Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Solutions du Concours Galois 2004 (10^{e} année ou Secondaire IV)

1. a) Puisqu'au moins un prix de chaque sorte est décerné, un prix de chaque sorte correspond à une somme de $5\ \$ + 25\ \$ + 125\ \$ + 625\ \$$, ou 780 $.
Puisque cinq prix sont décernés, le 5e prix vaut $905\ \$ - 780\ \$$, ou 125 $.
La Fondation Galois a donc décerné un prix de 5 $, un prix de 25 $, deux prix de 125 $ et un prix de 625 $.

b) Comme dans la partie a), un prix de chaque sorte correspond à une somme de 780 $.
Le 5e prix pourrait correspondre à 5 $, pour un total de $780\ \$ + 5\ \$$, ou 785 $.
Le 5e prix pourrait correspondre à 25 $, pour un total de $780\ \$ + 25\ \$$, ou 805 $.
Le 5e prix pourrait correspondre à 625 $, pour un total de $780\ \$ + 625\ \$$, ou 1405 $.
[On a déjà traité du prix supplémentaire de 125 $ dans la partie a).]

c) *Solution 1*
Un prix de chaque sorte correspond à une somme de 780 $. Il reste à distribuer $880\ \$ - 780\ \$$, ou 100 $, en attribuant les prix au plus cinq autres fois chacun. On ne peut décerner d'autres prix de 125 $ ou de 625 $, car cela dépasse ce qu'il reste à distribuer.
On peut décerner quatre autres prix de 25 $, pour une somme de 100 $.
Peut-on décerner moins de quatre autres prix de 25 $? Si on décerne trois autres prix de 25 $, il reste 25 $ à distribuer. On peut le faire en décernant cinq prix de 5 $.
Peut-on décerner moins de trois prix de 25 $? Si on le faisait, il resterait au moins 50 $ à distribuer et il faudrait décerner au moins dix prix de 5 $. Or, on ne peut décerner plus de cinq autres prix de 5 $. C'est donc impossible.
Il y a donc deux façons de décerner des prix d'une valeur totale de 880 $ selon les conditions données :
i) un prix de 625 $, un prix de 125 $, cinq prix de 25 $ et un prix de 5 $
ii) un prix de 625 $, un prix de 125 $, quatre prix de 25 $ et six prix de 5 $
On peut vérifier, en additionnant, que la valeur totale est de 880 $ dans chaque cas.

Solution 2
Un prix de chaque sorte correspond à une somme de 780 $. En ajoutant un autre prix, on atteint les sommes suivantes : 785 $, 805 $, 905 $ et 1405 $. Or les deux dernières sommes dépassent la valeur totale de 880 $.
En partant de 785 $ ou de 805 $, on tente de se rendre à 880 $.

En partant de 785 $, il faut distribuer 95 $ de plus pour se rendre à 880 $. En décernant trois autres prix de 25 $, on ajoute 75 $ et il reste 20 $ à distribuer, ce qu'on peut faire en décernant quatre prix de 5 $. (On ne peut décerner moins de trois autres prix de 25 $ sans décerner plus de six prix de 5 $ en tout.) On peut donc décerner un prix de 625 $, un prix de 125 $, quatre prix de 25 $ et six prix de 5 $ (car on avait déjà décerné deux prix de 5 $ pour faire une somme initiale de 785 $).

En partant de 805 \$, il faut distribuer 75 \$ de plus pour se rendre à 880 \$. On peut le faire en décernant trois autres prix de 25 \$. On décerne alors un prix de 625 \$, un prix de 125 \$, cinq prix de 25 \$ et un prix de 5 \$. On peut aussi combler la somme de 75 \$ en décernant deux autres prix de 25 \$ et cinq autres prix de 5 \$. On décerne alors un prix de 625 \$, un prix de 125 \$, quatre prix de 25 \$ et six prix de 5 \$ (ce qui correspond au résultat obtenu en partant de 785 \$). Si on décernait moins de deux autres prix de 25 \$, il faudrait décerner un trop grand nombre de prix de 5 \$.

Il y a donc deux façons de décerner des prix d'une valeur totale de 880 \$ selon les conditions données :

i) un prix de 625 \$, un prix de 125 \$, cinq prix de 25 \$ et un prix de 5 \$

ii) un prix de 625 \$, un prix de 125 \$, quatre prix de 25 \$ et six prix de 5 \$

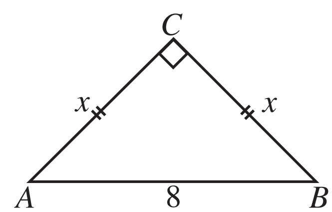
On peut vérifier, en additionnant, que la valeur totale est de 880 \$ dans chaque cas.

2. a) *Solution 1*

Soit $AC = x$. Puisque le triangle ABC est isocèle, alors $BC = x$.

Puisque le triangle ABC est rectangle, on a, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 &= 8^2 \\ 2x^2 &= 64 \\ x^2 &= 32 \\ x &= \sqrt{32} \text{ ou } x = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$



(Cette dernière ligne est superflue, car il suffit de connaître x^2.)

