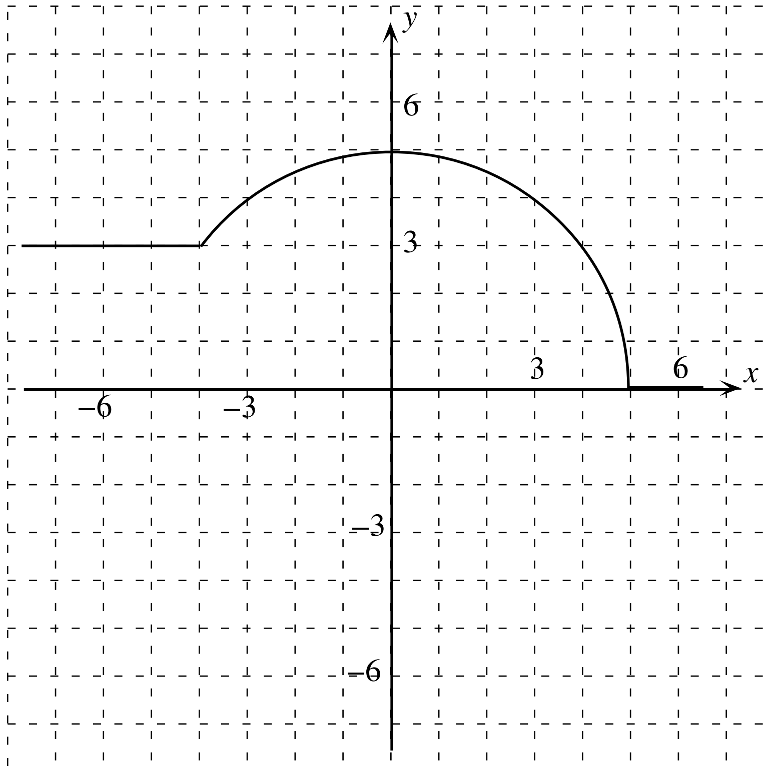

Puisque l'équation de la parabole est $y = -\frac{1}{4}(x - r)(x - s)$, on peut donc l'écrire sous forme $y = -\frac{1}{4}(x - (-k))(x - 3k)$.
Puisque le point $(0, 3k)$ est situé sur la parabole, alors $3k = -\frac{1}{4}(0+k)(0-3k)$, ou $12k = 3k^2$, d'où $k^2 - 4k = 0$, ou $k(k - 4) = 0$.
Donc $k = 0$ ou $k = 4$.
Puisque les points d'intersection de la parabole et de l'axe des abscisses sont distincts, on ne peut avoir $k = 0$ (autrement les deux points seraient identiques).
Donc $k = 4$.
L'équation de la parabole est donc $y = -\frac{1}{4}(x + 4)(x - 12)$, ou $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 12$.
Il reste à déterminer les coordonnées du sommet $V$.
Puisque les abscisses à l'origine de la parabole sont $-4$ et 12, l'abscisse du sommet est égale à la moyenne de $-4$ et de 12, soit 4.
(On aurait pu utiliser le fait que l'abscisse du sommet est égale à $-\dfrac{b}{2a}$, ou $-\dfrac{2}{2(-\frac{1}{4})}$.)
L'ordonnée du sommet est égale à $-\frac{1}{4}(4^2) + 2(4) + 12$, ou 16.
Les coordonnées du sommet sont $(4, 16)$.

8. (a) On examine la fonction dans chacun des intervalles.
Si $x < -4$, alors $f(x) = 4$. Puisque $g(x) = \sqrt{25 - [f(x)]^2}$, alors $g(x) = \sqrt{25 - 4^2}$, d'où $g(x) = 3$.

Dans l'intervalle $x < -4$, le graphique de $y = g(x)$ est la droite horizontale d'équation $y = 3$.
Si $x > 5$, alors $f(x) = -5$. Puisque $g(x) = \sqrt{25 - [f(x)]^2}$, alors $g(x) = \sqrt{25 - (-5)^2}$, d'où $g(x) = 0$.
Dans l'intervalle $x > 5$, le graphique de $y = g(x)$ est la droite horizontale d'équation $y = 0$.
Voici la représentation graphique à ce point :

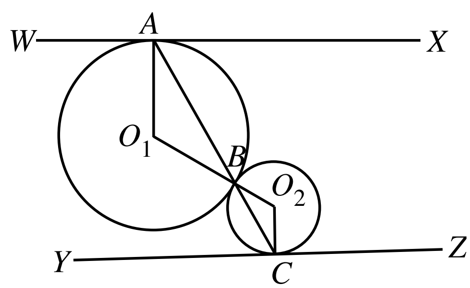



Si $-4 \leq x \leq 5$, alors $f(x) = -x$. Puisque $g(x) = \sqrt{25 - [f(x)]^2}$, alors $g(x) = \sqrt{25 - (-x)^2}$, ou $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$.
L'équation $y = g(x)$ définit un demi-cercle de centre à l'origine et de rayon 5. En effet, puisque $y = \sqrt{25 - x^2}$, alors $y^2 = 25 - x^2$, d'où $x^2 + y^2 = 25$. Cette équation définit le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 5. Puisque $y$ est égal à la racine carrée positive, l'équation définit le demi-cercle supérieur.
Il reste à vérifier la valeur de la fonction aux extrémités des intervalles.
Lorsque $x = -4$, on a $g(-4) = \sqrt{25 - (-4))^2}$, ou $g(-4) = 3$.
Lorsque $x = 5$, on a $g(5) = \sqrt{25 - 5^2}$, ou $g(5) = 0$.
La partie du demi-cercle définie dans l'intervalle $-4 \leq x \leq 5$ rejoint donc les deux autres branches du graphique.
Le graphique de la relation définie par $y = g(x)$ est donc :



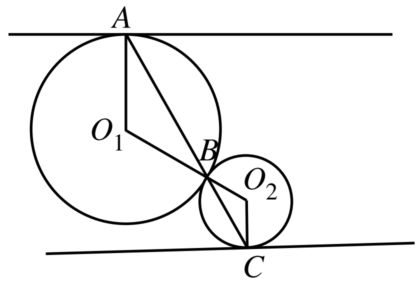

(b) *Solution 1*

Soit $O_1$ et $O_2$ le centre respectif des cercles.
On trace $AO_1$, $BO_1$, $BO_2$ et $CO_2$.
Soit $W$ et $X$ deux points situés de part et d'autre de $A$ sur la première tangente. Soit $Y$ et $Z$ deux points situés de part et d'autre de $C$ sur la deuxième tangente.




