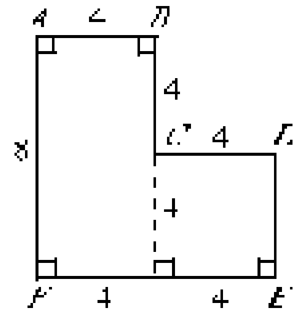
Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre
en mathématiques et en
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Solutions du Concours Euclide 2004

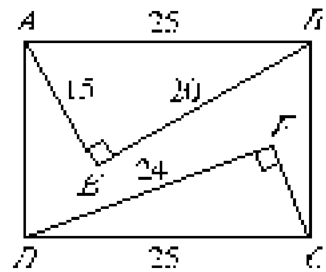
pour les prix du
The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

1. a) Puisque tous les angles sont droits, $BC = DE = 4$.
On prolonge BC, de manière à former un rectangle de dimensions 8 sur 4 et un carré de dimensions 4 sur 4. L'aire de $ABCDEF$ est donc égale à $(8)(4)+(4)(4)$, ou 48.



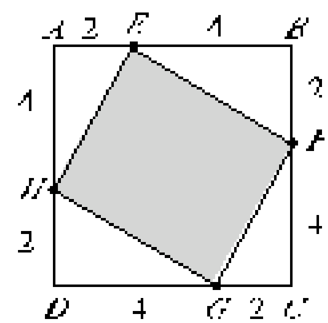
RÉPONSE : 48

b) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABE, $AB^2 = 15^2 + 20^2$, d'où $AB = 25$.
Puisque $ABCD$ est un rectangle, $CD = AB = 25$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle CFD, $25^2 = 24^2 + CF^2$, d'où, $CF = 7$.

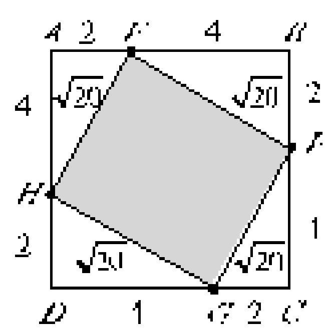


RÉPONSE : 7

c) *Solution 1*
Puisque $ABCD$ est un carré de dimensions 6 sur 6 et que les rapports $AE : EB$, $BF : FC$, $CG : GD$ et $DH : HA$ égalent tous 1 : 2, alors $AE = BF = CG = DH = 2$ et $EB = FC = GD = HA = 4$.
Chacun des triangles HAE, EBF, FCG et GDH est donc rectangle avec des cathètes de longueurs 2 et 4.
L'aire de $EFGH$ est égale à l'aire du carré $ABCD$ moins l'aire des quatre triangles. Elle est donc égale à $6^2 - 4\left[\frac{1}{2}(2)(4)\right]$, ou 20.



Solution 2
Puisque $ABCD$ est un carré de dimensions 6 sur 6 et que les rapports $AE : EB$, $BF : FC$, $CG : GD$ et $DH : HA$ égalent tous 1 : 2, alors $AE = BF = CG = DH = 2$ et $EB = FC = GD = HA = 4$.
Chacun des triangles HAE, EBF, FCG et GDH est donc rectangle avec des cathètes de longueurs 2 et 4.
D'après le théorème de Pythagore, l'hypoténuse de chacun de ces triangles est égale à $\sqrt{2^2+4^2}$, ou $\sqrt{20}$.

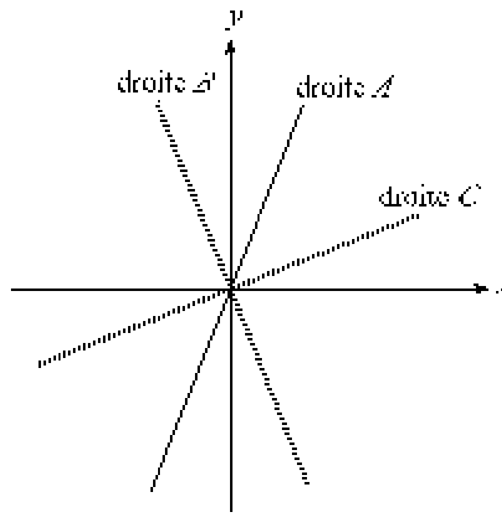


Puisque les triangles *HAE* et *EBF* sont congruents (on sait que leurs côtés sont congrus deux à deux), alors $\angle AHE = \angle BEF$. Puisque $\angle AHE + \angle AEH = 90^\circ$, alors $\angle BEF + \angle AEH = 90^\circ$. Donc $\angle HEF = 90^\circ$.
Le losange *EFGH* est donc un carré dont les côtés ont une longueur de $\sqrt{20}$.
L'aire de *EFGH* est donc égale à $\left(\sqrt{20}\right)^2$, ou 20 unités carrées.

