Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Solutions du Concours Fryer 2004 (9e année ou Secondaire III)

1. a) Puisque $\xrightarrow{I}$ indique que Louis prend l'inverse, alors on a $3 \xrightarrow{I} \frac{1}{3}$.

Puisque $\xrightarrow{A}$ indique qu'il ajoute 1, alors on a $\frac{1}{3} \xrightarrow{A} \frac{1}{3}+1$, ou $\frac{1}{3} \xrightarrow{A} \frac{4}{3}$.

On continue pour obtenir $\frac{4}{3} \xrightarrow{I} \frac{3}{4}$, $\frac{3}{4} \xrightarrow{A} \frac{3}{4}+1$, ou $\frac{3}{4} \xrightarrow{A} \frac{7}{4}$, puis $\frac{7}{4} \xrightarrow{I} \frac{4}{7}$.

On a donc $3 \xrightarrow{I} \frac{1}{3} \xrightarrow{A} \frac{4}{3} \xrightarrow{I} \frac{3}{4} \xrightarrow{A} \frac{7}{4} \xrightarrow{I} \frac{4}{7}$.

b) Comme dans la partie a), on a :

$x \xrightarrow{I} \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x} \xrightarrow{A} \frac{1}{x}+1$, ou $\frac{1}{x} \xrightarrow{A} \frac{1+x}{x}$

$\frac{1+x}{x} \xrightarrow{I} \frac{x}{1+x}$

$\frac{x}{1+x} \xrightarrow{A} \frac{x}{1+x}+1$, ou $\frac{x}{1+x} \xrightarrow{A} \frac{1+2x}{1+x}$

$\frac{1+2x}{1+x} \xrightarrow{I} \frac{1+x}{1+2x}$

On a donc $x \xrightarrow{I} \frac{1}{x} \xrightarrow{A} \frac{1+x}{x} \xrightarrow{I} \frac{x}{1+x} \xrightarrow{A} \frac{1+2x}{1+x} \xrightarrow{I} \frac{1+x}{1+2x}$.

(Puisqu'on a pris l'inverse de x, on suppose que x n'est pas égal à 0.)

c) *Solution 1*

On remarque que si $\frac{1+x}{1+2x}$ est égal à $\frac{14}{27}$ et que $x+1=14$, ou $x=13$, alors $1+2x=27$.

Selon l'énoncé, il s'agit de la seule valeur de x qui donne le résultat final $\frac{14}{27}$.

Solution 2

D'après la partie b), on sait que si la valeur initiale est x, le résultat est égal à $\frac{1+x}{1+2x}$.

Pour obtenir un résultat de $\frac{14}{27}$, on pose $\frac{1+x}{1+2x}=\frac{14}{27}$ et on résout l'équation.

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{1+2x} &= \frac{14}{27}\\ 27(1+x) &= 14(1+2x)\\ 27+27x &= 14+28x\\ 13 &= x\end{aligned}$$

La valeur initiale de 13 donnera le résultat final $\frac{14}{27}$. (On peut vérifier en faisant tous les calculs avec 13 comme valeur initiale.)

Solution 3

On prend le résultat final $\frac{14}{27}$ et on procède à rebours.

Lors de la 5^e étape, on a pris l'inverse d'un nombre pour obtenir $\frac{14}{27}$. Le nombre précédent doit donc être égal à $\frac{27}{14}$.

Lors de la 4^e étape, on a ajouté 1 à un nombre pour obtenir $\frac{27}{14}$. Le nombre précédent doit donc être égal à $\frac{27}{14} - 1$, ou $\frac{13}{14}$.

Lors de la 3^e étape, on a pris l'inverse d'un nombre pour obtenir $\frac{13}{14}$. Le nombre précédent doit donc être égal à $\frac{14}{13}$.

Lors de la 2^e étape, on a ajouté 1 à un nombre pour obtenir $\frac{14}{13}$. Le nombre précédent doit donc être égal à $\frac{14}{13} - 1$, ou $\frac{1}{13}$.

Lors de la 1re étape, on a pris l'inverse d'un nombre pour obtenir $\frac{1}{13}$. Le nombre initial doit donc être égal à 13.

