Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre
en mathématiques et en
Université de Waterloo, Waterloo,

2004 Solutions
Concours Fermat (11e – année)

(Secondaire V au Québec)

pour les prix du

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

1. $$\frac{10}{10(11)-10^2}=\frac{10}{110-100}$$
$$=1$$

RÉPONSE : (D)

2. $$\sqrt{4^0+4^2+4^3}=\sqrt{1+16+64}$$
$$=\sqrt{81}$$
$$=9$$

RÉPONSE : (A)

3. On a $x=4$ et $y=3$. Donc $x-y=1$.

RÉPONSE : (B)

4. Le volume du gâteau est égal à $20\times18\times5\ \text{cm}^3$, ou $1800\ \text{cm}^3$. Chacun des 25 morceaux a donc un volume de $1800\ \text{cm}^3\div25$, ou $72\ \text{cm}^3$.
Puisque le gâteau a une masse volumique de $2\ \text{g/cm}^3$, chaque morceau a une masse de $\left(2\ \text{g}/\text{cm}^3\right)\times\left(72\ \text{cm}^3\right)$ ou 144 g.

RÉPONSE : (D)

5. *Solution 1*
L'inverse du membre de gauche est égal à l'inverse du membre de droite.
$$\left(\frac{1}{2+3}\right)\left(\frac{1}{3+4}\right)=\frac{1}{x+5}$$
$$(2+3)(3+4)=x+5$$
$$35=x+5$$
$$x=30$$

Solution 2
$$\left(\frac{1}{2+3}\right)\left(\frac{1}{3+4}\right)=\frac{1}{x+5}$$
$$\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{x+5}$$
$$\frac{1}{35}=\frac{1}{x+5}$$
Les dénominateurs sont donc égaux, d'où $x+5=35$ et $x=30$.

RÉPONSE : (C)

6. Puisqu'il faut 3 boîtes de jus pour obtenir $\frac{2}{3}$ L, alors on obtient $\frac{2}{9}$ L avec une boîte de jus.

   Pour obtenir 8 L, il faut donc $\dfrac{8}{\left(\frac{2}{9}\right)}$ boîtes, c'est-à-dire $8 \times \frac{9}{2}$ boîtes, ou 36 boîtes.

   RÉPONSE : (A)

7. *Solution 1*

   On simplifie d'abord l'expression.

$$\begin{aligned}\frac{x^2-4}{x^2-2x} &= \frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)} \\ &= \frac{x+2}{x} \\ &= \frac{x}{x}+\frac{2}{x} \\ &= 1+\frac{2}{x}\end{aligned}$$

   On a pu annuler le facteur $x-2$, car $x \neq 2$.

   Si $x=\frac{1}{5}$, l'expression est égale à $1+\dfrac{2}{\left(\frac{1}{5}\right)}$,

   c'est-à-dire à $1+10$, ou 11.

   Solution 2

   On reporte $x=\frac{1}{5}$ dans l'expression.

$$\begin{aligned}\frac{x^2-4}{x^2-2x} &= \frac{\frac{1}{25}-4}{\frac{1}{25}-\frac{2}{5}} \\ &= \frac{\frac{1}{25}-\frac{100}{25}}{\frac{1}{25}-\frac{10}{25}} \\ &= \frac{-\frac{99}{25}}{-\frac{9}{25}} \\ &= 11\end{aligned}$$

   RÉPONSE : (E)

8. D'après le graphique, Julie avait 10 L d'essence en arrivant au garage. En partant, elle avait 50 L d'essence. Elle a donc acheté 40 L d'essence au coût de 36,60 \$. Un litre d'essence coûte donc $\dfrac{36{,}60\ \$}{40}$, c'est-à-dire 0,915 \$, ou 91,5 ¢.

   RÉPONSE : (A)

9. 4 % de 10 000 est égal à $\frac{4}{100} \times 10\,000$, ou 400. En 2004, la population de Cayleyville était donc de 10 400.

   12 % de 25 000 est égal à $\frac{12}{100} \times 25\,000$, ou 3000. En 2004, la population de Pascalbourg était donc de 22 000.