Soit $\angle XAB = \theta$.
Puisque $WX$ est tangent en $A$ au cercle de centre $O_1$, alors $O_1A$ est perpendiculaire à $WX$. Donc $\angle O_1AB = 90° - \theta$.
Puisque $O_1A$ et $O_1B$ sont deux rayons, ils sont congrus et le triangle $AO_1B$ est isocèle. Donc $\angle O_1BA = \angle O_1AB = 90° - \theta$.
Puisque les deux cercles sont tangents en $B$, alors $O_1BO_2$ est un segment de droite, c'est-à-dire que les points $O_1$, $B$ et $O_2$ sont alignés.
Les angles $O_2BC$ et $O_1BA$ sont congrus puisqu'ils sont opposés par le sommet.
Donc $\angle O_2BC = \angle O_1BA = 90° - \theta$.
Comme ci-dessus, puisque $O_2B = O_2C$, alors $\angle O_2CB = \angle O_2BC = 90° - \theta$.
Puisque $YZ$ est tangent en $C$ au cercle de centre $O_2$, alors $O_2C$ est perpendiculaire à $YZ$. Donc, $\angle YCB = 90° - \angle O_2CB$, ou $\angle YCB = \theta$.
Puisque $\angle XAB = \angle YCB$, alors $WX$ est parallèle à $YZ$ (angles alternes-internes).

*Solution 2*
Soit $O_1$ et $O_2$ le centre respectif des cercles.
On trace $AO_1$, $BO_1$, $BO_2$ et $CO_2$.
Puisque $AO_1$ et $BO_1$ sont les rayons d'un même cercle, alors $AO_1 = BO_1$. Le triangle $AO_1B$ est donc isocèle et $\angle O_1AB = \angle O_1BA$.




Puisque $BO_2$ et $CO_2$ sont les rayons d'un même cercle, alors $BO_2 = CO_2$. Le triangle $BO_2C$ est donc isocèle et $\angle O_2BC = \angle O_2CB$.
Puisque les deux cercles sont tangents en $B$, alors $O_1BO_2$ est un segment de droite, c'est-à-dire que le segment qui joint $O_1$ et $O_2$ passe aussi par le point de contact des deux cercles.
Donc $\angle O_1BA = \angle O_2BC$ (angles alternes-internes).
Donc $\angle O_1AB = \angle O_1BA = \angle O_2BC = \angle O_2CB$.
Donc, les triangles $AO_1B$ et $BO_2C$ sont semblables. Donc $\angle AO_1B = \angle BO_2C$, ou $\angle AO_1O_2 = \angle CO_2O_1$.
Donc, $AO_1$ est parallèle à $CO_2$ (angles alternes-internes).
Or, $A$ et $C$ sont des points de contact, $AO_1$ est perpendiculaire à la tangente en $A$ et $CO_2$ est perpendiculaire à la tangente en $C$.
Puisque $AO_1$ et $CO_2$ sont parallèles, les tangentes doivent être parallèles.

9. (a) *Solution 1*
On a $(x-p)^2 + y^2 = r^2$ et $x^2 + (y-p)^2 = r^2$. Donc, aux points d'intersection, on a :

$$\begin{aligned}(x-p)^2 + y^2 &= x^2 + (y-p)^2 \\ x^2 - 2px + p^2 + y^2 &= x^2 + y^2 - 2py + p^2 \\ -2px &= -2py\end{aligned}$$

Donc $x = y$ (on suppose que $p \neq 0$, autrement les deux cercles coïncideraient).
L'équation $(x-p)^2 + y^2 = r^2$ devient alors $(x-p)^2 + x^2 = r^2$, c'est-à-dire $2x^2 - 2px + (p^2 - r^2) = 0$, ou $x^2 - px + \frac{1}{2}(p^2 - r^2) = 0$. Puisque les points d'intersection ont pour abscisse respective $a$ et $b$, alors $a$ et $b$ sont les deux solutions de cette équation.
On utilise la relation entre le produit et la somme des racines et les coefficients de l'équation pour obtenir $a + b = p$ et $ab = \frac{1}{2}(p^2 - r^2)$.
(On aurait pu résoudre l'équation et déterminer ces expressions directement.)
On a donc $a + b = p$.
De plus, $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$, c'est-à-dire que $a^2 + b^2 = p^2 - 2\left(\frac{1}{2}(p^2 - r^2)\right)$, d'où $a^2 + b^2 = r^2$.

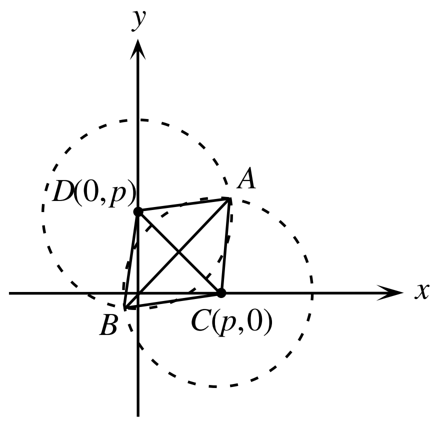
*Solution 2*
D'après les équations, un cercle est l'image de l'autre par une réflexion par rapport à la droite d'équation $y = x$. Les points d'intersection sont donc situés sur la droite d'équation $y = x$. Donc, $A$ a pour coordonnées $(a, a)$ et $B$ a pour coordonnées $(b, b)$.

On a donc $(a-p)^2+a^2=r^2$ et $(b-p)^2+b^2=r^2$.
On soustrait les équations, membre par membre, pour obtenir :

$$\begin{aligned}
(b-p)^2-(a-p)^2+b^2-a^2 &= 0\\
((b-p)-(a-p))((b-p)+(a-p))+(b-a)(b+a) &= 0\\
(b-a)(a+b-2p)+(b-a)(b+a) &= 0\\
(b-a)(a+b-2p+b+a) &= 0\\
2(b-a)(a+b-p) &= 0
\end{aligned}$$

Puisque $a \neq b$, alors $a+b=p$, ou $a-p=-b$.
On reporte $a-p=-b$ dans l'équation $(a-p)^2+a^2=r^2$ pour obtenir $(-b)^2+a^2=r^2$, ou $a^2+b^2=r^2$.