2. a) Puisqu'au moins un prix de chaque sorte est décerné, un prix de chaque sorte correspond à une somme de $5\ \$ + 25\ \$ + 125\ \$ + 625\ \$$, ou 780 $.
Puisque cinq prix sont décernés, le 5^e prix vaut $905\ \$ - 780\ \$$, ou 125 $.
La Fondation Fryer a donc décerné un prix de 5 $, un prix de 25 $, deux prix de 125 $ et un prix de 625 $.

b) Comme dans la partie a), un prix de chaque sorte correspond à une somme de 780 $.
Le 5^e prix pourrait correspondre à 5 $, pour un total de $780\ \$ + 5\ \$$, ou 785 $.
Le 5^e prix pourrait correspondre à 25 $, pour un total de $780\ \$ + 25\ \$$, ou 805 $.
Le 5^e prix pourrait correspondre à 625 $, pour un total de $780\ \$ + 625\ \$$, ou 1405 $.
[On a déjà traité du prix supplémentaire de 125 $ dans la partie a).]

c) *Solution 1*
Un prix de chaque sorte correspond à une somme de 780 $. Il reste à distribuer $880\ \$ - 780\ \$$, ou 100 $, en attribuant les prix au plus cinq autres fois chacun. On ne peut décerner d'autres prix de 125 $ ou de 625 $, car cela dépasse ce qu'il reste à distribuer.
On peut décerner quatre autres prix de 25 $, pour une somme de 100 $.
Peut-on décerner moins de quatre autres prix de 25 $? Si on décerne trois autres prix de 25 $, il reste 25 $ à distribuer. On peut le faire en décernant cinq prix de 5 $.
Peut-on décerner moins de trois prix de 25 $? Si on le faisait, il resterait au moins 50 $ à distribuer et il faudrait décerner au moins dix prix de 5 $. Or, on ne peut décerner plus de cinq autres prix de 5 $. C'est donc impossible.

Il y a donc deux façons de décerner des prix d'une valeur totale de 880 $ selon les conditions données :

i) un prix de 625 $, un prix de 125 $, cinq prix de 25 $ et un prix de 5 $
ii) un prix de 625 $, un prix de 125 $, quatre prix de 25 $ et six prix de 5 $

On peut vérifier, en additionnant, que la valeur totale est de 880 $ dans chaque cas.

Solution 2

Un prix de chaque sorte correspond à une somme de 780 $. En ajoutant un autre prix, on atteint les sommes suivantes : 785 $, 805 $, 905 $ et 1405 $. Or les deux dernières sommes dépassent la valeur totale de 880 $.
En partant de 785 $ ou de 805 $, on tente de se rendre à 880 $.

En partant de 785 $, il faut distribuer 95 $ de plus pour se rendre à 880 $. En décernant trois autres prix de 25 $, on ajoute 75 $ et il reste 20 $ à distribuer, ce qu'on peut faire en décernant quatre prix de 5 $. (On ne peut décerner moins de trois autres prix de 25 $ sans décerner plus de six prix de 5 $ en tout.) On peut donc décerner un prix de 625 $, un prix de 125 $, quatre prix de 25 $ et six prix de 5 $ (car on avait déjà décerné deux prix de 5 $ pour faire une somme initiale de 785 $).

En partant de 805 $, il faut distribuer 75 $ de plus pour se rendre à 880 $. On peut le faire en décernant trois autres prix de 25 $. On décerne alors un prix de 625 $, un prix de 125 $, cinq prix de 25 $ et un prix de 5 $. On peut aussi combler la somme de 75 $ en décernant deux autres prix de 25 $ et cinq autres prix de 5 $. On décerne alors un prix de 625 $, un prix de 125 $, quatre prix de 25 $ et six prix de 5 $ (ce qui correspond au résultat obtenu en partant de 785 $). Si on décernait moins de deux autres prix de 25 $, il faudrait décerner un trop grand nombre de prix de 5 $.

Il y a donc deux façons de décerner des prix d'une valeur totale de 880 $ selon les conditions données :

i) un prix de 625 $, un prix de 125 $, cinq prix de 25 $ et un prix de 5 $
ii) un prix de 625 $, un prix de 125 $, quatre prix de 25 $ et six prix de 5 $

On peut vérifier, en additionnant, que la valeur totale est de 880 $ dans chaque cas.