   En 2004, la différence entre la population des deux villes est égale à $22\,000 - 10\,400$, ou 11 600.

   RÉPONSE : (B)

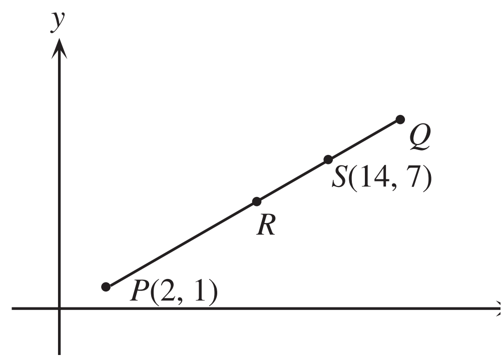
10. D'après la figure, il faut 3 ▲ pour équilibrer 5 ● et 1 ▲ pour équilibrer 2 ■ et 1 ●. Si on triple les quantités sur la deuxième balance, on a 3 ▲ pour équilibrer 6 ■ et 3 ●. En comparant cette balance à la première, on a 5 ● pour équilibrer 6 ■ et 3 ●. On enlève alors 3 ● de chaque plateau pour constater qu'on a 2 ● pour équilibrer 6 ■. Il faut donc 3 ■ pour équilibrer 1 ●.

Réponse : (C)

11. Puisque x est situé entre –1 et 0, alors x^2 est situé entre 0 et 1. Donc, $-x^2$ est situé entre –1 et 0. Le choix est donc b ou c. Or, le carré x^2 d'un nombre x, situé entre –1 et 0, est plus près de 0 que ne l'est le nombre x. Donc, la lettre c représente le mieux la position de $-x^2$.

Réponse : (C)

12. Puisque R est le milieu du segment PQ et que S est le milieu du segment QR, alors la position de S est aux $\frac{3}{4}$ du déplacement de P à Q.



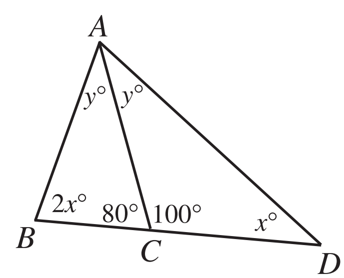
Puisque le déplacement horizontal de P à S est de 12 unités vers la droite, alors celui de P à Q est de $\frac{4}{3}\times 12$, ou 16 unités vers la droite.

Puisque le déplacement vertical de P à S est de 6 unités vers le haut, alors celui de P à Q est de $\frac{4}{3}\times 6$, ou 8 unités vers le haut.

Les coordonnées de S sont $(2+16,\ 1+8)$, ou $(18, 9)$.

Réponse : (D)

13. Dans le triangle ACD, on a $x^\circ + y^\circ + 100^\circ = 180^\circ$, d'où $x + y = 80$ (*).



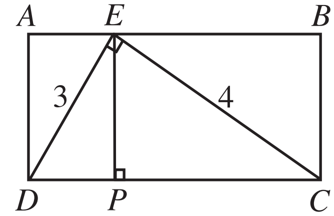
Puisque les angles ACB et ACD sont supplémentaires, alors $\angle ACB = 180^\circ - \angle ACD$, ou $\angle ACB = 80^\circ$.

Dans le triangle ACB, on a donc $2x^\circ + y^\circ + 80^\circ = 180^\circ$, d'où $2x + y = 100$ (**).

On soustrait l'équation (*) de l'équation (**), membre par membre, pour obtenir $x = 20$.

Réponse : (E)

14. *Solution 1*

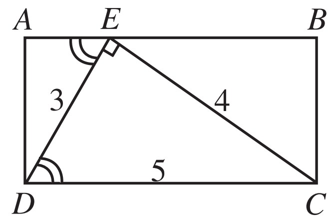


D'après le théorème de Pythagore, $DC^2 = DE^2 + EC^2$, d'où $DC = 5$. L'aire du triangle DEC est égale à $\frac{1}{2}(DE)(EC)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(3)(4)$ ou 6.