(b) On a la situation suivante :




On sait que $C$ a pour coordonnées $(p,0)$ et que $D$ a pour coordonnées $(0,p)$.
Donc, la pente du segment $CD$ est égale à $-1$.
Puisque les points $A$ et $B$ sont situés sur la droite d'équation $y=x$, alors la pente du segment $AB$ est égale à 1.
Donc, $AB$ est perpendiculaire à $CD$. Donc, $CADB$ est un losange (ses côtés sont des rayons congrus) et son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(AB)(CD)$.
(On peut le démontrer en découpant le quadrilatère $CADB$ en deux triangles, $CAB$ et $DAB$.)
Puisque $C$ a pour coordonnées $(p,0)$ et que $D$ a pour coordonnées $(0,p)$, alors $CD=\sqrt{p^2+(-p)^2}$, ou $CD=\sqrt{2p^2}$.
(On ne sait pas si $p$ est positif, donc cette expression n'est pas nécessairement égale à $\sqrt{2}p$.)
Puisque $A$ a pour coordonnées $(a,a)$ et que $B$ a pour coordonnées $(b,b)$, alors :

$$\begin{aligned}
AB &= \sqrt{(a-b)^2+(a-b)^2}\\
&= \sqrt{2a^2-4ab+2b^2}\\
&= \sqrt{2(a^2+b^2)-4ab}\\
&= \sqrt{2r^2-4\left(\frac{1}{2}(p^2-r^2)\right)}\\
&= \sqrt{4r^2-2p^2}
\end{aligned}$$

L'aire du quadrilatère $CADB$ est égale à $\frac{1}{2}(AB)(CD)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-2p^2}\sqrt{2p^2}$, ou $\sqrt{2r^2p^2-p^4}$.

Pour que cette aire soit un maximum, il faut que $2r^2p^2 - p^4$, ou $2r^2(p^2) - (p^2)^2$ soit un maximum.
Puisque la valeur de $r$ est fixe, le polynôme $2r^2(p^2) - (p^2)^2$, en $p$, est de la forme bicarrée. En posant $q = p^2$, il devient $-q^2 + 2r^2q$. Donc, l'équation $Q = -q^2 + 2r^2q$ définit une fonction du second degré. Puisque le coefficient de $q^2$ est négatif, la parabole représentative est ouverte vers le bas.
La valeur maximale de $Q$ correspond donc à l'ordonnée du sommet de la parabole. L'abscisse du sommet est égale à $-\dfrac{2r^2}{2(-1)}$, ou $r^2$. $Q$ admet donc une valeur maximale lorsque $q = r^2$. L'aire du quadrilatère est donc maximale lorsque $p^2 = r^2$.
Puisque $p^2 = r^2$, alors $(a+b)^2 = p^2 = r^2$, d'où $a^2 + 2ab + b^2 = r^2$.
Puisque $a^2 + b^2 = r^2$, alors $2ab = 0$. Donc, $a = 0$ ou $b = 0$, ce qui implique que les coordonnés de $A$ ou de $B$ sont $(0,0)$, c'est-à-dire que $A$ ou $B$ est situé à l'origine.

(c) Dans la partie (b), on a déterminé que $AB = \sqrt{4r^2 - 2p^2}$, ou $AB = \sqrt{2}\sqrt{2r^2 - p^2}$.
Puisque $r$ et $p$ sont des entiers supérieurs à 1, alors $2r^2 - p^2 \neq 0$. Donc, la valeur minimale non nulle de l'expression $2r^2 - p^2$ est 1, puisque $2r^2 - p^2$ est un entier.
Donc, la distance minimale possible entre $A$ et $B$ est égale à $\sqrt{2}\sqrt{1}$, ou $\sqrt{2}$.
Il reste à trouver une valeur entière de $p$ et de $r$ pour lesquelles la distance est égale à $\sqrt{2}$.
Si $r = 5$ et $p = 7$, alors $2r^2 - p^2 = 1$ et $AB = \sqrt{2}$.
(L'équation $2r^2 - p^2 = 1$, ou l'équation équivalente $p^2 - 2r^2 = -1$ admet une infinité de solutions. Une telle équation est appelée une équation de Pell.)

10. (a) On calcule la valeur directement.
Lors de sa 1re traversée, de gauche à droite, Joséphine ferme toutes les portes de numéro pair et elle laisse ouvertes les portes de numéro impair.
La 2e traversée va de droite à gauche. Au départ, les portes 1, 3, …, 47, 49 sont ouvertes. Pendant sa 2e traversée, elle ferme les portes 47, 43, 39, …, 3.
La 3e traversée va de gauche à droite. Au départ, les portes 1, 5, …, 45, 49 sont ouvertes. Pendant sa 3e traversée, elle ferme les portes 5, 13, …, 45.
Les portes 1, 9, 17, 25, 33, 41, 49 restent ouvertes.
Pendant sa 4e traversée, de droite à gauche, elle ferme les portes 41, 25 et 9. Les portes 1, 17, 33 et 49 restent ouvertes.
Pendant sa 5e traversée, de gauche à droite, elle ferme les portes 17 et 49. Les portes 1 et 33 restent ouvertes.
Pendant sa 6e traversée, de droite à gauche, elle ferme la porte 1. La porte 33 reste ouverte.
Donc $f(50) = 33$.

(b) et (c) *Solution 1*
On remarque d'abord que si $n$ est pair, c'est-à-dire si $n = 2k$, alors
$f(n) = f(2k) = f(2k-1) = f(n-1)$. Ce résultat est justifié dans la Solution 2.
Donc, il suffit de déterminer des valeurs impaires de $n$ dans les parties (b) et (c).

