Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Cayley 2005

(10e année ou Secondaire IV)

Le mercredi 23 février 2005

Solutions

1. On simplifie : $a+1+a-2+a+3+a-4 = a+a+a+a+1-2+3-4 = 4a-2$

   Réponse : (C)

2. On annule les facteurs qui sont communs dans les numérateurs et les dénominateurs :

$$\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{6}{7}\right)\left(\frac{7}{8}\right)\left(\frac{8}{9}\right) = \left(\frac{4}{\cancel{5}}\right)\left(\frac{\cancel{5}}{\cancel{6}}\right)\left(\frac{\cancel{6}}{\cancel{7}}\right)\left(\frac{\cancel{7}}{\cancel{8}}\right)\left(\frac{\cancel{8}}{9}\right) = \frac{4}{9}$$

   Réponse : (A)

3. Le plus grand multiple de 17 qui est inférieur à 70 est 68. On a donc $70 = 4(17) + 2$. Le reste est égal à 2.

   Réponse : (D)

4. Puisque $\dfrac{3}{x+10} = \dfrac{1}{2x}$, on obtient $6x = x + 10$ par le produit en croix, d'où $5x = 10$, ou $x = 2$.

   Réponse : (D)

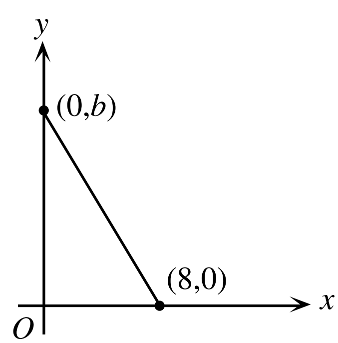
5. $(5^2 - 4^2)^3$ est égal à $(25-16)^3$, c'est-à-dire à 9^3, ou 729.

   Réponse : (E)

6. 8 volontaires qui travaillent 40 heures chacun et qui recueillent chacun 18 \$ l'heure recueillent en tout $8 \times 40 \times 18$ \$, c'est-à-dire 5760 \$.
   Si 12 volontaires travaillent 32 heures chacune, tout en recueillant un total de 5760 \$, alors chacune a recueilli $\dfrac{5760}{12 \times 32}$ \$ l'heure, c'est-à-dire 15 \$ l'heure.

   Réponse : (C)

7. *Solution 1*
   Puisque la pente est de $-\frac{3}{2}$, alors à partir d'un point sur la droite, on doit descendre de 3 unités chaque fois que l'on bouge de 2 unités vers la droite si on veut rester sur cette droite.



   Pour se rendre du point $(0, b)$ au point $(8, 0)$, on bouge de 8 unités vers la droite, c'est-à-dire qu'on bouge quatre fois de 2 unités.
   On doit donc bouger quatre fois de 3 unités vers le bas pour un total de 12 unités.
   Donc $b = 12$.

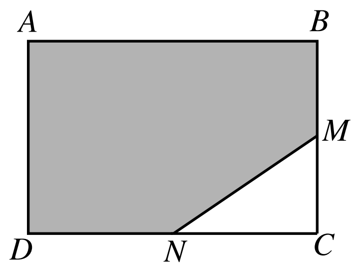
   Solution 2
   Puisque la pente est de $-\frac{3}{2}$, alors $\frac{b-0}{0-8} = -\frac{3}{2}$, ou $-\frac{b}{8} = -\frac{3}{2}$. Donc $b = 8 \times \frac{3}{2}$, d'où $b = 12$.

   Réponse : (B)

8. José a couru un total de 24 km.
Il a couru les premiers 12 km à une vitesse de 12 km/h. Il a donc mis 1 h pour courir ces 12 km.
Il a couru les 12 km suivants à une vitesse de 6 km/h. Il a donc mis 2 h pour courir ces 12 km.
Il a donc couru pendant 3 heures.
Puisque Julie a couru les 24 km en 3 heures, elle a couru à une vitesse de 8 km/h.

RÉPONSE : (A)

9. *Solution 1*
Puisque M est le milieu du côté BC et que $CM = 4$, alors $BC = 8$.