Or, l'aire du rectangle $ABCD$ est égale à deux fois l'aire du triangle DEC.
On a donc $(AD)(CD)=12$, c'est-à-dire $(AD)(5)=12$, d'où $AD=2{,}4$.

Solution 2

D'après le théorème de Pythagore, $DC^2=DE^2+EC^2$, d'où $DC=5$. Donc, $\sin(\angle EDC)=\frac{EC}{DC}=\frac{4}{5}$.



De plus, $\sin(\angle AED)=\frac{AD}{ED}=\frac{AD}{3}$.

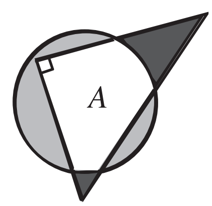
Or, puisque AB et DC sont parallèles, alors $\angle AED=\angle EDC$ et $\sin(\angle AED)=\sin(\angle EDC)$.
Donc, $\frac{AD}{3}=\frac{4}{5}$, d'où $AD=2{,}4$.

RÉPONSE : (B)

15. Puisque $x^2-y^2=0$, alors $(x-y)(x+y)=0$, d'où $y=x$ ou $y=-x$. Ce sont les équations de deux droites, chacune passant à l'origine.

RÉPONSE : (E)

16. Soit A l'aire de la partie du triangle qui est à l'intérieur du cercle et B l'aire de la partie du cercle qui est à l'extérieur du triangle. Donc, B est aussi égal à l'aire de la partie du triangle qui est à l'extérieur du cercle.



$A+B$ est donc égal à l'aire du cercle, de même qu'à l'aire du triangle. Le cercle et le triangle ont donc la même aire.
Soit r le rayon du cercle.
Donc $\pi r^2=\frac{1}{2}(6)(8)$, c'est-à-dire que $\pi r^2=24$, d'où $r=\sqrt{\frac{24}{\pi}}$ ou $r\approx 2{,}8$.

RÉPONSE : (B)

17. Puisque la différence entre deux termes consécutifs est constante, alors la différence entre le 3e et le 4e terme est égale à la différence entre le 1er et le 2e terme. Donc :

$$\begin{aligned}(x+2y+2)-(3x+y)&=y-x\\ y-2x+2&=y-x\\ 2&=x\end{aligned}$$

Les quatre premiers termes de la suite sont donc 2, y, $y+6$ et $2y+4$.
Puisqu'il y a une différence de 6 entre les 2e et 3e termes, il doit y avoir une différence de 6 entre les 1er et 2e termes. Donc $y=8$.
Donc $y-x=6$.

RÉPONSE : (E)

18. *Solution 1*

On développe les deux expressions : $y = a(x-2)^2 + c$ et $y = (2x-5)(x-b)$

$$\begin{aligned} y &= a(x-2)^2 + c \\ &= a\left(x^2 - 4x + 4\right) + c \\ &= ax^2 - 4ax + (4a + c) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= (2x-5)(x-b) \\ &= 2x^2 - (5+2b)x + 5b \end{aligned}$$

Les coefficients correspondants sont donc égaux. D'après les coefficients de x^2, on a $a = 2$.
D'après les coefficients de *x*, on a $-(5+2b) = -4a$, c'est-à-dire que $5 + 2b = 8$, d'où $b = \frac{3}{2}$.

Solution 2

D'après la première équation, l'abscisse du sommet de la parabole est égale à 2.
D'après la deuxième équation, les abscisses à l'origine de la parabole égalent $\frac{5}{2}$ et *b*.
Or, l'abscisse du sommet est égale à la moyenne des abscisses à l'origine.
Donc, $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} + b\right) = 2$, d'où $\frac{5}{2} + b = 4$ ou $b = \frac{3}{2}$.