On suppose qu'il existe une valeur de $n$ pour laquelle $f(n) = 2005$, c'est-à-dire pour laquelle la porte 2005 est la dernière porte ouverte.
Pendant sa 1re traversée, Joséphine ferme chaque deuxième porte. Elle ferme donc toutes les portes ayant un numéro $m$ tel que $m \equiv 0 \pmod 2$.
Les portes ouvertes correspondent aux numéros $m$ tels que $m \equiv 1 \pmod 4$

ou $m \equiv 3 \pmod 4$.
Pendant sa 2<sup>e</sup> traversée, de droite à gauche, elle ferme chaque deuxième porte restée ouverte.
Après avoir fermé la première porte, elle ferme donc chaque quatrième porte de la rangée initiale.
Or, on veut que la porte 2005 reste ouverte et on sait que $2005 \equiv 1 \pmod 4$. Elle doit donc fermer toutes les portes numéro $m$ tel que $m \equiv 3 \pmod 4$.
Les portes ouvertes correspondent à des numéros $m$ tels que $m \equiv 1 \pmod 4$, c'est-à-dire tels que $m \equiv 1 \pmod 8$ ou $m \equiv 5 \pmod 8$.
Pendant sa 3<sup>e</sup> traversée, de gauche à droite, elle ferme chaque deuxième porte restée ouverte.
Après avoir fermé la première porte, elle ferme donc chaque huitième porte de la rangée initiale.
Puisque la porte 1 est ouverte, elle ferme la porte 5 et toutes les portes numéro $m$ tel que $m \equiv 5 \pmod 8$.
Or, puisque $2005 \equiv 5 \pmod 8$, elle ferme la porte 2005 pendant cette traversée.
Donc, il n'existe aucun entier positif $n$ pour lequel $f(n) = 2005$.

On démontre maintenant qu'il existe un nombre infini de valeurs entières de $n$ pour lesquelles $f(n) = f(2005)$.
On construit un tableau qui indique ce qui arrive lorsqu'il y a 2005 casiers. On indique le numéro de la traversée, sa direction, la 1<sup>re</sup> porte ouverte à partir de la gauche, la 1<sup>re</sup> porte ouverte à partir de la droite, toutes les portes ouvertes avant la traversée, les portes qui se fermeront pendant la traversée et les portes qui resteront ouvertes après la traversée.

| Trav. n<sup>o</sup> | Dir. | Ouv. G | Ouv. D | Sont ouvertes | Seront fermées | Resteront ouvertes |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | G à D | 1 | 2005 | TOUTES | $\equiv 0 \pmod 2$ | $\equiv 1 \pmod 2$ |
| 2 | D à G | 1 | 2005 | $\equiv 1, 3 \pmod 4$ | $\equiv 3 \pmod 4$ | $\equiv 1 \pmod 4$ |
| 3 | G à D | 1 | 2005 | $\equiv 1, 5 \pmod 8$ | $\equiv 5 \pmod 8$ | $\equiv 1 \pmod 8$ |
| 4 | D à G | 1 | 2001 | $\equiv 1, 9 \pmod{16}$ | $\equiv 9 \pmod{16}$ | $\equiv 1 \pmod{16}$ |
| 5 | G à D | 1 | 2001 | $\equiv 1, 17 \pmod{32}$ | $\equiv 17 \pmod{32}$ | $\equiv 1 \pmod{32}$ |
| 6 | D à G | 1 | 1985 | $\equiv 1, 33 \pmod{64}$ | $\equiv 33 \pmod{64}$ | $\equiv 1 \pmod{64}$ |
| 7 | G à D | 1 | 1985 | $\equiv 1, 65 \pmod{128}$ | $\equiv 65 \pmod{128}$ | $\equiv 1 \pmod{128}$ |
| 8 | D à G | 1 | 1921 | $\equiv 1, 129 \pmod{256}$ | $\equiv 1 \pmod{256}$ | $\equiv 129 \pmod{256}$ |
| 9 | G à D | 129 | 1921 | $\equiv 129, 385 \pmod{512}$ | $\equiv 385 \pmod{512}$ | $\equiv 129 \pmod{512}$ |
| 10 | D à G | 129 | 1665 | $\equiv 129, 641 \pmod{1024}$ | $\equiv 129 \pmod{1024}$ | $\equiv 641 \pmod{1024}$ |
| 11 | G à D | 641 | 1665 | $\equiv 641, 1665 \pmod{2048}$ | $\equiv 1665 \pmod{2048}$ | $\equiv 641 \pmod{2048}$ |

Puisqu'il n'y a qu'un entier, de 1 à 2005, qui est congruent à $641 \pmod{2048}$, alors il n'y a qu'un casier ouvert, soit le numéro 641.
On remarque que pendant n'importe quelle traversée numéro $s$, l'ensemble des portes qui se fermeront dépend du numéro de la première porte ouverte à partir de la gauche si $s$ est impair, du numéro de la première porte ouverte à partir de la droite si $s$ est pair et du nombre auquel ce numéro est congruent modulo $2^s$.

On considère $n = 2005 + 2^{2a}$, $2^{2a} > 2005$ ; donc $a \geq 6$.
On montrera que $f(n) = f(2005) = 641$. (Dans la Solution 2, on justifie ce choix des valeurs de $n$.)
Supposons que l'on construit un tableau comme le précédent pour déterminer $f(n)$.
Pendant les 11 premières traversées, les données du tableau seront les mêmes, à l'exception

du numéro de la première porte ouverte à partir de la droite, qui serait augmenté de $2^{2a}$.
Qu'arrive-t-il après la 11e traversée ?
Après la 11e traversée, les portes ouvertes ont un numéro congruent à $641 \pmod{2048}$. La première porte ouverte à partir de la gauche est la porte 641 et la première porte ouverte à partir de la droite est la porte numéro $2^{2a} + 641$.
Au début de la 12e traversée, les portes ouvertes ont un numéro congruent à 641 ou à 2689 $\pmod{2^{12}}$.
Puisque le numéro de la première porte ouverte à partir de la droite, soit $(2^{2a} + 641)$, est congruent à $641 \pmod{2^{12}}$, alors les portes dont le numéro est congruent à $2689 \pmod{2^{12}}$ sont fermées pendant cette traversée. Les portes dont le numéro est congruent à $641 \pmod{2^{12}}$ sont laissées ouvertes
Donc, après cette 12e traversée, les numéros des portes ouvertes sont 641, $641 + 2^{12}$, $641 + 2(2^{12})$, $641 + 3(2^{12})$, $\ldots$, $641 + 2^{2a-12}(2^{12}) = 641 + 2^{2a}$.
Le nombre de portes ouvertes est égal à $2^{2a-12} + 1$.

Il reste à prouver que si le nombre de portes ouvertes est égal à un nombre de la forme $2^{2c}+1$, alors la dernière porte qui restera ouverte est la première à partir de la gauche. En effet, parmi les portes ouvertes après les $(2^{2a-12}+1)$ premières (c'est-à-dire 2 exposant pair plus 1), la porte ouverte la plus à gauche sera la dernière porte ouverte, en l'occurrence, la porte numéro 641. On aura alors $f(2^{2a} + 2005) = 641 = f(2005)$.

