Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre en mathématiques et en Université de Waterloo, Waterloo,

2004 Solutions

Concours Pascal (9^{e} – année)

(Secondaire III au Québec)

pour les prix du

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

2004 Solutions Concours Pascal

1. D'après la priorité des opérations : $5\times(10-6)\div 2$
$= 5\times 4\div 2$
$= 10$

RÉPONSE : (A)

2. *Solution 1*
Puisque la moyenne de 2, x et 12 est égale à 8, alors $\frac{2+x+12}{3}=8$, d'où $x+14=24$ et $x=10$.

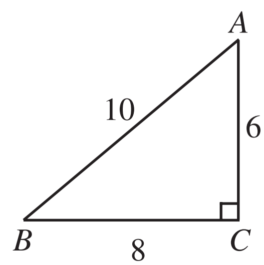
Solution 2
Puisque la moyenne des trois nombres est égale à 8, leur somme doit être égale à 24. Puisque la somme de 2, x et 12 est égale à 24, alors x est égal à 10.

RÉPONSE : (E)

3. Le plus petit dénominateur des trois fractions est le plus petit commun multiple des trois dénominateurs. Le plus petit commun multiple de 9, 4 et 18 est 36.

RÉPONSE : (D)

4. Puisque le triangle est rectangle, alors $AC^2+BC^2=AB^2$ selon le théorème de Pythagore. Donc $AC^2+8^2=10^2$, d'où $AC^2=36$ et $AC=6$. L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(BC)(AC)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(8)(6)$ ou 24.



RÉPONSE : (E)

5. On calcule :
$\frac{5-\sqrt{4}}{5+\sqrt{4}}$ est égal à $\frac{5-2}{5+2}$ ou $\frac{3}{7}$.

RÉPONSE : (A)

6. On calcule :
$4^1+3^2-2^3+1^4$ est égal à $4+9-8+1$ ou 6.

RÉPONSE : (C)

7. On reporte $x=-3$ dans l'expression $3x^2+2x$ pour obtenir $3(-3)^2+2(-3)$, c'est-à-dire $3(9)-6$ ou 21.

RÉPONSE : (D)

8. *Solution 1*

Puisque 18 % de 42 est égal à 27 % de x, alors :

$$\frac{18}{100}(42) = \frac{27}{100}x$$
$$18(42) = 27x$$
$$x = 28$$

Solution 2

Puisque 18 % est égal à deux tiers de 27 % et que 18 % de 42 est égal à 27 % de x, alors x doit être égal à deux tiers de 42. Donc x est égal à 28.

Réponse : (A)

9. Un cube a six faces, chacune étant un carré.

Puisque l'aire de la surface du cube est égale à 96 cm^2, alors chaque face a une aire de 16 cm^2.

Chaque arête du cube doit donc mesurer 4 cm.

Le volume du cube est donc égal à 4^3 cm^3 ou 64 cm^3.

Réponse : (B)

10. *Solution 1*

Puisque $y = 3x - 5$ et $z = 3x + 3$, alors $z - y = (3x + 3) - (3x - 5)$, c'est-à-dire que $z - y = 8$.
z est donc 8 de plus que y. Puisque $y = 1$, alors $z = 9$.

Solution 2

Puisque $y = 3x - 5$ et $y = 1$, alors $3x - 5 = 1$, d'où $x = 2$.
Puisque $x = 2$, alors $z = 3(2) + 3$ ou $z = 9$.

Réponse : (E)

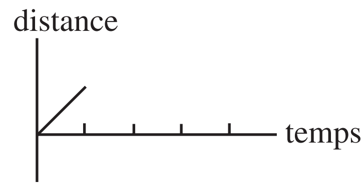
11. Le carré a une aire de 16 unités carrées. Il a été divisé en quatre rectangles. Chaque rectangle a été divisé en deux triangles congruents, soit un blanc et un ombré. Dans chaque rectangle, l'aire de la partie ombrée est égale à l'aire de la partie non ombrée. L'aire totale de la partie ombrée est donc égale à la moitié de l'aire du carré. Elle est donc égale à la moitié de 16, ou 8.

Réponse : (B)

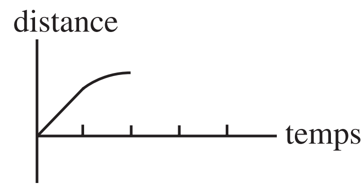
12. D'après la figure, il faut 3 $\blacktriangle$ pour équilibrer 5 $\bullet$ et 1 $\blacktriangle$ pour équilibrer 2 $\blacksquare$ et 1 $\bullet$.
Si on triple les quantités sur la deuxième balance, on a 3 $\blacktriangle$ pour équilibrer 6 $\blacksquare$ et 3 $\bullet$.
En comparant cette balance à la première, on a 5 $\bullet$ pour équilibrer 6 $\blacksquare$ et 3 $\bullet$. On enlève alors 3 $\bullet$ de chaque plateau pour constater qu'on a 2 $\bullet$ pour équilibrer 6 $\blacksquare$. Il faut donc 3 $\blacksquare$ pour équilibrer 1 $\bullet$.