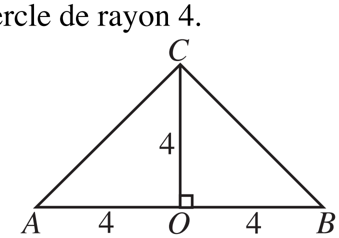
L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}(AC)(BC)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}x^2$, ou 16.

Solution 2

Soit O le milieu de AB. Donc, O est le centre du demi-cercle de rayon 4.

On joint O et C. Puisque le triangle ABC est isocèle, OC est perpendiculaire à AB. Puisque C est sur le cercle, OC est un rayon. Donc $OC = 4$.

L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}(AB)(OC)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(8)(4)$, ou 16.



b) L'aire totale de la partie ombrée est égale à la différence entre l'aire du demi-cercle et celle du triangle. L'aire du triangle est égale à 16.
Le demi-cercle a un rayon de 4. Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}\pi(4)^2$, ou 8π.
L'aire totale de la partie ombrée est égale à $8\pi - 16$.

c) On sait que l'aire du demi-cercle de diamètre AB est égale à 8π.
Puisque $AC = CB$, les deux demi-cercles, de diamètres AC et CB, ont la même aire.
Puisque $AC = 4\sqrt{2}$, le demi-cercle de diamètre AC a un rayon de $2\sqrt{2}$. L'aire du demi-cercle de diamètre AC est égale à $\frac{1}{2}\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}\pi(8)$, ou 4π.
Donc : (Aire du demi-cercle de diamètre AC) + (Aire du demi-cercle de diamètre BC)
$= 4\pi + 4\pi$
Cette aire est égale à 8π, soit l'aire du demi-cercle de diamètre AB.

3. a) Si Boris place un 3 dans n'importe quel des huit cercles vides, la somme des deux nombres placés est égale à 8. Annick peut ensuite gagner en plaçant un 7 dans le cercle diamétralement opposé.

b) Comme dans la partie a), Boris peut placer un des numéros 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 dans n'importe quel des huit cercles vides. À son tour, Annick devrait placer un numéro dans le cercle diamétralement opposé. Le numéro qu'elle place devrait être choisi de manière à donner une somme de 15. Le tableau suivant indique comment le faire.

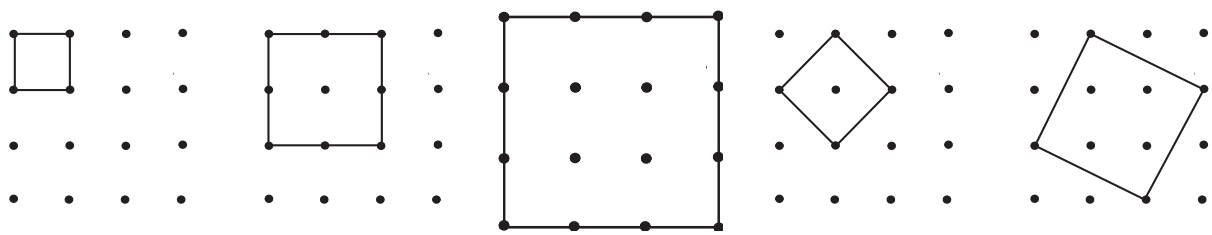
1er tour de Boris	*Total à date*	*2^{e} tour d'Annick*
1	6	9
2	7	8
3	8	7
4	9	6
6	11	4
7	12	3
8	13	2
9	14	1

Puisque chacun de ces choix est possible (le 5 initial n'est pas réutilisé et aucun des choix n'est le même que celui de Boris), Annick peut toujours gagner à son prochain tour.

c) Boris peut placer n'importe quel des numéros 4, 5, 6, 7, 8, 9 dans n'importe quel des six cercles vides. Il est possible d'apparier le 5 et le 9 ou le 6 et le 8, qui ont une somme de 14, de manière qu'en les plaçant aux extrémités d'une même ligne, on ait une somme de 15. Il n'est pas possible d'apparier le 4 ou le 7 avec un autre nombre pour obtenir une somme de 14. Si Boris place le 5, le 6, le 8 ou le 9, Annick peut placer le deuxième nombre de la paire et gagner.

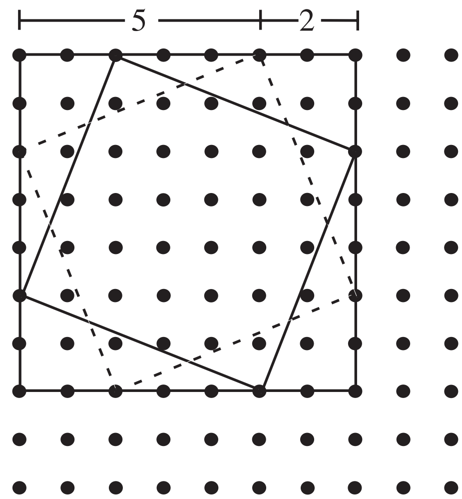
Si Boris place le 4 ou le 7, Annick devrait placer le deuxième de ces deux nombres, soit le 7 ou le 4, respectivement. Elle ne gagnera pas tout de suite, mais elle force Boris à jouer un des quatre numéros précédents, ce qui lui permettra de gagner en jouant le deuxième nombre de la paire.