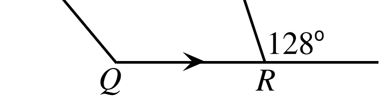


Puisque N est le milieu du côté CD et que $NC = 5$, alors $CD = 10$.
Puisque $ABCD$ est un rectangle, son aire est égale à 10×8, ou 80.
L'aire du triangle NCM est égale à $\frac{1}{2}(4)(5)$, ou 10. L'aire de la partie ombrée est égale à l'aire du rectangle moins celle du triangle NCM, soit à 70.
La fraction du rectangle qui est ombrée est égale à $\dfrac{70}{80}$. Cette fraction est équivalente à 0,875. Donc, 87,5 % du rectangle est ombré.

Solution 2
On peut généraliser la Solution 1.
Soit $BC = 2x$ et $CD = 2y$.
Puisque M est le milieu du côté BC, alors $CM = x$.
Puisque N est le milieu du côté CD, alors $NC = y$.
Puisque $ABCD$ est un rectangle, son aire est égale à $(2x)(2y)$, ou $4xy$.
L'aire du triangle NCM est égale à $\frac{1}{2}(NC)(MC)$, ou $\frac{1}{2}xy$. L'aire de la partie ombrée est égale à l'aire du rectangle moins celle du triangle NCM, c'est-à-dire à $4xy - \frac{1}{2}xy$, ou $\frac{7}{2}xy$.
La fraction du rectangle qui est ombrée est égale à $\dfrac{\frac{7}{2}xy}{4xy}$, ou $\frac{7}{8}$. Cette fraction est équivalente à 0,875. Donc, 87,5 % du rectangle est ombré.

RÉPONSE : (D)

10. *Solution 1*
Puisque PT et RQ sont parallèles, alors $2x^\circ = 128^\circ$, ou $x = 64$. Donc $\angle TPQ = 64^\circ$.



Puisque PT et QR sont parallèles, les angles TPQ et PQR sont supplémentaires.
Donc $\angle PQR + 64^\circ = 180^\circ$, d'où $\angle PQR = 116^\circ$.

Solution 2
Puisque la somme de la mesure des deux angles au point R est égale à $180°$, alors $\angle QRT + 128° = 180°$, d'où $\angle QRT = 52°$.
Puisque PT et QR sont parallèles, les angles PTR et QRT sont supplémentaires.
Donc $2x° + 52° = 180°$, d'où $2x° = 128°$, ou $x = 64$.
Donc, trois des angles du quadrilatère $PQRT$ ont une mesure respective de $64°$, $128°$ et $52°$.
Puisque la somme de la mesure des angles d'un quadrilatère est égale à $360°$, alors $\angle PQR = 360° - 64° - 128° - 52°$, d'où $\angle PQR = 116°$.

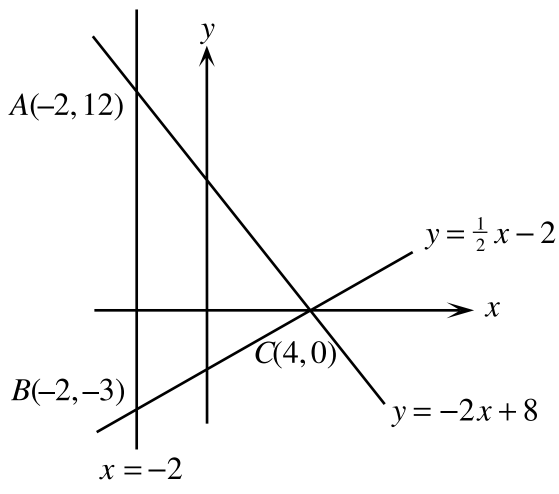
Réponse : (A)

11. *Solution 1*
Le botté le plus long a 6 m de plus que la longueur moyenne des trois bottés.
La longueur totale des deux autres bottés doit donc avoir 6 m de moins que cette moyenne.
Puisque ces deux autres bottés sont de la même longueur, chacun doit avoir 3 m de moins que la moyenne. Les deux autres bottés ont donc chacun une longueur de 34 m.

Solution 2
Puisque les trois bottés ont une longueur moyenne de 37 m, leur longueur totale est de 3×37 m, ou 111 m.
Soit x la longueur de chacun des autres bottés, en mètres.
Donc $43 + 2x = 111$, d'où $x = 34$.

Réponse : (D)

12. On détermine d'abord les points où les droites obliques coupent la droite verticale. Aux points d'intersection, on a $x = -2$.
Pour l'intersection avec la droite d'équation $y = -2x + 8$, posons $x = -2$. On a $y = -2(-2) + 8$, d'où $y = 12$. Le point d'intersection a pour coordonnées $(-2, 12)$.
Pour l'intersection avec la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 2$, posons $x = -2$. On a $y = \frac{1}{2}(-2) - 2$, ou $y = -3$. Le point d'intersection a pour coordonnées $(-2, -3)$.