Réponse : (C)

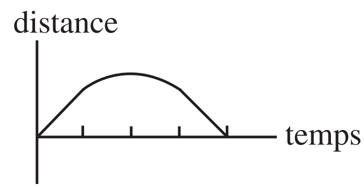
13. On suppose que les côtés du parc ont une longueur de 1 unité. Lorsque Nadia atteint le premier coin, elle est à une distance de 1 du point D.



Pendant qu'elle marche le long du 2^e côté du parc, elle s'éloigne toujours du point D. Arrivée au 2^e coin, après avoir parcouru la moitié du tour, elle sera à une distance de $\sqrt{2}$ du point D (d'après le théorème de Pythagore, la diagonale du carré a une longueur de $\sqrt{2}$).



En continuant son trajet, elle se rapproche du point D et le graphique aura l'apparence suivante.



Parmi les choix de réponse, le seul graphique qui vérifie ces conditions est le (C). (Le graphique est légèrement arrondi au milieu.)

RÉPONSE : (C)

14. *Solution 1*
Dans la 1re figure, il y a 8 carrés blancs. Dans la 2^e figure, il y a 12 carrés blancs. Dans la 3^e figure, il y a 16 carrés blancs. Le nombre de carrés blancs augmente de 4 à chaque figure. Dans la 10^e figure, le nombre de carrés blancs doit donc être égal à $8+4(9)$, ou 44. (Pour passer de la 1ère figure à la 2^e, puis de la 2^e à la 3^e, ainsi de suite jusqu'à la 10^e, il faut ajouter 4 neuf fois.)

Solution 2
La 1re figure est un carré 3 sur 3 contenant un carré noirci 1 sur 1. La 2^e figure est un carré 4 sur 4 contenant un carré noirci 2 sur 2. La 3^e figure est un carré 5 sur 5 contenant un carré noirci 3 sur 3. La 10^e figure est donc un carré 12 sur 12 contenant un carré noirci 10 sur 10. Le nombre de carrés blancs est donc égal à 12^2-10^2, ou 44.

RÉPONSE : (D)

15. Puisque chaque enfant a au moins 2 frères, chaque garçon a au moins frères. Il doit donc y avoir au moins 3 garçons dans la famille.
Puisque chaque enfant a au moins 1 sœur, chaque sœur a au moins 1 sœur. Il doit donc y avoir au moins 2 filles dans la famille.
Dans la famille Pascal, il y a donc au moins 5 enfants.

RÉPONSE : (C)

16. On attribue des valeurs à a et on vérifie si la valeur correspondante de b est un entier strictement positif.
   Si $a=1$, alors $a^2=1$. Donc $3b=32$ et b n'est pas un entier.
   Si $a=2$, alors $a^2=4$. Donc $3b=29$ et b n'est pas un entier.
   Si $a=3$, alors $a^2=9$. Donc $3b=24$, d'où $b=8$.
   Si $a=4$, alors $a^2=16$. Donc $3b=17$ et b n'est pas un entier.
   Si $a=5$, alors $a^2=25$. Donc $3b=8$ et b n'est pas un entier.
   Si a est supérieur ou égal à 6, alors a^2 est supérieur à 36. Donc $3b$ a une valeur négative et b n'est pas un entier positif.
   Il n'y a donc qu'une seule valeur entière strictement positive pour a et une pour b, soit $a=3$ et $b=8$. Donc $ab=24$.

   RÉPONSE : (B)

17. Puisque $0,\overline{12}$ a une période de longueur 2 et que $0,\overline{123}$ a une période de longueur 3, il faut examiner le développement décimal des trois nombres jusqu'à six places décimales.
   $0,\overline{1}=0,111111\ldots$
   $0,\overline{12}=0,121212\ldots$
   $0,\overline{123}=0,123123\ldots$
   Si on additionne ces nombres, on obtient :
   $0,\overline{1}+0,\overline{12}+0,\overline{123}=0,355446\ldots$
   D'après les choix de réponses, on doit avoir $0,\overline{1}+0,\overline{12}+0,\overline{123}=0,355446$.

