Concours Fryer (9^e année - Sec. III)
le jeudi 15 avril 2004

---

1. Louis pratique l'arithmétique en prenant l'inverse d'un nombre et en ajoutant 1 au résultat. Le symbole $\xrightarrow{I}$ indique qu'il prend l'inverse et le symbole $\xrightarrow{A}$ indique qu'il ajoute 1. Voici un exemple de son travail, avec une valeur initiale de 2 :

   $$2 \xrightarrow{I} \tfrac{1}{2} \xrightarrow{A} \tfrac{3}{2} \xrightarrow{I} \tfrac{2}{3} \xrightarrow{A} \tfrac{5}{3} \xrightarrow{I} \tfrac{3}{5}$$

   a) Remplir les cinq tirets ci-dessous, la valeur initiale étant 3 :

   $$3 \xrightarrow{I} \underline{\quad} \xrightarrow{A} \underline{\quad} \xrightarrow{I} \underline{\quad} \xrightarrow{A} \underline{\quad} \xrightarrow{I} \underline{\quad}$$

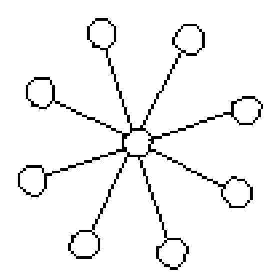
   b) Utiliser les mêmes opérations pour remplir les cinq tirets ci-dessous avec la valeur initiale x :

   $$x \xrightarrow{I} \underline{\quad} \xrightarrow{A} \underline{\quad} \xrightarrow{I} \underline{\quad} \xrightarrow{A} \underline{\quad} \xrightarrow{I} \underline{\quad}$$

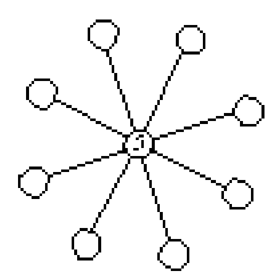
   c) Utiliser les étapes de la partie b) pour déterminer la valeur initiale qui donnera le résultat final $\frac{14}{27}$. Expliquer son raisonnement.

2. La Fondation Fryer décerne des prix de 5 \$, de 25 \$, de 125 \$ et de 625 \$.
   a) La Fondation décerne au moins un prix de chaque sorte. Si elle a décerné cinq prix d'une valeur totale de 905 \$, combien de prix de chaque sorte a-t-elle décernés? Expliquer son raisonnement.
   b) Si la Fondation décerne cinq prix, dont au moins un prix de chaque sorte, déterminer les trois autres valeurs totales possibles. Expliquer son raisonnement.
   c) Il y a deux façons pour la Fondation de décerner des prix d'une valeur totale de 880 \$, en décernant chaque prix au moins une fois, mais pas plus de six fois. Déterminer ces deux façons de le faire, tout en expliquant son raisonnement.

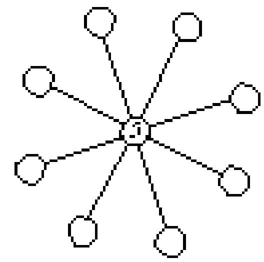
3. Dans le jeu « Le soleil des Incas », deux joueurs utilisent un ensemble de jetons, numérotés de 1 à 9. Tour à tour, ils placent un jeton dans un des cercles de la figure. L'objectif du jeu est d'être la première personne à placer un jeton de manière que les trois nombres le long d'une ligne qui passe par le centre aient une somme de 15.



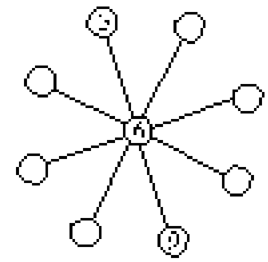
   a) Si Annick place un 5 dans le cercle du centre et que Boris place ensuite un 3, démontrer comment Annick peut gagner à son prochain tour.



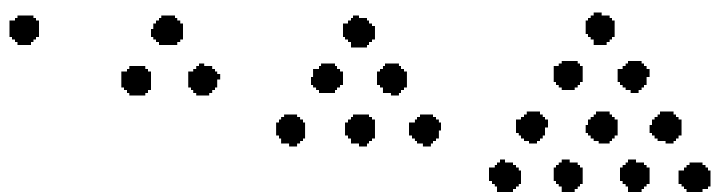
b) Si Annick place un 5 dans le cercle du centre, démontrer que quel que soit le choix de Boris, Annick peut toujours gagner à son prochain tour.



c) Dans la position ci-contre, c'est à Boris de jouer. Montrer que, quel que soit le choix de Boris, Annick peut gagner.



4. On peut former les nombres triangulaires en comptant le nombre de points qui forment chaque figure triangulaire:



Le premier nombre triangulaire est 1, le 2^e^ est 3, le 3^e^ est 6 et le 4^e^ est 10. Le $n$ième nombre triangulaire est égal à $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$.

a) Calculer le 10^e^ et le 24^e^ nombre triangulaire.

b) Démontrer que la somme de trois nombres triangulaires consécutifs est toujours égale à 1 de plus que trois fois le deuxième de ces trois nombres.

c) Les 3^e^, 6^e^ et 8^e^ nombres triangulaires, soit 6, 21 et 36, forment une suite arithmétique, car le deuxième moins le premier est égal au troisième moins le deuxième, c'est-à-dire que $21 - 6 = 36 - 21$. De même, les 8^e^, 12^e^ et 15^e^ nombres triangulaires, soit 36, 78 et 120, forment une suite arithmétique. Trouver trois autres nombres triangulaires, chacun supérieur à 2004, qui forment une suite arithmétique.