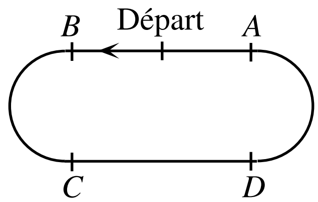


Le triangle ABC a donc une base AB de longueur $12-(-3)$, ou 15. La hauteur correspondante est mesurée sur l'axe des abscisses, entre le sommet C et le segment AB. Sa longueur est de $4-(-2)$, ou 6.
L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(15)(6)$, ou 45.

Réponse : (E)

13. Puisqu'il marche à une vitesse de 1,4 m/s, André parcourt une distance de $60 \times 1{,}4$ m par minute, ou 84 m par minute.

Puisqu'il marche pendant 30 minutes, il parcourt une distance totale de 30×84 m, ou 2520 m. La piste a un tour de 400 m. Après avoir marché 2400 m, André est de retour à la ligne de départ.
Puisque les points A, B, C et D divisent la piste en quatre sections de même longueur, il y a une distance de 100 m entre deux points consécutifs.
Puisque le point de départ est à mi-chemin entre A et B, il est à 50 m de B.



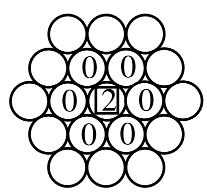
Après avoir parcouru 2450 m, André est au point B.
Il lui reste alors 70 m à parcourir. À la fin, il sera donc à 70 m au-delà du point B et à 30 m du point C. Le point le plus près est donc le point C.

Réponse : (C)

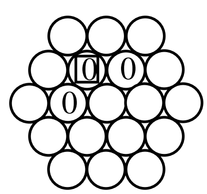
14. Pour que le nombre $\sqrt{1+2+3+4+x}$ soit un entier, il faut que le nombre $1+2+3+4+x$, ou $10+x$, soit un carré parfait.
On peut donc reformuler la question comme suit : Combien y a-t-il de valeurs de x, inférieures à 100, pour lesquelles le nombre $10+x$ est un carré parfait ?
Puisque x peut prendre des valeurs de 1 à 99, l'expression $10+x$ peut prendre des valeurs de 11 à 109.
Or, il y a 7 carrés parfaits dans cet intervalle, soit 16, 25, 36, 49, 64, 81 et 100. Il y a donc 7 valeurs possibles de x, soit 6, 15, 26, 39, 54, 71 et 90.

Réponse : (B)

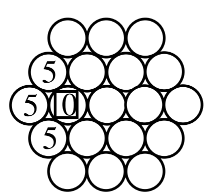
15. À partir du 2 au centre, on peut se déplacer vers six chiffres 0.



À partir de n'importe quel 0, on peut se déplacer vers deux chiffres 0.



À partir de n'importe quel 0, on peut se déplacer vers trois chiffres 5.



Pour chacun des 6 choix du premier chiffre 0, on peut choisir n'importe quel des 2 chiffres disponibles pour le deuxième 0 et dans chaque cas, on peut choisir n'importe quel des 3 chiffres 5 disponibles.
Le nombre de chemins disponibles est donc égal à $6 \times 2 \times 3$, ou 36.

Réponse : (A)

16. Pour commencer, il est bon d'écrire d'autres termes de la suite pour y déceler une régularité :

$$88, 24, 64, 40, 24, 16, 8, 8, 0, 8, 8, 0, 8, 8, 0, 8, \ldots$$

On voit qu'après quelques termes, la suite est formée de blocs répétés des nombres « 8, 8, 0 ». (On peut vérifier pourquoi : après « 8, 0 », on fait $8 - 0 = 8$ et le terme suivant est 8. On a donc « 8, 0, 8 ». Après « 0, 8 », on fait $8 - 0 = 8$ et le terme suivant est 8. On a donc « 8, 0, 8, 8 ». Après « 8, 8 », on fait $8 - 8 = 0$ et le terme suivant est 0. On a donc « 8, 0, 8, 8, 0 » et la régularité recommence.)
Les 99 premiers termes de la suite sont composés des 6 premiers, soit 88, 24, 64, 40, 24 et 16, puis de 31 blocs « 8, 8, 0 ». Le 100e terme est le premier terme du bloc « 8, 8, 0 », soit 8.
La somme des 100 premiers termes de la suite est égale à