   RÉPONSE : (D)

18. D'après l'énoncé et la définition du symbole, on a :
$$\begin{aligned}(x-1)(-5)-(2)(3)&=9\\ -5x+5-6&=9\\ -5x&=10\\ x&=-2\end{aligned}$$

   RÉPONSE : (C)

19. Chaque semaine, une branche qui est vieille d'au moins deux semaines produit une nouvelle branche. À la fin d'une semaine, le nombre total de branches est égal au nombre de branches au début de la semaine plus le nombre de branches qui n'étaient pas nouvelles (le nombre de vieilles branches). On utilise un tableau :

Numéro de la semaine	Nombre de branches au début	Nombre de vieilles branches au début	Nombre de branches à la fin
1	0	0	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6	5	3	8
7	8	5	13
8	13	8	21

À la fin de la huitième semaine, il y aura 21 branches.

RÉPONSE : (A)

20. On utilise un tableau pour tenir compte des positions, tout en cherchant une régularité.

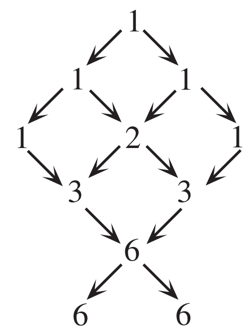
Position au début d'un tour	Position à la fin du tour
1	2
2	4
3	6
4	1
5	3
6	5
7	7

D'après la 3^e ligne, si la flèche aboutit sur le 6 à la fin du 21^e tour, elle a dû aboutir sur le 3 à la fin du 20^e tour. Pour aboutir sur le 3 à la fin du 20^e tour, elle a dû aboutir sur le 5 à la fin du 19^e tour et sur le 6 à la fin du 18^e tour.
On a maintenant une régularité cyclique. On voit que la flèche a dû aboutir sur le 6 à la fin des 21^e, 18^e, 15^e, 12^e, 9^e, 6^e et 3^e tours.
Puisqu'elle aboutit sur le 6 à la fin du 3^e tour, elle a dû aboutir sur le 3 à la fin du 2^e tour et sur le 5 à la fin du 1er tour. Sa position initiale était donc le 6.

RÉPONSE : (B)

21. On remarque que chacun des chemins qui descend du P jusqu'à un des deux L épèle le mot « PASCAL ». Il faut donc compter le nombre de chemins qui vont du haut jusqu'en bas.
On comptera d'abord le nombre de chemins qui mènent à chaque lettre de la figure. On voit que le nombre de chemins qui mènent à une lettre, par exemple le premier C, est la somme des nombres de chemins $(1+2)$ qui mènent à toutes les lettres de la ligne précédente (les deux premiers S) qui mènent directement à la lettre en question (C).

On indique donc le nombre de chemins qui mènent à chaque lettre.



Il y a donc 12 chemins qui mènent au premier L et 12 chemins qui mènent au deuxième L pour un total de 12 chemins.

RÉPONSE : (C)

22. Soit p la profondeur initiale de l'eau.
Le volume de l'eau dans le contenant est donc égal à $20 \times 20 \times p$, ou $400p$.
Le volume du cube en or est égal à $15 \times 15 \times 15$, ou 3375.
Après que l'on a placé le cube dans le contenant, le volume total occupé par l'eau et le cube est égal à $20 \times 20 \times 15$, ou 6000, car la base du contenant mesure 20 cm sur 20 cm et le contenant est rempli jusqu'à une profondeur de 15 cm.
On a donc $400p + 3375 = 6000$, d'où $400p = 2625$ ou $p = 6{,}5625$. La valeur 6,56 cm représente le mieux la profondeur initiale de l'eau dans le contenant.

RÉPONSE : (A)

23. On représente les deux pièces de 25 cents par V_1 et V_2, les deux pièces de 10 cents D_1 et D_2 et les deux pièces de 5 cents par C_1 et C_2. On construit ensuite un tableau. La colonne de gauche indique la première pièce choisie et la ligne du dessus indique la deuxième pièce choisie. Dans la table, on indique par un Oui que la combinaison de pièces choisies permet de payer les 30 cents demandés et par un Non que la combinaison ne le permet pas. (La diagonale est laissée vide, car il est impossible que la deuxième pièce soit aussi la première.)

	V_1	V_2	D_1	D_2	C_1	C_2
V_1		Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
V_2	Oui		Oui	Oui	Oui	Oui
D_1	Oui	Oui		Non	Non	Non
D_2	Oui	Oui	Non		Non	Non
C_1	Oui	Oui	Non	Non		Non
C_2	Oui	Oui	Non	Non	Non	

Par exemple, si le chauffeur choisit V_1, suivi de C_1, il a choisi 30 cents et il peut payer. S'il choisit D_2 en premier, suivi de D_1, il a choisi 20 cents et ne peut pas payer les 30 cents demandés.

D'après le tableau, il y a 30 choix possibles dont 18 permettent de payer.

La probabilité pour qu'il puisse payer est égale à $\frac{18}{30}$ ou $\frac{3}{5}$.