4. a) On peut placer 3 carrés de dimensions 1 sur 1 par rangée, sur 3 rangées, pour un total de 9 carrés.
On peut placer 2 carrés de dimensions 2 sur 2 par rangée, sur 2 rangées, pour un total de 4 carrés.
On peut placer 1 carré de dimensions 3 sur 3.



On peut former un autre carré en joignant les milieux des côtés d'un carré de dimensions 2 sur 2. On obtient alors un carré de dimensions $\sqrt{2}$ sur $\sqrt{2}$, comme dans la 4^e^ figure. Chacun des 4 carrés de dimensions 2 sur 2 donne un carré de dimensions $\sqrt{2}$ sur $\sqrt{2}$, c'est-à-dire que l'on a 4 nouveaux carrés.
On peut former un nouveau carré à partir du carré de dimensions 3 sur 3. Il suffit de découper, dans chaque coin, un triangle rectangle dont les cathètes mesurent 1 et 2 (et dont l'hypoténuse mesure $\sqrt{5}$). On obtient alors un carré de dimensions $\sqrt{5}$ sur $\sqrt{5}$, comme dans la 5^e^ figure. Or, on peut le faire de deux façons, soit en découpant dans l'ordre des cathètes de longueurs 1 et 2 ou 2 et 1. On obtient alors un carré qui est la réflexion du carré ci-dessus, par rapport à un axe de réflexion vertical. Le carré de dimensions 3 sur 3 donne donc 2 carrés de dimensions $\sqrt{5}$ sur $\sqrt{5}$.
Le nombre de carrés de chaque grandeur qu'il est possible de tracer est donc égal à $9+4+1+4+2$, ou 20.

b) On remarque qu'il est possible de tracer 9 carrés de dimensions 7 sur 7. Les côtés de ces carrés sont parallèles aux lignes du quadrillage. À partir de chacun de ces carrés, il est possible de former 2 carrés de dimensions $\sqrt{29}$ sur $\sqrt{29}$. La figure suivante montre un carré de dimensions 7 sur 7 et les 2 carrés correspondants de dimensions $\sqrt{29}$ sur $\sqrt{29}$.



c) On compte d'abord le nombre de carrés dont les côtés sont parallèles aux lignes du quadrillage.
Dimensions 1 sur 1 : On peut en placer 9 par rangée, sur 9 rangées, pour un total de 9^2.
Dimensions 2 sur 2 : On peut en placer 8 par rangée, sur 8 rangées, pour un total de 8^2.
Cette régularité se poursuit jusqu'aux 2^2 carrés de dimensions 8 sur 8 et 1^2 carré de dimensions 9 sur 9.
Comme on l'a vu, chacun de ces carrés peut être découpé pour former d'autres carrés.
Chaque carré de dimensions 2 sur 2 génère un carré de dimensions $\sqrt{2}$ sur $\sqrt{2}$. Les carrés de dimensions 2 sur 2 contribuent donc un total de $2\left(8^2\right)$ carrés, soit 8^2 carrés de dimensions 2 sur 2 et 8^2 carrés de dimensions $\sqrt{2}$ sur $\sqrt{2}$).
Chaque carré de dimensions 3 sur 3 génère 2 carrés de dimensions $\sqrt{5}$ sur $\sqrt{5}$, car on peut découper les coins avec des cathètes de longueurs respectives 1 et 2 ou 2 et 1. Les carrés de dimensions 3 sur 3 contribuent donc un total de $3\left(7^2\right)$ carrés.

On peut découper les coins d'un carré de dimensions 4 sur 4 avec des cathètes de longueurs respectives 1 et 3, 2 et 2 ou 3 et 1, pour donner des carrés de dimensions $\sqrt{10}$ sur $\sqrt{10}$, $\sqrt{8}$ sur $\sqrt{8}$ ou $\sqrt{10}$ sur $\sqrt{10}$, selon le cas. Les carrés de dimensions 4 sur 4 contribuent donc un total de $4\left(6^2\right)$ carrés.

Cette régularité se poursuit jusqu'au carré de dimensions 9 sur 9. On peut découper les coins d'un carré de dimensions 9 sur 9 avec des cathètes de longueurs respectives 1 et 8, 2 et 7, 3 et 6, 4 et 5, 5 et 4, 6 et 3, 7 et 2, ou 8 et 1, pour donner des carrés dont les côtés ont des longueurs respectives de $\sqrt{65}$, $\sqrt{53}$, $\sqrt{45}$, $\sqrt{41}$, $\sqrt{41}$, $\sqrt{45}$, $\sqrt{53}$ ou $\sqrt{65}$. Le carré de dimensions 9 sur 9 contribue donc un total de $9\left(1^2\right)$ carrés.

Le nombre total de carrés qu'il est possible de tracer est donc égal à

$$1\left(9^2\right)+2\left(8^2\right)+3\left(7^2\right)+4\left(6^2\right)+5\left(5^2\right)+6\left(4^2\right)+7\left(3^2\right)+8\left(2^2\right)+9\left(1^2\right).$$