$$88 + 24 + 64 + 40 + 24 + 16 + 31(8 + 8 + 0) + 8,$$

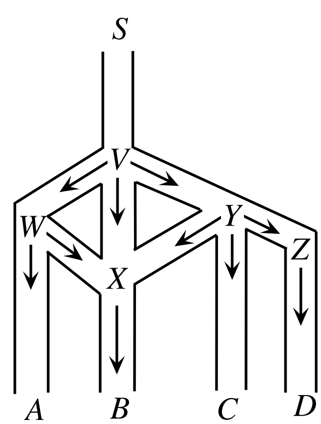
c'est-à-dire à $256 + 31(16) + 8$, ou 760.

Réponse : (B)

17. D'après la loi des exposants, on a $1000^{100} = (10^3)^{100} = 10^{300} = (10^{100})^3 = \text{googol}^3$.

Réponse : (E)

18. On nomme les bifurcations V, W, X, Y et Z.

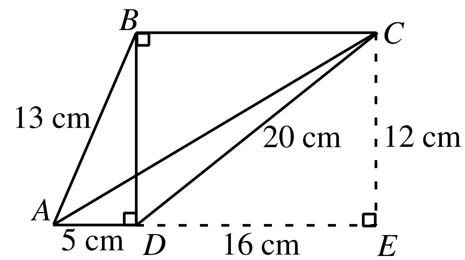


D'après les flèches, on voit que pour se rendre à B, Henri doit d'abord se rendre à X (et de X, il doit continuer jusqu'à B). On calcule donc la probabilité pour qu'il se rende à X.
Pour se rendre à X, Henri peut aller de S à V à W à X, ou de S à V à Y à X, ou encore de S à V et directement à X.
À V, la probabilité pour qu'Henri emprunte n'importe quel des chemins (c'est-à-dire vers W, X ou Y) est égale à $\frac{1}{3}$.
Donc, la probabilité pour qu'Henri aille directement de V à X est égale à $\frac{1}{3}$.
À W, la probabilité pour qu'Henri tourne en direction de X est égale à $\frac{1}{2}$. La probabilité pour qu'il aille de V à W à X est égale à $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{6}$.
À Y, la probabilité pour qu'Henri aille vers X est égale à $\frac{1}{3}$. Donc, la probabilité pour qu'il aille

de V à Y à X est égale à $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{9}$.
Donc, la probabilité pour qu'Henri aboutisse à X (et donc à B) est égale à $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}$, c'est-à-dire à $\frac{6+3+2}{18}$, ou $\frac{11}{18}$.

Réponse : (C)

19. On prolonge le côté AD jusqu'au point E, où il coupe la perpendiculaire à BC abaissée au point C.



D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ADB, $BD^2 = BA^2 - AD^2$, c'est-à-dire que $BD^2 = 13^2 - 5^2$, d'où $BD^2 = 144$, ou $BD = 12$ cm.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle DBC, $BC^2 = DC^2 - BD^2$, c'est-à-dire que $BC^2 = 20^2 - 12^2$, d'où $BC^2 = 256$, ou $BC = 16$ cm.
Puisque le quadrilatère $BCED$ admet quatre angles droits, il s'agit d'un rectangle.
Donc $DE = BC = 16$ cm et $CE = BD = 12$ cm.
Si on examine le triangle AEC, on voit que $AE = (16 + 5)$ cm, ou $AE = 21$ cm. D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = 21^2 + 12^2$, d'où $AC^2 = 585$, ou $AC \approx 24{,}2$ cm, au dixième de centimètre près.

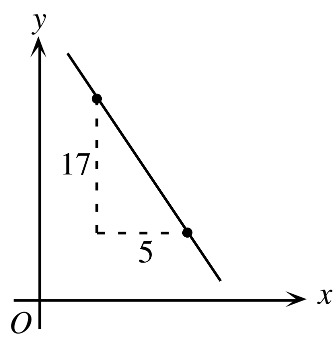
Réponse : (A)

20. Soit B le nombre total de Beetles dans le stationnement.
Le nombre d'Acuras est donc égal à $\frac{1}{2}B$.
Le nombre de Camrys est égal à 80 % de $\frac{1}{2}B + B$. Il est donc égal à $\frac{4}{5} \times \frac{3}{2}B$, c'est-à-dire à $\frac{6}{5}B$.
Puisqu'il y a 81 voitures dans le stationnement, $B + \frac{1}{2}B + \frac{6}{5}B = 81$, c'est-à-dire $\frac{27}{10}B = 81$, d'où $B = \frac{10}{27} \times 81$, ou $B = 30$.
Il y a 30 Beetles dans le stationnement.