RÉPONSE : (A)

24. On remarque que la suite donnée est formée de plusieurs suites consécutives. Chacune de ces suites a la forme

$$\frac{n}{1},\ \frac{n-1}{2},\ \frac{n-2}{3},\ \ldots,\ \frac{3}{n-2},\ \frac{2}{n-1},\ \frac{1}{n}$$

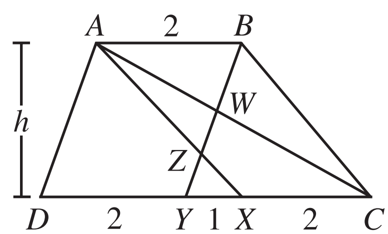
dans laquelle les dénominateurs augmentent de 1 à n et les numérateurs diminuent de n à 1.
On remarque que la première suite est composée de 1 terme, la deuxième est composée de 2 termes et ainsi de suite. On peut donc récrire la suite donnée en ajoutant des parenthèses qui regroupent les termes des petites suites :

$$\left(\frac{1}{1}\right),\ \left(\frac{2}{1},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{3}{1},\ \frac{2}{2}\ \frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4}\right),\ \ldots,\ \left(\frac{9}{1},\ \frac{8}{2},\ \frac{7}{3},\ \frac{6}{4},\ \frac{5}{5},\ \frac{4}{6},\ \frac{3}{7},\ \frac{2}{8},\ \frac{1}{9}\right),\ \ldots$$

Si on choisit n'importe quel terme dans une de ces petites suites, on remarque que la somme de son numérateur et de son dénominateur est 1 de plus que le nombre de termes dans la petite suite. Par exemple, la fraction $\frac{3}{7}$ paraît pour la première fois dans la petite suite de 9 termes.
La cinquième fraction équivalente à $\frac{3}{7}$, soit $\frac{5\times3}{5\times7}$ ou $\frac{15}{35}$, paraît donc dans la petite suite de 49 termes, dans la 35^{e} position de cette suite.
Puisque les petites suites précédentes ont respectivement 1, 2, 3, …, 48 termes, la position du terme $\frac{15}{35}$ dans la suite donnée est $(1+2+\cdots+47+48)+35$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}(48)(49)+35$ ou 1211.

RÉPONSE : (E)

25. Soit h la hauteur du trapèze $ABCD$.



L'aire du trapèze est donc égale à $\frac{1}{2}(AB+CD)h$ ou $\frac{7}{2}h$.
Puisque $AB=2$ et que AX est parallèle à BC, alors $XC=2$.
Puisque $AB=2$ et que BY est parallèle à AD, alors $DY=2$.
Puisque $CD=5$, $XC=2$ et $DY=2$, alors $YX=1$.
Pour déterminer l'aire du triangle AZW, on utilisera :

aire du triangle AZW = aire du triangle AZB − aire du triangle AWB

On détermine d'abord l'aire du triangle AZB. Puisque AB est parallèle à CD, alors $\angle ZAB=\angle ZXY$ et $\angle ZBA=\angle ZYX$. Les triangles AZB et XZY sont donc semblables.
Puisque $AB:XY=2{:}1$ et que les triangles sont semblables, le rapport de leur hauteur doit être égal à 2:1. Or par rapport aux bases AB et XY, la somme des hauteurs est égale à la hauteur du trapèze, soit h. La hauteur du triangle AZB est donc égale à $\frac{2}{3}h$. L'aire du triangle AZB est donc égale à $\frac{1}{2}(2)\left(\frac{2}{3}h\right)$ ou $\frac{2}{3}h$.

On détermine ensuite l'aire du triangle AWB. Puisque AB est parallèle à CD, alors $\angle WAB = \angle WCY$ et $\angle WBA = \angle WYC$. Les triangles AWB et CWY sont donc semblables. Puisque $AB{:}CY = 2{:}3$, le rapport de leur hauteur doit être égal à $2{:}3$. Or par rapport aux bases AB et CY, la somme des hauteurs est égale à la hauteur du trapèze, soit h. La hauteur du triangle AWB est donc égale à $\frac{2}{5}h$. L'aire du triangle AWB est donc égale à $\frac{1}{2}(2)\left(\frac{2}{5}h\right)$ ou $\frac{2}{5}h$.

L'aire du triangle AZW est égale à l'aire du triangle AZB moins celle du triangle AWB, soit $\frac{2}{3}h - \frac{2}{5}h$ ou $\frac{4}{15}h$. Le rapport de l'aire du triangle AZW à l'aire du trapèze est égal à $\frac{4}{15}h : \frac{7}{2}h$. Ce rapport est égal à $\frac{8}{30}:\frac{105}{30}$ ou $8{:}105$. RÉPONSE : (B)