3. a) Si Boris place un 3 dans n'importe quel des huit cercles vides, la somme des deux nombres placés est égale à 8. Annick peut ensuite gagner en plaçant un 7 dans le cercle diamétralement opposé.

   b) Comme dans la partie a), Boris peut placer un des numéros 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 dans n'importe quel des huit cercles vides. À son tour, Annick devrait placer un numéro dans le cercle diamétralement opposé. Le numéro qu'elle place devrait être choisi de manière à donner une somme de 15. Le tableau suivant indique comment le faire.

1^er^ tour de Boris	*Total à date*	*2^e^ tour d'Annick*
1	6	9
2	7	8
3	8	7
4	9	6
6	11	4
7	12	3
8	13	2
9	14	1

   Puisque chacun de ces choix est possible (le 5 initial n'est pas réutilisé et aucun des choix n'est le même que celui de Boris), Annick peut toujours gagner à son prochain tour.

   c) Boris peut placer n'importe quel des numéros 1, 2, 4, 5, 7, 8 dans n'importe quel des six cercles vides. Il est possible d'apparier les nombres en couples de manière que leur somme, plus 6, soit égale à 15 : 1 et 8; 2 et 7; 4 et 5
   Lorsque Boris place un de ces nombres, Annick peut utiliser l'autre nombre du couple et le placer sur la même ligne pour obtenir une somme de 15. Elle peut donc gagner.

4. a) Le 10e nombre triangulaire est égal à $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$, ou 55.
   Le 24e nombre triangulaire est égal à $1+2+3+\cdots+23+24$. On peut utiliser une calculatrice pour obtenir une somme de 300. On peut aussi obtenir une régularité en appariant le premier et le dernier nombre, le 2e et l'avant-dernier et ainsi de suite :
   Chaque parenthèse a une somme de 25; la somme des nombres est donc égale à 12×25, ou 300. (On peut utiliser cette régularité pour déterminer une formule générale pour la somme $1+2+\cdots+n$.)

b) *Solution 1*

Soit $1+2+3+\cdots+(n-1)+n \quad (1)$,

$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1) \quad (2)$ et

$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)+(n+2) \quad (3)$

les trois nombres triangulaires consécutifs.

Pour additionner ces trois nombres, on déplace le terme $(n+2)$ de l'expression (3) pour le placer à l'extrémité de l'expression (1) :

$$\begin{aligned}
&[1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+2)]\\
&\quad+[1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)]\\
&\quad+[1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)]\\
&=[1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)]+1 \qquad \text{(On a écrit } n+2 \text{ sous forme } (n+1)+1.\text{)}\\
&\quad+[1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)]\\
&\quad+[1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)]\\
&=3[1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)]+1
\end{aligned}$$

Cette dernière expression est 1 de plus que trois fois le deuxième nombre.

Solution 2

On utilise la formule $1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$ [que l'on peut obtenir en suivant la démarche de la partie a)]. Les trois nombres triangulaires consécutifs sont alors : $1+2+3+\cdots+(n-1)+n$, ou $\frac{n(n+1)}{2}$,

$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)$, ou $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, et

$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)$, ou $\frac{(n+2)(n+3)}{2}$.

On les additionne :

$$\begin{aligned}
&\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}+\frac{(n+2)(n+3)}{2}\\
&=\frac{n^2+n}{2}+\frac{n^2+3n+2}{2}+\frac{n^2+5n+6}{2}\\
&=\frac{3n^2+9n+8}{2}\\
&=\frac{3n^2+9n+6}{2}+1\\
&=3\left(\frac{n^2+3n+2}{2}\right)+1
\end{aligned}$$

Cette dernière expression est 1 de plus que trois fois le deuxième nombre.

c) *Solution 1*

Selon l'énoncé, les 3^e, 6^e et 8^e nombres triangulaires forment une suite arithmétique, de même que les 8^e, 12^e et 15^e nombres triangulaires. Il semble y avoir une régularité par rapport aux numéros de position : $3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+2} 8$ et $8 \xrightarrow{+4} 12 \xrightarrow{+3} 15$.

La régularité se poursuit-elle? Si on fait $15 \xrightarrow{+5} 20 \xrightarrow{+4} 24$, est-ce que les 15^e, 20^e et 24^e nombres triangulaires forment une suite arithmétique?