On considère donc une rangée de $2^{2c} + 1$ portes ouvertes.
On remarque que pendant une traversée, si le nombre de portes ouvertes est impair, alors on fermera la moitié du « nombre de portes ouvertes moins 1 » et que la première et la dernière porte resteront ouvertes.
Donc, $2^{2c-1}$ portes sont fermées pendant la traversée, ce qui laisse $2^{2c} + 1 - 2^{2c-1}$ portes, ou $2^{2c-1} + 1$ portes ouvertes. Il reste donc un nombre impair de portes ouvertes.
Pendant la traversée suivante, $2^{2c-2}$ portes seront fermées (puisqu'il y a un nombre impair de portes ouvertes au départ), ce qui laisse $2^{2c-2} + 1$ portes ouvertes.
On continue de la sorte jusqu'à ce qu'il y ait $2^1 + 1$ portes, ou 3 portes ouvertes avant d'entreprendre une traversée de numéro pair (de droite à gauche). Donc, la porte du milieu est fermée pendant cette avant-dernière traversée.
Pendant la dernière traversée, de gauche à droite, la deuxième porte est fermée et la première reste ouverte.
Donc, si on a $2^{2c} + 1$ portes ouvertes, la première porte, à partir de la gauche, sera la dernière porte ouverte.

On reporte ce résultat à la situation précédente. Donc, la dernière des $2^{2a-12} + 1$ portes qui restera ouverte est la première à partir de la gauche, soit la porte numéro 641. Donc $f(2^{2a} + 2005) = 641 = f(2005)$ si $a \geq 6$.

Il y a donc un nombre infini de valeurs entières de $n$ pour lesquelles $f(n) = f(2005)$.

*Solution 2*
On calcule d'abord $f(n)$ pour les valeurs de $n$ de 1 à 32, pour dévlopper un sens de ce qui se passe. On obtient successivement 1, 1, 3, 3, 1, 1, 3, 3, 9, 9, 11, 11, 9, 9, 11, 11, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 3, 3, 9, 9, 11, 11, 9, 9, 11, 11.
Ces résultats nous feront voir des régularités possibles.

On établit ensuite deux formules de récurrence pour $f(n)$.

D'après les résultats, il semble bien que $f(2m) = f(2m-1)$.
On doit démontrer que c'est toujours vrai.
On considère une rangée de $2m$ portes ouvertes.
Pendant la 1<sup>re</sup> traversée, Joséphine ferme toutes les portes dont le numéro est pair, laissant ouvertes les portes dont le numéro est égal à 1, 3, …, ou $2m-1$.
Or, s'il y avait eu $2m-1$ portes ouvertes au départ, les mêmes portes resteraient ouvertes après la première traversée.
Donc, au début de la 2<sup>e</sup> traversée, les mêmes portes sont ouvertes, que Joséphine ait commencé avec $2m$ portes ouvertes ou avec $2m-1$ portes ouvertes.
Donc $f(2m) = f(2m-1)$.
Il suffit donc d'examiner les valeurs de $f(n)$ lorsque $n$ est impair.

On démontre ensuite que $f(2m-1) = 2m+1-2f(m)$.
(Il est utile de lier $n = 2m-1$ à un nombre plus petit.)
Si on commence avec $2m-1$ portes ouvertes, les numéros des portes ouvertes à la fin de la 1<sup>re</sup> traversée sont 1, 3, …, $2m-1$. Il y a alors $m$ portes ouvertes.
Soit $f(m) = p$. Comme Joséphine s'apprête à faire sa 2<sup>e</sup> traversée, de droite à gauche, on peut considérer qu'il s'agit d'une 1<sup>re</sup> traversée devant une rangée de $m$ portes ouvertes.
La dernière porte qui restera ouverte est donc la $p^{\text{ième}}$ porte ouverte, à partir de la droite,
En comptant à partir de la droite, la première porte ouverte est la porte numéro $2m-1$, c'est-à-dire numéro $2m+1-2(1)$ ; la deuxième est la porte numéro $2m-3$, c'est-à-dire numéro $2m+1-2(2)$, et ainsi de suite. La $p^{\text{ième}}$ porte ouverte est la porte numéro $2m+1-2p$.
Donc, la dernière porte qui restera ouverte est la porte numéro $2m+1-2p$.
Donc $f(2m-1) = 2m+1-2p = 2m+1-2f(m)$.

On utilise cette formule de façon répétée pour obtenir deux autres formules de récurrence :

$$\begin{aligned}
f(4k+1) &= f(2(2k+1)-1) \\
&= 2(2k+1)+1-2f(2k+1) \\
&= 4k+3-2f(2(k+1)-1) \\
&= 4k+3-2(2(k+1)+1-2f(k+1)) \\
&= 4k+3-2(2k+3-2f(k+1)) \\
&= 4f(k+1)-3
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(4k+3) &= f(2(2k+2)-1) \\ &= 2(2k+2)+1-2f(2k+2) \\ &= 4k+5-2f(2k+1) \\ &= 4k+5-2f(2(k+1)-1) \\ &= 4k+5-2(2(k+1)+1-2f(k+1)) \\ &= 4k+5-2(2k+3-2f(k+1)) \\ &= 4f(k+1)-1 \end{aligned}$$

En examinant la liste des 32 premières valeurs de $f(n)$, il semble que la valeur de $f(n)$ ne peut pas être égale à un multiple de 8 plus 5, ni à un multiple de 8 plus 7. On le démontre en utilisant les formules de récurrence :

$$\begin{aligned} f(8l+1) &= 4f(2l+1)-3 \qquad \text{(puisque } 8l+1 = 4(2l)+1\text{)} \\ &= 4(2l+3-2f(l+1))-3 \\ &= 8l+9-8f(l+1) \\ &= 8(l-f(l+1))+9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(8l+3) &= 4f(2l+1)-1 \qquad \text{(puisque } 8l+3 = 4(2l)+3\text{)} \\ &= 4(2l+3-2f(l+1))-1 \\ &= 8l+11-8f(l+1) \\ &= 8(l-f(l+1))+11 \end{aligned}$$

De même, $f(8l+5) = 8l+9-8f(l+1)$ et $f(8l+7) = 8l+11-8f(l+1)$.
Puisque n'importe quel entier impair positif $n$ peut s'écrire sous la forme $8l+1$, $8l+3$, $8l+5$ ou $8l+7$, alors pour n'importe quel entier impair positif $n$, $f(n)$ est 9 ou 11 de plus qu'un multiple de 8.
Donc, pour n'importe quel entier impair positif $n$, $f(n)$ ne peut être égal à 2005, car 2005 n'est pas égal à 9 ou 11 de plus qu'un multiple de 8.
Puisqu'il suffit d'examiner les valeurs impaires de $n$, il n'existe aucun entier positif $n$ pour lequel $f(n) = 2005$.