Réponse : (B)

21. On détermine d'abord la combinaison de billets qui ont une valeur de 453 Yacs et qui comprend le plus petit nombre possible de billets de 17 Yacs.
On cherche un multiple de 17, inférieur à 453, qui se termine par un 5 ou un 8. On pourra alors compléter la somme de 453 Yacs en ajoutant des billets de 5 Yacs.
Les premiers multiples de 17 sont 17, 34, 51, 68.
Si on utilise quatre billets de 17 Yacs, pour un total de 68 Yacs, il reste une somme de $453 - 68$ Yacs, ou 385 Yacs à compléter avec des billets de 5 Yacs pour obtenir un total de 453 Yacs. On a donc besoin de 77 billets de 5 Yacs.
Donc, la combinaison de 4 billets de 17 Yacs et 77 billets de 5 Yacs est bonne.
Pour obtenir d'autres combinaisons, on utilise le fait que 5 billets de 17 Yacs ont la même valeur que 17 billets de 5 Yacs. Cela nous permet de soustraire 17 billets de 5 Yacs et d'ajouter 5 billets de 17 Yacs, tout en gardant la même valeur.
Puisque $77 - 17 = 60$ et $4 + 5 = 9$, alors 60 billets de 5 Yacs et 9 billets de 17 Yacs ont une valeur de 453 Yacs. (On peut le vérifier !)
De la même manière, 43 billets de 5 Yacs et 14 billets de 17 Yacs forment aussi une combinaison acceptable, de même que 26 billets de 5 Yacs et 19 billets de 17 Yacs, et 9 billets de 5 Yacs et

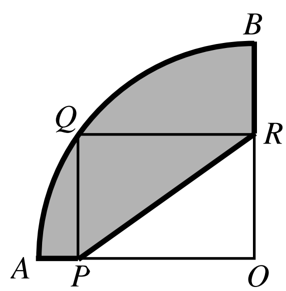
24 billets de 17 Yacs.
Puisqu'il ne reste que 9 billets de 5 Yacs, on ne peut plus continuer cet échange, car il faudrait échanger 17 billets de 7 Yacs.
Il y a donc 5 combinaisons différentes de billets qui ont une valeur de 453 Yacs.
(Pour une approche semblable, mais plus visuelle, soit x le nombre de billets de 17 Yacs et y le nombre de billets de 5 Yacs utilisés.
On a alors l'équation $17x + 5y = 453$ et on cherche le nombre de couples (x,y) qui vérifient l'équation, x et y étant des entiers positifs.
Les points du plan cartésien dont les coordonnées sont entières et qui vérifient l'équation de droite $17x + 5y = 453$ sont appelés des points de treillis de la droite. On cherche donc le nombre de points de treillis de cette droite dans le quadrant I.
Comme on l'a fait ci-haut, on détermine que $(x,y) = (4,77)$ est un point de treillis.
Puisque la droite a une pente de $-\frac{17}{5}$, alors le point de treillis suivant se trouve à 17 unités vers le bas et 5 unités vers la droite.



On répète ce processus pour obtenir un total de 5 points de treillis.)

Réponse : (C)

22. Pour déterminer le périmètre, il faut connaître la longueur de l'arc AQB et celle des segments AP, PR et RB.



Puisque AOB est un quart de disque de rayon 10, la longueur de l'arc AQB est égale à $\frac{1}{4}(2\pi(10))$, ou 5π.
Puisque $PQRO$ est un rectangle, alors $PR = QO$. Or, QO est un rayon du quart de disque. Donc $PR = QO = 10$. Il reste à déterminer $AP + RB$.
Or, $AP+RB = (AO-PO)+(BO-RO) = AO+BO-(PO+RO)$. On sait que $AO = BO = 10$, puisque AO et BO sont des rayons du quart de disque.
Puisque le rectangle a un périmètre de 26 et que $PO + RO$ est égal au demi-périmètre, alors $PO + RO = 13$.
Donc $AP + RB = 10 + 10 - 13$, ou $AP + RB = 7$.
Le périmètre de la région ombrée est donc égal à $5\pi + 10 + 7$, ou $17 + 5\pi$.