Selon l'énoncé, le 15^e nombre triangulaire est 120 et selon la partie a), le 24^e nombre triangulaire est 300. On peut vérifier, à l'aide d'une calculatrice, que le 20^e nombre triangulaire est 210. La régularité semble bien se poursuivre. (On n'a encore pas démontré que la régularité est bien fondée.)

Si la régularité se poursuit, on a $24 \xrightarrow{+6} 30 \xrightarrow{+5} 35$, $35 \xrightarrow{+7} 42 \xrightarrow{+6} 48$ et $48 \xrightarrow{+8} 56 \xrightarrow{+7} 63$, c'est-à-dire que :

les 24^e, 30^e et 35^e nombres triangulaires forment une suite arithmétique;
les 35^e, 42^e et 48^e nombres triangulaires forment une suite arithmétique;
les 48^e, 56^e et 63^e nombres triangulaires forment une suite arithmétique.

On vérifie si le 48^e terme est supérieur à 2004 :

$$\begin{aligned}1+2+\ldots+47+48 &= (1+48)+(2+47)+\ldots+(24+25)\\ &= 24\times 49\\ &= 1176\end{aligned}$$

Il est encore trop petit.

On continue la régularité : $63 \xrightarrow{+9} 72 \xrightarrow{+8} 80$ et $80 \xrightarrow{+10} 90 \xrightarrow{+9} 99$

On vérifie si le 80^e nombre triangulaire est supérieur à 2004 :

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+79+80 &= 40\times 81\\ &= 3240\end{aligned}$$

On vérifie si les 80^e, 90^e et 99^e nombres triangulaires forment une suite arithmétique :

$$\begin{aligned}1+2+\ldots+89+90 &= 45\times 91\\ &= 4095\end{aligned} \qquad \begin{aligned}1+2+\ldots+98+99 &= (1+2+\ldots+99+100)-100\\ &= 50\times 101-100\\ &= 4950\end{aligned}$$

Or, $4950-4095=855$ et $4095-3240=855$. Donc, les 80^e, 90^e et 99^e nombres triangulaires sont supérieurs à 2004 et ils forment une suite arithmétique.

Solution 2

Dans les deux exemples, la différence entre le numéro de position des deux premiers nombres est un de plus que la différence entre le numéro de position des deuxième et troisième nombres [$6-3=(8-6)+1$ et $(12-8)=(15-12)+1$].

On vérifie si cette régularité se poursuit :

On examine le *n*ième nombre triangulaire, le $(n+12)^e$ nombre triangulaire (c.-à-d. 12 termes plus loin) et le $(n+23)^e$ nombre triangulaire (c.-à-d. 11 termes plus loin). (On a choisi le nombre 12 au hasard. On aurait pu en choisir un plus grand ou un plus petit, quitte à recommencer.) On cherche une valeur de n pour laquelle les trois nombres triangulaires forment une suite arithmétique. On veut que :

$$\begin{aligned}
\left[1+2+\cdots+(n+12)\right]-\left[1+2+\cdots+n\right] &= \left[1+2+\cdots+(n+23)\right]-\left[1+2+\cdots+(n+12)\right]\\
(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+12) &= (n+13)+(n+14)+\cdots+(n+23)\\
12n+(1+2+\cdots+12) &= 11n+(13+14+\cdots+23)\\
n &= (13+14+\cdots+23)-(1+2+\cdots+11)-12\\
n &= 11(12)-12\\
n &= 120
\end{aligned}$$

Donc, les 120^e^, 132^e^ et 143^e^ nombres triangulaires forment une suite arithmétique.
On calcule la valeur de ces nombres, selon l'approche de la partie a), pour vérifier qu'ils satisfont aux conditions :

$$\begin{aligned}
&1+2+\cdots+119+120\\
&=60\times121\\
&=7260
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&1+2+\cdots+131+132\\
&=66\times133\\
&=8778
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&1+2+\cdots+142+143\\
&=(1+2+\cdots+143+144)-144\\
&=72\times145-144\\
&=10\,296
\end{aligned}$$

On a $8778-7260=1518$ et $10\,296-8778=1518$. Les 120^e^, 132^e^ et 143^e^ nombres triangulaires forment bien une suite arithmétique et chacun est supérieur à 2004.