On démontre maintenant qu'il existe un nombre infini de valeurs entières de $n$ pour lesquelles $f(n) = f(2005)$.
On examine de nouveau la liste des 32 premières valeurs de $f(n)$ et en posant la conjecture suivante :

$$f(2005) = f(2005 + 2^{2a})$$

si $2^{2a} > 2005$. (On peut formuler cette conjecture en comparant $f(1)$ et $f(5)$, $f(3)$ et $f(7)$, puis en comparant successivement $f(1)$ et $f(17)$, $f(2)$ et $f(18)$, …, $f(15)$ et $f(31)$. De fait, il semble que $f(m + 2^{2a}) = f(m)$ si $2^{2a} > m$.)

On utilise les formules de récurrence :

$$\begin{aligned}
f(2005+2^{2a}) &= 4f(502+2^{2a-2})-3 && (2005+2^{2a}=4(501+2^{2a-2})+1)\\
&= 4f(501+2^{2a-2})-3\\
&= 4(4f(126+2^{2a-4})-3)-3 && (501+2^{2a-2}=4(125+2^{2a-4})+1)\\
&= 16f(126+2^{2a-4})-15\\
&= 16f(125+2^{2a-4})-15\\
&= 16(4f(32+2^{2a-6})-3)-15 && (125+2^{2a-4}=4(31+2^{2a-6})+1)\\
&= 64f(32+2^{2a-6})-63\\
&= 64f(31+2^{2a-6})-63\\
&= 64(4f(8+2^{2a-8})-1)-63 && (31+2^{2a-6}=4(7+2^{2a-8})+3)\\
&= 256f(8+2^{2a-8})-127\\
&= 256f(7+2^{2a-8})-127\\
&= 256(4f(2+2^{2a-10})-1)-127 && (7+2^{2a-8}=4(1+2^{2a-10})+3)\\
&= 1024f(2+2^{2a-10})-383\\
&= 1024f(1+2^{2a-10})-383
\end{aligned}$$

(Remarquer qu'on aurait pu utiliser les mêmes expressions, sans les puissances de 2, pour démontrer que $f(2005)=1024f(1)-383$, ou $f(2005)=641$.)

Or, $f(2^{2b}+1)=1$ pour chaque entier positif $b$.
En effet, on peut le démontrer par récurrence.
Si $b=1$, on sait que $f(5)=1$.
Supposons que le résultat est vrai si $b=B-1$, $B$ étant un entier tel que $B\geq 2$.
Selon l'hypothèse d'induction, $f(2^{2B}+1)=f(4(2^{2B-2})+1)$, c'est-à-dire que $f(2^{2B}+1)=4f(2^{2B-2}+1)-3$, d'où $f(2^{2B}+1)=4(1)-3$, ou $f(2^{2B}+1)=1$ .

Donc si $a\geq 6$, alors $f(1+2^{2a-10})=f(1+2^{2(a-5)})$, d'où $f(1+2^{2a-10})=1$.
Donc $f(2005+2^{2a})=1024(1)-383$, ou $f(2005+2^{2a})=641$. Donc $f(2005+2^{2a})=f(2005)$.
Il existe donc un nombre infini de valeurs entières de $n$ pour lesquelles $f(n)=f(2005)$.

*Solution 3*
On trouve une formule pour $f(n)$ par induction et on la démontre en utilisant le raisonnement par récurrence et les formules de la Solution 2.
On écrit l'entier positif $n$ selon sa représentation binaire :

$$n = b_0 + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 2^2 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-1} + b_{2p} \cdot 2^{2p}$$

Chaque coefficient, $b_0, b_1, \cdots, b_{2p}$, est égal à 0 ou à 1 ; de plus, $b_{2p} = 1$ ou $b_{2p} = 0$ et $b_{2p-1} = 1$.
Sous forme binaire, $n$ est égal à $(b_{2p}b_{2p-1} \cdots b_1b_0)_2$ ou à $(b_{2p-1} \cdots b_1b_0)_2$.
On pose la conjecture suivante : Si $n$ est impair (ce qui implique que $b_0 = 1$), alors :

$$f(n) = b_0 + b_1 \cdot 2 + b_3 \cdot 2^3 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-1}$$

L'expression est donc égale à l'expression binaire de $n$ dont on a enlevé les puissances de 2 affectées d'exposants pairs. En effet, or remarque que $7 = 4 + 2 + 1$ et que $f(7) = 2 + 1$ ; $13 = 8 + 4 + 1$ et $f(13) = 8 + 1$ ; $27 = 16 + 8 + 2 + 1$ et $f(27) = 8 + 2 + 1$.
On sait déjà que si $n$ est pair, alors $f(n) = f(n-1)$ (on l'a démontré dans la Solution 2).

Pour l'instant, on suppose que la formule est démontrée. Elle le sera plus loin.

On peut résoudre les parties (b) et (c) rapidement.
On cherche des valeurs de $n$ pour lesquelles $f(n) = 2005$.
On écrit 2005 comme une somme de puissances de 2, ce qui est équivalent à la notation binaire :

$$2005 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 16 + 4 + 1$$

Puisque cette expression utilise des puissances de 2 affectées d'exposants pairs, alors il n'existe aucune valeur de $n$ pour laquelle $f(n) = 2005$.

On doit démontrer qu'il existe un nombre infini de valeurs entières de $n$ pour lesquelles $f(n) = f(2005)$.
On remarque d'abord que si $n = 2005 + 2^{2a}$, $a \geq 6$, alors les 11 derniers chiffres binaires de $n$ sont les mêmes que ceux de 2005 et que les seuls 1 dans la représentation binaire de $n = 2005 + 2^{2a}$ qui sont dans des positions correspondant à une puissance de 2 affectée d'un exposant impair sont ceux qui proviennent de la portion 2005 (puisque le « 1 » supplémentaire de $2^{2a}$ correspond à une puissance de 2 affectée d'un exposant pair).
Puisque l'on calcule $f(2005 + 2^{2a})$ en regardant les puissances de 2 affectées d'un exposant impair, alors $f(2005 + 2^{2a}) = f(2005)$ pour tout entier $a \geq 6$.
Donc, il existe un nombre infini de valeurs entières de $n$ pour lesquelles $f(n) = f(2005)$.