Réponse : (C)

23. On résout ce problème en tenant compte, de façon systématique, de la distance entre la position d'Anna, de Bruno et de Milou par rapport à la maison, à tout moment. À 12 h, chacun est à 0 km de la maison.
À 12 h 15 :

Milou est à 0 km de la maison, car il n'a pas commencé à courir.
Anna est à $\frac{1}{4} \times 4$ km, ou 1 km de la maison, puisqu'elle a marché à une vitesse de 4 km/h pendant $\frac{1}{4}$ d'heure.
Bruno est à $\frac{1}{4} \times 3$ km, ou $\frac{3}{4}$ km de la maison, puisqu'il a marché à une vitesse de 3 km/h pendant $\frac{1}{4}$ d'heure.

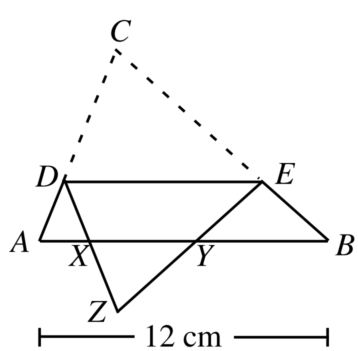
À 12 h 15, Milou quitte la maison et court jusqu'à ce qu'il rattrape Anna.
Combien de temps met-il pour la rattraper ? Puisque Anna marche à une vitesse de 4 km/h et que Milou court à une vitesse de 6 km/h dans la même direction, alors le chien gagne 2 km sur Anna en une heure. Puisqu'elle a une avance de 1 km sur le chien, Milou met $\frac{1}{2}$ heure pour la rattraper. Il la rattrape donc à 12 h 45.
À 12 h 45 :

Milou est à 3 km de la maison, puisqu'il a couru à une vitesse de 6 km/h pendant $\frac{1}{2}$ heure.
Anna est à $\frac{3}{4} \times 4$ km, ou 3 km de la maison, car elle a marché à une vitesse de 4 km/h pendant $\frac{3}{4}$ d'heure.
Bruno est à $\frac{3}{4} \times 3$ km, ou $\frac{9}{4}$ km de la maison, car il a marché à une vitesse de 3 km/h pendant $\frac{3}{4}$ d'heure.

À 12 h 45, Milou se retourne instantanément et court depuis Anna jusquà Bruno.
Combien de temps met-il pour rattraper Bruno ? Puisque celui-ci marche à une vitesse de 3 km/h et que Milou court à une vitesse de 6 km/h dans la direction opposée, alors Bruno et Milou se rapprochent l'un de l'autre à une vitesse de 9 km/h.
Puisque la distance qui les sépare est égale à $3 - \frac{9}{4}$ km, ou $\frac{3}{4}$ km, alors Milou met $\frac{1}{9} \times \frac{3}{4}$ h, ou $\frac{1}{12}$ h (ou 5 minutes) pour rattraper Bruno.
Il rattrape donc Bruno à 12 h 50.

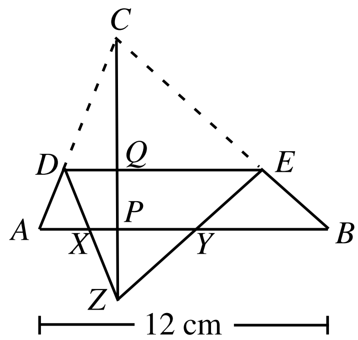
Réponse : (E)

24. *Solution 1*
Soit X et Y les points où la partie pliée du triangle coupe AB et Z la position du sommet C après le pliage.



