Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide

pour les prix
Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Le mardi 19 avril 2005

Avec la contribution de:

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche
Comptables agréés

Avec la participation de:

Institut canadien des actuaires

The Great-West Life Assurance Company

stronger communities together™ GREAT-WEST LIFE | LONDON LIFE

London Life, compagnie d'assurance-vie et La Great-West, compagnie d'assurance vie

Sybase

iAnywhere Solutions

Durée: 2 heures et demie

L'utilisation de la calculatrice **est permise**, pourvu que celle-ci ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

N'ouvrez pas ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions valant 10 points chacune. Les parties de chaque question peuvent être de deux types. Les parties à **RÉPONSE COURTE** valent 2 points chacune (questions 1 et 2) ou 3 points chacune (questions 3 à 7). Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points pour la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES:

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci: .
2. **Écrire la réponse dans la case approprié du cahier-réponse.** Le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera accordée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT:

1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci: .
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Soyez prudent d'avoir mis votre nom sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont accordés pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

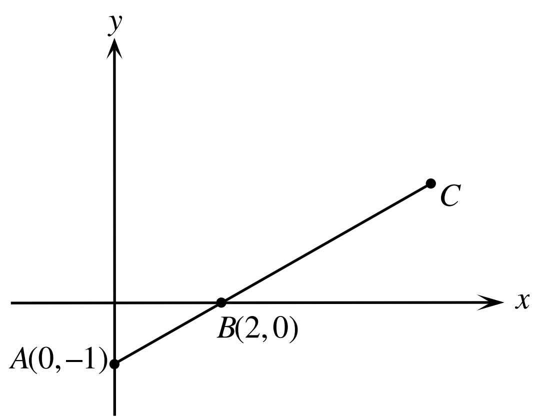
Remarque:
À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

REMARQUES

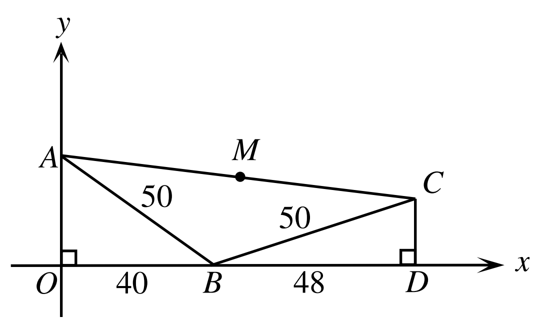
1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Une partie des points peut être accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. Sauf avec indication contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de valeurs exactes, telles que 4π, $2+\sqrt{7}$, etc.

1. (a) Si le point (a, a) est situé sur la droite d'équation $3x - y = 10$, quelle est la valeur de a ?

   (b) Dans la figure ci-contre, les points A, B et C sont situés sur une droite et $BC = 2AB$. Quelles sont les coordonnées du point C ?



   (c) Dans la figure ci-contre, les triangles AOB et CDB sont rectangles et le point M est le milieu du segment AC. Déterminer les coordonnées de M.



2. (a) Si $y = 2x + 3$ et $4y = 5x + 6$, quelle est la valeur de x ?

   (b) a, b, et c sont des nombres tels que :

$$\begin{aligned} -3b + 7c &= -10 \\ b - 2c &= 3 \\ a + 2b - 5c &= 13 \end{aligned}$$

   Quelle est la valeur de a ?

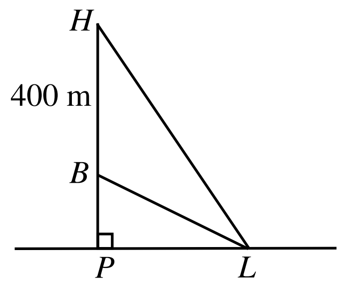
   (c) Jean et Marie ont participé au concours Euclide. Deux fois la note de Jean est 60 de plus que celle de Marie. Deux fois la note de Marie est 90 de plus que celle de Jean. Déterminer la moyenne de la note de Jean et de celle de Marie.

3. (a) Si $2^x = 2(16^{12}) + 2(8^{16})$, quelle est la valeur de x ?