RÉPONSE : (B)

19. Soit *P* \$ le prix initial fixé par la gérante.
Elle prévoit que la moitié des 1200 copies initiales, soit 600 copies, seront vendues au prix de *P* \$, ce qui donnera des recettes de $600P$ \$.
Deux tiers des 600 copies qui resteront, soit 400 copies, seront vendues au prix de 0,6*P* \$ (c.-à-d. *P* moins 40 % de *P*), ce qui donnera des recettes de $400(0{,}6P)$ \$, ou $240P$ \$.
Les 200 dernières copies seront vendues au prix de 0,25*P* \$ (c.-à-d. *P* moins 75 % de *P*), ce qui donnera des recettes de $200(0{,}25P)$ \$, ou $50P$ \$.
Pour obtenir des recettes de 72 000 \$, il faut que :

$$\begin{aligned} 600P + 240P + 50P &= 72000 \\ 890P &= 72000 \\ P &\approx 80{,}90 \end{aligned}$$

Elle doit donc fixer un prix initial de 80,90 \$.

RÉPONSE : (D)

20. Le ballon roule vers Marcos à une vitesse de 4 m/s et celui-ci court en direction du ballon à une vitesse de 8 m/s. Marcos se rapproche donc du ballon à une vitesse de 12 m /s. Puisqu'il est à 30 m du ballon, au départ, il mettra $\frac{30}{12}$ s, ou 2,5 s pour atteindre le ballon.
Le ballon s'éloigne de Michel à une vitesse de 4 m/s, mais Michel court dans la direction du ballon à une vitesse de 9 m/s. Il gagne donc 5 m/s sur le ballon. Puisqu'il est à 15 m du ballon, au départ, il mettrait 3 s pour le rattraper si celui-ci continuait à rouler.
Marcos est donc le premier à toucher le ballon. Après 2,5 s, Michel a gagné $2{,}5 \times 5$ m ou 12,5 m sur le ballon. Au moment où Marcos touche le ballon, Michel est à 2,5 m de Marcos.

RÉPONSE : (C)

21. *Solution 1*

Dans une heure, Brigitte peint $\frac{1}{B}$ de la ligne et Jules peint $\frac{1}{J}$ de la ligne.

Soit t le nombre d'heures pendant lesquelles les deux travaillaient. Puisque Brigitte a travaillé une heure de plus que Jules et puisque la ligne est complètement peinte après les t heures pendant lesquelles les deux travaillaient, alors $\frac{1}{B}+t\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{J}\right)=1$, d'où $t=\dfrac{1-\frac{1}{B}}{\frac{1}{B}+\frac{1}{J}}$, c.-à-d.

$$t=\frac{\left[\frac{B-1}{B}\right]}{\left[\frac{B+J}{BJ}\right]} \text{ ou } t=\frac{J(B-1)}{B+J}.$$

Le nombre d'heures de travail de Brigitte est donc égal à $\frac{J(B-1)}{B+J}+1$, c.-à-d. à $\frac{BJ-J}{B+J}+\frac{B+J}{B+J}$ ou $\frac{B(J+1)}{B+J}$.

Solution 2

Supposons que Brigitte pouvait peindre la ligne au complet en 1 heure, c.-à-d. que $B=1$. Lorsque Jules arrive, il ne pourrait pas participer et le nombre total d'heures de travail de Brigitte serait égal à 1 heure, c.-à-d. que si $B=1$, alors peu importe la valeur de J, le nombre total d'heures de travail de Brigitte serait égal à 1. Or, si on reporte $B=1$ dans les cinq expressions, on obtient :

(A) $\frac{J+1}{J+1}$ (B) $J+1$ (C) $\frac{J}{J+1}+1$ (D) $\frac{J}{2}$ (E) $\frac{J-1}{J+1}$

Le seul choix qui est toujours égal à 1, peu importe la valeur de J, est (A).

RÉPONSE : (A)

22. Pour que le nombre $(2^k)(5^{300})$ comporte 303 chiffres, il doit être supérieur ou égal à 10^{302} et inférieur à 10^{303}.

Si k était égal à 300, le nombre $(2^k)(5^{300})$ serait égal à $(2^{300})(5^{300})$, ou 10^{300}. Il faut donc que k soit supérieur à 300.