Il reste à démontrer que la formule pour $f(n)$ est vraie. On utilise le raisonnement par récurrence.
D'après la liste des 31 premières valeurs de $f(n)$ dans la Solution 2, on voit que la formule est vraie pour les premières valeurs impaires de $n$.
On suppose que la formule est vraie pour toutes les valeurs impaires de $n$ jusqu'à $n = N-2$, $N$ étant un entier impair positif quelconque.
On considère $n = N$.

1$^{\text{er}}$ cas : $N = 4q + 1$
On peut écrire :
$$N = 1 + b_2 \cdot 2^2 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-1} + b_{2p} \cdot 2^{2p}$$

Donc :
$$q = b_2 + b_3 \cdot 2 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-3} + b_{2p} \cdot 2^{2p-2}$$

On remarque que $q < N - 2$, puisque $4q + 1 = N$, d'où $q = \frac{1}{4}N - \frac{1}{4}$.
D'après les formules de la Solution 2, $f(N) = f(4q + 1) = 4f(q + 1) - 3$.
Si $q$ est pair, alors $b_2 = 0$.
Donc $q + 1$ est impair et $q + 1 = 1 + b_3 \cdot 2 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-3} + b_{2p} \cdot 2^{2p-2}$.
Si $q$ est impair, alors $b_2 = 1$. Donc $q = 1 + b_3 \cdot 2 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-3} + b_{2p} \cdot 2^{2p-2}$ et $q + 1$ est pair, d'où $f(q + 1) = f(q)$.
Dans chacun de ces deux cas, on a $f(q+1) = f(1 + b_3 \cdot 2 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-3} + b_{2p} \cdot 2^{2p-2})$, d'où $f(q + 1) = 1 + b_3 \cdot 2 + b_5 \cdot 2^3 + \cdots b_{2p-1} \cdot 2^{2p-3}$ selon l'hypothèse de récurrence.
Donc $f(N) = 4(1 + b_3 \cdot 2 + b_5 \cdot 2^3 + \cdots b_{2p-1} \cdot 2^{2p-3}) - 3$,
ou $f(N) = 1 + b_3 \cdot 2^3 + b_5 \cdot 2^5 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-1}$, puisque $b_1 = 0$.
Donc, la formule est vraie pour $n = N$.

2$^{\text{e}}$ cas : $N = 4q + 3$
On peut écrire :

$$N = 1 + 2 + b_2 \cdot 2^2 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-1} + b_{2p} \cdot 2^{2p}$$

Donc :
$$q = b_2 + b_3 \cdot 2 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-3} + b_{2p} \cdot 2^{2p-2}$$

On remarque que $q < N - 2$, puisque $4q + 3 = N$.
D'après les formules de la Solution 2, $f(N) = f(4q + 3) = 4f(q + 1) - 1$.
Si $q$ est pair, alors $b_2 = 0$.
Donc $q + 1$ est impair et $q + 1 = 1 + b_3 \cdot 2 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-3} + b_{2p} \cdot 2^{2p-2}$.
Si $q$ est impair, alors $b_2 = 1$. Donc $q = 1 + b_3 \cdot 2 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-3} + b_{2p} \cdot 2^{2p-2}$ et $q + 1$ est pair, d'où $f(q + 1) = f(q)$.
Dans chacun de ces deux cas, on a $f(q+1) = f(1 + b_3 \cdot 2 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-3} + b_{2p} \cdot 2^{2p-2})$, d'où $f(q + 1) = 1 + b_3 \cdot 2 + b_5 \cdot 2^3 + \cdots b_{2p-1} \cdot 2^{2p-3}$ selon l'hypothèse de récurrence.
Donc $f(N) = 4(1 + b_3 \cdot 2 + b_5 \cdot 2^3 + \cdots b_{2p-1} \cdot 2^{2p-3}) - 1$, ou $f(N) = 1 + 2 + \cdot b_3 \cdot 2^3 + b_5 \cdot 2^5 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-1}$.
Donc, la formule est vraie pour $n = N$.

Donc, la formule est vraie pour toutes les valeurs impaires de $n$ jusqu'à $N$.
Selon le principe du raisonnement par récurrence, la formule est vraie pour toutes les valeurs impaires de $n$. Cela complète la démonstration.

*Solution 4*
On remarque que si $n = 2k$ est pair, alors $f(n) = f(2k) = f(2k-1) = f(n-1)$. Voir la justification dans la Solution 2.
Il suffit donc de considérer les valeurs impaires de $n$ dans les parties (b) et (c).

On écrit $n$ sous forme binaire, soit $n = (b_{2p}b_{2p-1}\cdots b_2b_1 1)_2$, chaque chiffre étant égal à 0 ou à 1. On accepte que $b_{2p} = 0$ si $b_{2p-1} = 1$. Puisque $n$ est impair, le dernier chiffre doit être égal à 1.
On pose la conjecture suivante :
Si $n = (b_{2p}b_{2p-1}\cdots b_2b_1 1)_2$, alors $f(n) = (b_{2p-1}0b_{2p-3}0\cdots b_3 0 b_1 1)_2$. Dans la représentation binaire de $n$, chaque chiffre qui correspond à une puissance de 2 affectée d'un exposant pair est remplacé par le chiffre 0 pour donner la représentation binaire de $f(n)$.

Pour l'instant, on suppose que la formule est démontrée. Elle le sera plus loin.

On peut démontrer les parties (b) et (c) rapidement.
On cherche des valeurs de $n$ pour lesquelles $f(n) = 2005$.
Puisque $2005 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 16 + 4 + 1$, alors $2005 = (11111010101)_2$.
Dans la représentation binaire de 2005, les chiffres en positions paires, à partir de la droite, ne sont pas tous des 0. Donc, 2005 ne peut pas correspondre à une valeur de $f(n)$, quelle que soit la valeur de $n$.

Pourquoi y a-t-il un nombre infini de valeurs de $n$ pour lesquelles $f(n) = 2005$ ?
On considère une valeur particulière de $n$ pour laquelle $n = 2005 + 2^{2a}$, $2^{2a} > 2005$ (c'est-à-dire que $n \geq 6$).
La représentation binaire de $n$ est alors $n = (10\cdots 011111010101)_2$, le premier 1, à gauche, correspondant à une puissance de 2 affectée d'un exposant pair. Dans l'évaluation de $f(n)$, ce chiffre est donc remplacé par 0.
Donc $f(n) = (00\cdots 001010000001)_2$, d'où $f(n) = (1010000001)_2$, ce qui est égal à $f(2005)$.
Il existe donc un nombre infini de valeurs entières de $n$ pour lesquelles $f(n) = f(2005)$.