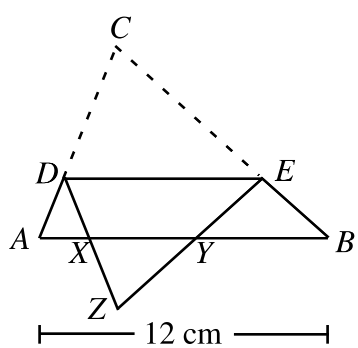
On sait que le triangle XYZ a une aire égale à 16 % de l'aire du triangle ABC.
Or, les triangles ACB et XZY sont semblables. En effet, l'angle XZY correspond à l'angle ACB. De plus, puisque le pli DE est parallèle au côté AB, alors
$\angle XYZ = \angle EYB = \angle DEY = \angle CED = \angle CBA$.
Puisque le triangle XZY est semblable au triangle ACB et que son aire est égale à 0,16 de celle

du triangle ACB, c'est-à-dire à $(0{,}4)^2$ de celle du triangle ACB, alors la longueur des côtés du triangle XZY doit être égale à 0,4 de la longueur des côtés correspondants du triangle ACB.
Au point C, on trace la hauteur CP du triangle ACB et on la prolonge jusqu'à Z. La hauteur coupe le côté DE en Q.



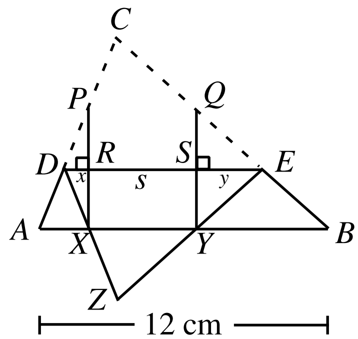
Or, $CP = CQ + QP = ZQ + QP = ZP + 2PQ$.
Puisque la longueur des côtés du triangle XZY est égale à 0,4 de la longueur des côtés correspondants du triangle ACB, alors $ZP = 0{,}4CP$.
Puisque $CP = ZP + 2PQ$, alors $PQ = 0{,}3CP$. Donc $CQ = CP - PQ$, ou $CQ = 0{,}7CP$.
Puisque les triangles CDE et CAB sont semblables et que la longueur de CQ est égale à 0,7 de celle de CP, alors la longueur de DE est égale à 0,7 de celle de AB. Donc $DE = 0{,}7(12)$, ou $DE = 8{,}4$.

Solution 2
Soit X et Y les points où la partie pliée du triangle coupe AB et Z la position du sommet C après le pliage.



On sait que le triangle XYZ a une aire égale à 16 % de l'aire du triangle ABC.
Or, les triangles ACB et XZY sont semblables. En effet, l'angle XZY correspond à l'angle ACB. De plus, puisque le pli DE est parallèle au côté AB, alors
$\angle XYZ = \angle EYB = \angle DEY = \angle CED = \angle CBA$.
Puisque le triangle XZY est semblable au triangle ACB et que son aire est égale à 0,16 de celle du triangle ACB, c'est-à-dire à $(0{,}4)^2$ de celle du triangle ACB, alors la longueur des côtés du triangle XZY doit être égale à 0,4 de la longueur des côtés correspondants du triangle ACB.
Aux points X et Y, on abaisse des perpendiculaires au côté AB. Elles coupent les côtés AC et BC aux points respectifs P et Q, ainsi que le côté DE aux points respectifs R et S.
Par symétrie à cause du pliage, PQ et RS sont parallèles à XY et ils ont la même longueur. Donc $PQ = RS = XY = s$.
Puisque la longueur des côtés du triangle XZY est égale à 0,4 de celle des côtés correspondants du triangle ACB, alors $s = 0{,}4 \times 12$, ou $s = 4{,}8$.
Puisque les triangles CDE et ZDE sont congruents (l'un est la version pliée de l'autre), alors

par symétrie, on a $PR = RX$ et $QS = SY$.
Soit $DR = x$ et $ES = y$.



On a $AX = 2x$, puisque le triangle PXA est semblable au triangle PRD et que ses côtés sont deux fois plus longs que les côtés correspondants du triangle PRD (puisque $PX = 2PR$). De même, $BY = 2y$.
Or, $AB = 2x + s + 2y$ et $AB = 12$. Donc $x + y = \frac{1}{2}(12 - s)$, c'est-à-dire que $x + y = \frac{1}{2}(12 - 4{,}8)$, ou $x + y = 3{,}6$.
Donc $DE = s + x + y$, d'où $DE = 4{,}8 + 3{,}6$, ou $DE = 8{,}4$.