(b) Soit $f(x) = 2x - 1$.
Déterminer toutes le valeurs réelles de x pour lesquelles $\left(f(x)\right)^2 - 3f(x) + 2 = 0$.

4. (a) Six billets, numérotés de 1 à 6, sont placés dans une boîte. Deux billets sont choisis au hasard en même temps et sont déposés sur une table. Quelle est la probabilité pour que le plus petit des numéros sur ces deux billets soit inférieur ou égal à 4 ?

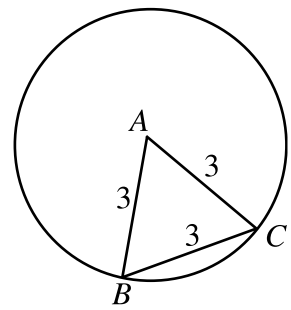
(b) Un hélicoptère vole en position fixe au point H, directement au-dessus du point P au sol. Louis est assis au sol au point L, de manière que $\angle HLP = 60°$. On laisse tomber une balle de l'hélicoptère. Lorsque la balle atteint le point B, à 400 m en dessous de l'hélicoptère, on a $\angle BLP = 30°$. Déterminer la distance entre les points L et P.



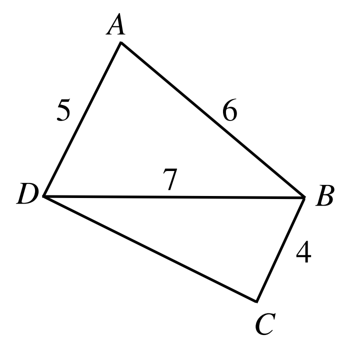
5. (a) Une chèvre est située à l'origine $(0, 0)$ et elle se déplace selon une série de mouvements. Son l[er] mouvement la mène au point $(0, 1)$. Lors du 2[e] mouvement, elle se déplace de 2 unités vers la droite pour arriver au point $(2, 1)$. Lors du 3[e] mouvement, elle se déplace de 3 unités vers le bas pour arriver au point $(2, -2)$. Lors du 4[e] mouvement, elle se déplace de 4 unités pour arriver au point $(-2, -2)$. Elle continue de la sorte, de manière qu'au $n^{\text{ième}}$ mouvement, elle tourne de $90°$ dans le sens des aiguilles d'une montre, puis elle se déplace de n unités dans cette nouvelle direction. Après n mouvements, la chèvre s'est déplacée de 55 unités. Déterminer les coordonnées du point où elle se trouve après ces n mouvements.

(b) Déterminer toutes les valeurs possibles de r de manière que la suite géométrique de trois termes, 4, $4r$, $4r^2$, soit aussi une suite arithmétique.
(Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme est obtenu en additionnant une constante au term précédent. Par exemple, 3, 5, 7, 9, 11 est une suite arithmétique.)

6. (a) Un triangle ABC a des côtés de longueur 3. Ses sommets B et C sont situés sur un cercle de rayon 3. On fait subir au triangle une rotation de centre C, dans le sens des aiguilles d'une montre, jusqu'à ce que le sommet A soit sur le cercle, puis une rotation de centre A jusqu'à ce que le sommet B soit sur le cercle, ainsi de suite, jusqu'à ce que le triangle revienne à sa position initiale. Quelle est la distance totale parcourue par le point B ?

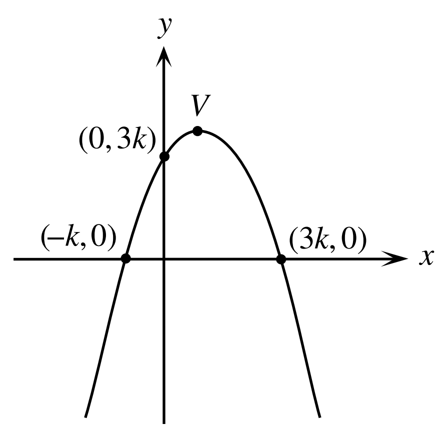


(b) Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un quadrilatère dans lequel $\angle A + \angle C = 180°$. Déterminer la longueur du côté CD.



7. (a) Soit $f(x) = \sin^2 x - 2\sin x + 2$. Quelles sont les valeurs maximale et minimale de $f(x)$?