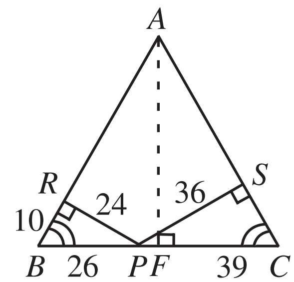
Chaque fois que la valeur de k augmente de 1, le produit est multiplié par 2. Pour que le produit final comporte 303 chiffres, il faut multiplier 10^{300} par une puissance de 2 qui se situe entre 100 et 1000. La première puissance de 2 qui vérifie cette condition est 2^7, ou 128.

On a donc $k=307$. Le nombre $(2^k)(5^{300})$ est donc égal à $(2^{307})(5^{300})$, c.-à-d. à $(2^7)(2^{300})(5^{300})$ ou 128×10^{300}.

En notation courante, ce nombre comporte les chiffres 1, 2, 8, suivis de 300 zéros.

La somme de ses chiffres est donc égale à 11. RÉPONSE : (A)

23. Puisque le triangle ABC est isocèle, $\angle ABC = \angle ACB$. Les triangles BRP et CSP sont rectangles et $\angle ABC = \angle ACB$. Les triangles sont donc semblables. Donc $\dfrac{BC}{CP} = \dfrac{24}{36}$ ou $\dfrac{BP}{CP} = \dfrac{2}{3}$.



Puisque BC a une longueur de 65 cm et que $BP + CP = 65$ cm, on a donc $BP = 26$ cm et $BP = 39$ cm. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle BPR, $BR = 10$ cm.

On trace la hauteur AF. Puisque le triangle ABC est isocèle, la hauteur est une médiane et $BF = 32\frac{1}{2}$ cm.

Puisque les triangles BFA et BRP sont rectangles et qu'ils ont un angle commun, ils sont semblables. Donc $\dfrac{BR}{RP} = \dfrac{BF}{FA}$, d'où $FA = \dfrac{\left(32\frac{1}{2}\right)(24)}{10}$ cm ou $FA = 78$ cm.

L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(65)(78)$ cm^2 ou 2535 cm^2.

RÉPONSE : (D)

24. Puisque $f(x) - f(x-2)$ est une expression du second degré, alors $f(x)$ doit être un polynôme du second degré ou plus. S'il était du second degré, le terme en x^2 de $f(x)$ et de $f(x-2)$ seraient annulés par la soustraction. (Le vérifier à l'aide d'un exemple.) Le degré de $f(x)$ doit donc être supérieur ou égal à 3.

Posons $f(x) = ax^3 + px^2 + qx + r$.

Donc :
$$\begin{aligned} f(x-2) &= a(x-2)^3 + p(x-2)^2 + q(x-2) + r \\ &= a\left(x^3 - 6x^2 + 12x - 8\right) + p\left(x^2 - 4x + 4\right) + q(x-2) + r \\ &= ax^3 + (-6a+p)x^2 + (12a - 4p + q)x + (-8a + 4p - 2q + r) \end{aligned}$$

Puisque $f(x) - f(x-2) = (2x-1)^2$, alors :
$$\left[ax^3 + px^2 + qx + r\right] - \left[ax^3 + (-6a+p)x^2 + (12a - 4p + q)x + (-8a + 4p - 2q + r)\right] = 4x^2 - 4x + 1$$
$$6ax^2 + (-12a + 4p)x + (8a - 4p + 2q) = 4x^2 - 4x + 1$$

En comparant les coefficients, on a
$$\begin{aligned} 6a &= 4 \\ -12a + 4p &= -4 \\ 8a - 4p + 2q &= 1 \end{aligned}$$

D'après la 1re équation, on a $a = \frac{2}{3}$.

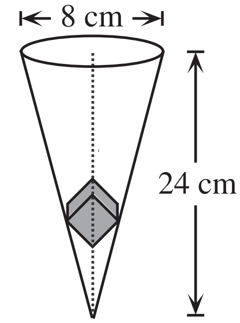
On reporte $6a = 4$ dans la 2e équation pour obtenir $-8 + 4p = -4$, d'où $p = 1$.

On reporte $a = \frac{2}{3}$ et $p = 1$ dans la 3e équation pour obtenir $8\left(\frac{2}{3}\right) - 4(1) + 2q = 1$, d'où $q = -\frac{1}{6}$.

Donc $p + q = \frac{5}{6}$.