Réponse : (B)

25. Au départ, il faut déterminer un premier ensemble de nombres, a, b et c, qui vérifient l'équation. Puisque l'équation ressemble à la formule de Pythagore, on peut écrire l'égalité $3^2 + 4^2 = 5^2$ et la manipuler.
Si on divise chaque membre par le plus petit commun multiple de 3^2, 4^2 et 5^2, qui est $(3 \times 4 \times 5)^2$, ou 60^2, on obtient $\frac{3^2}{60^2} + \frac{4^2}{60^2} = \frac{5^2}{60^2}$, ou $\frac{1}{20^2} + \frac{1}{15^2} = \frac{1}{12^2}$.
On obtient donc deux triplets, soit $(a,b,c) = (20,15,12)$ et $(a,b,c) = (15,20,12)$. On a donc deux valeurs de a jusqu'à maintenant.
Comment peut-on en déterminer d'autres ? On peut multiplier chaque membre de l'égalité $\frac{1}{20^2} + \frac{1}{15^2} = \frac{1}{12^2}$ par l'inverse de carrés parfaits.
Si on multiplie par $\frac{1}{2^2}$, on obtient $\frac{1}{40^2} + \frac{1}{30^2} = \frac{1}{24^2}$.
Si on multiplie par $\frac{1}{3^2}$, on obtient $\frac{1}{60^2} + \frac{1}{45^2} = \frac{1}{36^2}$.
Si on multiplie par $\frac{1}{4^2}$, on obtient $\frac{1}{80^2} + \frac{1}{60^2} = \frac{1}{48^2}$.
Si on multiplie par $\frac{1}{5^2}$, on obtient $\frac{1}{100^2} + \frac{1}{75^2} = \frac{1}{60^2}$.
Si on multiplie par $\frac{1}{6^2}$, on obtient $\frac{1}{120^2} + \frac{1}{90^2} = \frac{1}{72^2}$.
Si on multiplie par $\frac{1}{7^2}$, on obtient $\frac{1}{140^2} + \frac{1}{105^2} = \frac{1}{84^2}$.
La stratégie ne fonctionne plus, car on cherche des valeurs de a telles que $a \leq 100$.
Jusqu'ici, les valeurs possibles de a sont 20, 15, 40, 30, 60, 45, 80, 100, 75 et 90. On les obtient en prenant tour à tour les dénominateurs du membre de gauche des égalités. (Remarquer qu'on ne compte pas le 60 deux fois !) La somme de ces nombres est égale à 555.

Peut-on obtenir d'autres égalités en prenant d'autres triplets pythagoriciens ?
On peut prendre $5^2 + 12^2 = 13^2$ et diviser chaque membre par le plus petit commun multiple de

5^2, 12^2 et 13^2, qui est $(5 \times 12 \times 13)^2$, ou 780^2, on obtient $\frac{1}{156^2} + \frac{1}{65^2} = \frac{1}{60^2}$. On a donc une autre valeur de a, soit 65.

Le total cumulé des valeurs de a est égal à $555 + 65$, ou 620.

Il est impossible de générer d'autres valeurs de a à partir de l'égalité $\frac{1}{156^2} + \frac{1}{65^2} = \frac{1}{60^2}$, car si on multiplie chaque membre par l'inverse de n'importe quel carré parfait, on obtient des valeurs de a et de b qui sont supérieures ou égales à 130 et qui sont donc supérieures à 100.

Peut-on utiliser l'égalité $6^2 + 8^2 = 10^2$? Le plus petit commun multiple de 6^2, 8^2 et 10^2 est 120^2. Si on divise chaque membre par 120^2, on obtient l'égalité $\frac{1}{20^2} + \frac{1}{15^2} = \frac{1}{12^2}$ qui a déjà été utilisée.

Peut-on utiliser d'autres triplets pythagoriciens ? Non, car les autres ont des nombres qui sont au moins aussi gros que ceux du triplet 7-24-25, ce qui aurait pour résultat que le plus petit dénominateur du membre de gauche serait égal à $(7 \times 25)^2$, ou 175^2, et a aurait une valeur supérieure à 100.

Il est à noter que n'importe quel triplet (a,b,c) qui fonctionne doit provenir d'un triplet pythagoricien, car on peut multiplier chaque membre de l'équation $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$ par $(abc)^2$ pour obtenir $(bc)^2 + (ac)^2 = (ab)^2$.

Chaque triplet (a,b,c) possible provient d'un triplet phythagoricien et il n'existe aucun autre triplet pythagoricien qui donne une valeur possible de a. On a donc déterminé toutes les valeurs possibles de a.

La somme de toutes les valeurs possibles de a, $a \leq 100$, est égale à 620.

Réponse : (E)