(b) Dans la figure ci-contre, la parabole d'équation $y = -\frac{1}{4}(x-r)(x-s)$ coupe les axes en trois points distincts. Le point V est le sommet de la parabole. Déterminer la valeur de k, ainsi que les coordonnées du point V.

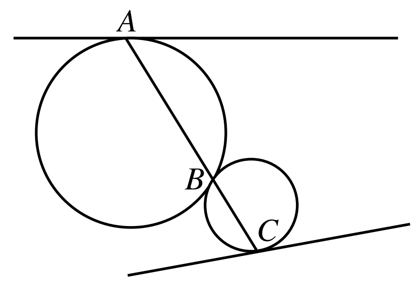


8\. (a) Une fonction est définie comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -4 \\ -x & \text{si } -4 \leq x \leq 5 \\ -5 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Sur le quadrillé fourni à cet effet, tracer le graphique de la relation définie par $y = g(x)$ où $g(x) = \sqrt{25 - [f(x)]^2}$.
Nommer la forme du graphique dans chacun des trois intervalles.

(b) Dans la figure ci-contre, les deux cercles sont tangents l'un à l'autre au point B. Une droite coupe les deux cercles aux points A, B, et C. Une tangente à un cercle est tracée au point A et une tangente au deuxième cercle est tracée au point C. Démontrer que ces deux tangentes sont parallèles.



9\. Le cercle d'équation $(x - p)^2 + y^2 = r^2$ a pour centre C et le cercle d'équation $x^2 + (y - p)^2 = r^2$ a pour centre D. Ces cercles se coupent en deux points *distincts*, A et B, ayant pour abscisse respective a et b.

(a) Démontrer que $a + b = p$ et $a^2 + b^2 = r^2$.

(b) Si on fixe la valeur de r et que la valeur de p est choisie de manière que l'aire du quadrilatère $CADB$ soit un maximum, démontrer que A ou B doit être situé à l'origine.

(c) Si p et r sont des entiers, déterminer la distance minimale possible entre les points A et B. Déterminer une valeur entière de p et de r, chacune supérieure à 1, qui donnent cette distance.

10\. Dans un couloir d'une école, il y a n casiers ouverts, numérotés de 1 à n. En arrivant à l'école Joséphine commence au début du couloir et ferme la porte de chaque deuxième casier. Ensuite, elle revient sur ses pas et ferme la porte de chaque deuxième casier dont la porte était encore ouverte. Elle continue de la sorte jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une porte ouverte. Soit $f(n)$ le numéro du dernier casier dont la porte est ouverte.
Par exemple, s'il y a 15 casiers, l'exemple suivant démontre que $f(15) = 11$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
$\longrightarrow$	1	~~2~~	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	15	
	~~1~~		3		~~5~~		7		~~9~~		11		~~13~~		15	$\longleftarrow$
$\longrightarrow$			3				~~7~~				11				~~15~~	
			~~3~~								11					$\longleftarrow$

(a) Déterminer $f(50)$.

(b) Démontrer qu'il n'existe aucun entier positif n pour lequel $f(n) = 2005$.

(c) Démontrer qu'il existe un nombre infini de valeurs entières de n pour lesquelles $f(n) = f(2005)$.

Concours canadien de mathématiques

Pour les étudiants...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2005!
En 2004, plus de 15 000 étudiants autour du monde se sont inscrits au concours Euclide.

Si vous graduez de l'école secondaire, bonne chance dans vos futurs accomplissements.
Si vous retournerez à l'école secondaire l'année prochaine, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Défi ouvert canadien de mathématiques qui aura lieu à la fin novembre.

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour trouver
- **plus d'information à propos du Défi ouvert canadien de mathématiques**
- **des copies gratuites des concours précédents**
- **des ateliers pour vous aider à vous préparer aux concours futurs**
- **de l'information au sujet de nos publications pour l'enrichissement mathématiques et pour la préparation aux concours**
- **de l'information concernant les carrières en mathématiques**

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- **obtenir des renseignements concernant les concours de 2005-6**
- **apprendre à propos des ateliers et des ressources disponibles aux enseignants**
- **trouver les résultats de votre école**