Il reste à démontrer que la formule pour $f(n)$ est vraie.
On écrit les entiers de 1 à $n$ sous forme binaire :

$$\begin{array}{cccccc}
... & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
... & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
... & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
... & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
... & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
... & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
... & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
... & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & \vdots & & & \\
... & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & 1
\end{array}$$

Lorsque Joséphine fait une traversée de numéro impair, elle va de gauche à droite, ce qui correspond à descendre la liste. Lorsque la traversée a un numéro pair, elle va de droite à gauche, ce qui correspond à remonter la liste.

Pendant la 1[re] traversée, elle enlève chaque deuxième nombre en descendant la liste. Elle

enlève donc chaque nombre pair, c'est-à-dire chaque nombre qui est congruent à $2 \pmod 2$, ou chaque nombre dont le chiffre des unités est égal à 0.
Après la 1re traversée, les nombres qui restent ont un 1 pour chiffre des unités et leur deuxième chiffre (celui qui correspond à $2^1$) alterne entre 0 et 1, puisque les nombres de la liste alternent entre $1 \pmod 4$ et $3 \pmod 4$.

Pendant la 2e traversée, en remontant dans la liste, elle enlève chaque deuxième nombre qui reste. Puisque les nombres qui restent ont leurs deux derniers chiffres qui alternent entre 01 et 11 et que le dernier nombre de la liste n'est pas enlevé, alors elle laisse tous les nombres qui se terminent par $b_1 1$.
(Puisqu'elle enlève chaque quatrième nombre de la liste initiale, les deux derniers chiffres des nombres qui restent doivent être identiques.)
Les nombres qui restent dans la liste doivent donc tous être congruents à un même nombre, soit un nombre impair modulo 4.

On considère la 3e traversée.
Puisque un nombre sur quatre de la liste initiale est encore dans la liste, alors le premier nombre qui reste dans la liste est inférieur à 4.
Puisque chaque nombre qui reste dans la liste est congruent à un même nombre impair modulo 4, alors leurs trois derniers chiffres alternent entre $0b_1 1$ et $1b_1 1$ (leurs deux derniers chiffres sont les mêmes pour chaque nombre).
Puisque le premier nombre est inférieur à 4, il se termine en $0b_1 1$.
Puisqu'on enlève chaque deuxième nombre, on enlève donc chaque nombre qui se termine en $1b_1 1$, tout en laissant tous les nombres dont les trois derniers chiffres sont $0b_1 1$. Donc, tous les nombres qui restent sont congruents à un même nombre modulo 8.
Quel est le dernier nombre qui reste dans la liste ?
Si le dernier nombre de la liste, avant cette traversée, était $...b_3 0 b_1 1$ (c.-à-d. que $b_2 = 0$), alors ce nombre est encore le dernier.
Si le dernier nombre de la liste, avant cette traversée, était $...b_3 1 b_1 1$ (c.-à-d. que $b_2 = 1$), alors l'avant-dernier nombre était $(...b_3 1 b_1 1)_2 - 4$, ou $(...b_3 0 b_1 1)_2$, et c'est ce nombre qui reste aprés la traversée. Dans un cas comme dans l'autre, le dernier nombre de la liste est $...b_3 0 b_1 1$.

On considère maintenant une traversée générale de numéro pair, c'est-à-dire de numéro $2m$. Joséphine monte donc dans la liste.
Le dernier nombre de la liste (c.-à-d. le premier nombre rencontré) est $...b_{2m-1} 0 b_{2m-3} 0 \cdots b_3 0 b_1 1$ et les nombres qui restent dans la liste ont leurs quatre derniers chiffres qui alternent entre $...10 b_{2m-3} 0 \cdots b_3 0 b_1 1$ et $...00 b_{2m-3} 0 \cdots b_3 0 b_1 1$ (puisque chaque $(2^{2m-1})^{\text{ième}}$ nombre de la liste initiale est encore dans la liste).
Puisque le dernier nombre de la liste n'est pas enlevé, on enlève tous les nombres dont le $(2m-1)^{\text{ième}}$ chiffre est différent de celui du dernier nombre. Il reste donc tous les nombres qui se terminent par $...b_{2m-1} 0 b_{2m-3} 0 \cdots b_3 0 b_1 1$. Il reste donc chaque $(2^{2m})^{\text{ième}}$ nombre de la liste initiale.
Puisque tous les nombres qui restent sont impairs, alors le plus petit nombre qui reste est plus petit que $2^{2m}$. Il se termine donc par $...0 b_{2m-1} 0 b_{2m-3} 0 \cdots b_3 0 b_1 1$.

Dans la traversée suivante (de numéro impair), la liste contient, en alternance, tous les nombres qui se terminent par $...0 b_{2m-1} 0 b_{2m-3} 0 \cdots b_3 0 b_1 1$ ou $...1 b_{2m-1} 0 b_{2m-3} 0 \cdots b_3 0 b_1 1$.
Puisque le premier nombre rencontré se termine par $...0 b_{2m-1} 0 b_{2m-3} 0 \cdots b_3 0 b_1 1$, alors on

enlève tous les nombres qui se terminent par $...1b_{2m-1}0b_{2m-3}0\cdots b_30b_11$, tout en laissant ceux qui se terminent par $...0b_{2m-1}0b_{2m-3}0\cdots b_30b_11$, c'est-à-dire chaque $(2^{2m+1})^{\text{ième}}$ nombre de la liste initiale.
Avant cette dernière traversée, le dernier nombre de la liste était
$...b_{2m+1}b_{2m}b_{2m-1}0b_{2m-3}0\cdots b_30b_11$.
Après cette traversée, le dernier nombre de la liste est $...b_{2m+1}0b_{2m-1}0b_{2m-3}0\cdots b_30b_11$, selon un argument semblable à celui utilisé pour la 3e traversée.

Le procédé se poursuit de la même façon et le dernier nombre qui restera dans la liste sera $b_{2p-1}0b_{2p-3}0\cdots b_30b_11$. Donc $f(n) = (b_{2p-1}0b_{2p-3}0\cdots b_30b_11)_2$