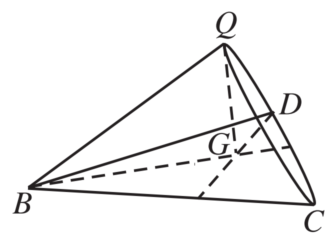
RÉPONSE : (B)

25. Il est difficile, au départ, de visualiser la position du cube dans le cône. Puisque le cube est en équilibre dans le cône et qu'une de ses diagonales coïncide avec l'axe du cône, il y a donc un sommet, A, qui pointe vers le bas, trois sommets, B, C et D, qui touchent à la surface du cône et un sommet, Q, qui pointe vers le haut. (On ne fera pas appel aux trois autres sommets.)



Par symétrie, les sommets B, C et D sont situés dans un plan parallèle à la base du cône et ils forment un triangle équilatéral.

La figure ci-contre indique la position des sommets B, C, D et Q. QB est la longueur de la diagonale d'une face du cube (pour le voir, il faut visualiser la situation avec attention). G est le point d'intersection des trois médianes. Par symétrie, le sommet A, le point G et le sommet Q sont alignés à la verticale, sur l'axe du cône.



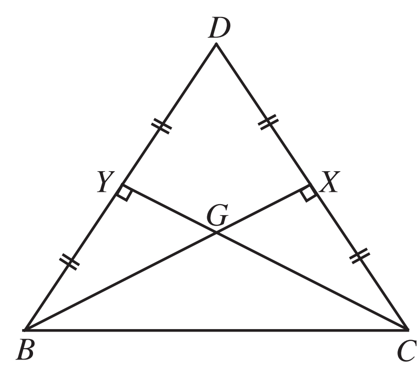
On pourra déterminer la distance entre le sommet T du cône et le sommet A du cube en déterminant

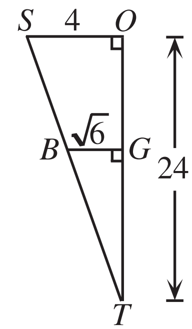
- la distance entre T et le plan formé par B, C et D,
- la distance entre A et le plan formé par B, C et D,

et en soustrayant une distance de l'autre.

Puisque chaque arête du tétraèdre est une diagonale d'une face du cube, chaque arête, BQ, BC, BD et CD, a une longueur de $\sqrt{3^2+3^2}$ ou $3\sqrt{2}$.

La figure ci-contre montre le triangle BCD et ses médianes BX et CY qui se coupent en G. Le triangle BGY est un triangle remarquable 30°–60°–90°. On a donc $BG = \frac{2}{\sqrt{3}}(BY)$, ou $BG = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}(BD)\right)$. Donc $BG = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(3\sqrt{2}\right)$, ou $BG = \sqrt{6}$. La distance entre l'axe du cône et les points où le cube touche au cône est donc égale à $\sqrt{6}$.





On détermine maintenant la distance du point T au plan formé par B, C et D. La figure ci-contre représente la moitié d'une coupe transversale du cône. Les points B, T et G sont indiqués. Le point O représente le centre de la base du cône et le point S représente le troisième sommet de la coupe transversale.

Les triangles TGB et TOS sont semblables. Puisque le rayon de la base du cône a une longueur de 4, alors $\frac{TG}{TO} = \frac{GB}{OS}$, d'où $TG = 24\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ ou $TG = 6\sqrt{6}$.

Il reste à calculer AG. Pour le faire, on calculera AQ et QG et on soustraira.

AQ est la grande diagonale du cube. Donc $AQ = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2}$ ou $AQ = 3\sqrt{3}$.

Puisque le triangle BGQ est rectangle, alors $QG = \sqrt{BQ^2 - BG^2}$, c.-à-d. que $GQ = \sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2}$ ou $GQ = 2\sqrt{3}$.

Donc $AG = AQ - QG$, ou $AG = \sqrt{3}$.

La distance entre le sommet du cône et le sommet le plus rapproché du cube est donc égale à $TA = TG - AG$ ou $TA = 6\sqrt{6} - \sqrt{3}$.

RÉPONSE : (A)