2. a) On écrit l'équation $3x - y = 6$ sous la forme $y = 3x - 6$, ce qui indique que l'ordonnée à l'origine de la droite est égale à –6.
La droite horizontale, qui a la même ordonnée à l'origine, a donc pour équation $y = -6$.

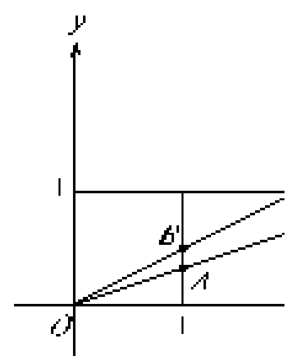
Réponse : $y = -6$

b) Lorsque la droite *A*, d'équation $y = 2x$, est réfléchie par rapport à l'axe des ordonnées, son image, la droite *B*, a pour équation $y = -2x$, car la pente change de signe.
Puisque la droite *B* a une pente de –2 et que les droites *B* et *C* sont perpendiculaires, la pente de la droite *C* est égale à $\frac{1}{2}$ (une pente est l'opposée de l'inverse de l'autre).



Réponse : $\frac{1}{2}$

c) *Solution 1*
Le segment *OP* a une pente de $\frac{1}{2}$. Le point *B* est situé sur ce même segment et son abscisse est égale à 1. Son ordonnée est donc égale à $\frac{1}{2}$.
Le segment *OQ* a une pente de $\frac{1}{3}$. Le point *A* est situé sur ce même segment et son abscisse est égale à 1. Son ordonnée est donc égale à $\frac{1}{3}$.



Puisque les points *A* et *B* ont la même abscisse, la longueur *AB* est égale à $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, ou $\frac{1}{6}$.

Solution 2

La droite qui passe par l'origine O et le point P a une équation de la forme $y = mx$.

Puisque le point $P(2,1)$ est sur la droite, alors $1 = m(2)$, d'où $m = \frac{1}{2}$. L'équation de la droite est donc $y = \frac{1}{2}x$. Puisque B est sur cette droite et que son abscisse est égale à 1, ses coordonnées vérifient l'équation : $y = \frac{1}{2}(1)$. Ses coordonnées sont donc $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

De même, la droite qui passe par O et par Q a pour équation $y = \frac{1}{3}x$ et les coordonnées du point A sont $\left(1, \frac{1}{3}\right)$.

Puisque les points A et B ont la même abscisse, la longueur AB est égale à $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, ou $\frac{1}{6}$.

3. a) *Solution 1*

Soit a le 3^e terme et d la raison (le terme constant qui est additionné au terme précédent).
Les cinq termes sont donc $a - 2d$, $a - d$, a, $a + d$, $a + 2d$.
D'après les renseignements, on a $(a - 2d) + (a - d) = 2$ et $(a + d) + (a + 2d) = -18$, c.-à-d. $2a - 3d = 2$ et $2a + 3d = -18$.
Pour déterminer le 3^e terme, soit a, on additionne ces deux équations, membre par membre, pour obtenir $4a = -16$, d'où $a = -4$.
Le 3^e terme est égal à -4.

Solution 2

Soit a le 1^er terme et d la raison (le terme constant qui est additionné au terme précédent).
Les cinq termes sont donc a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$, $a + 4d$.
D'après les renseignements, on a $a + (a + d) = 2$ et $(a + 3d) + (a + 4d) = -18$, c.-à-d. $2a + d = 2$ et $2a + 7d = -18$.

On soustrait ces équations, membre par membre, pour obtenir $6d = -20$, d'où $d = -\frac{10}{3}$.

On reporte $d = -\frac{10}{3}$ dans la première équation pour obtenir $2a + \left(-\frac{10}{3}\right) = 2$, d'où $a = \frac{8}{3}$.

Le 3^e terme est égal à $a + 2d$, c.-à-d. à $\frac{8}{3} + 2\left(-\frac{10}{3}\right)$, ou -4.

RÉPONSE : -4

b) *Solution 1*

Puisque $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ et $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, alors
$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$.
On a donc $(x + y)^2 - \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 4(56)$, d'où $(x + y)^2 = 256$.
Donc $x + y = 16$ ou $x + y = -16$.

Les deux valeurs possibles de $x + y$ sont 16 et –16.

Solution 2

D'après la 1re équation, on a $x = y + 4\sqrt{2}$. On reporte cette expression dans la 2e équation :

$$\left(y + 4\sqrt{2}\right)y = 56$$

$$y^2 + 4\sqrt{2}y - 56 = 0$$

$$y = \frac{-4\sqrt{2} \pm \sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 - 4(1)(-56)}}{2}$$

$$y = \frac{-4\sqrt{2} \pm \sqrt{256}}{2}$$

$$y = -2\sqrt{2} \pm 8$$

Si $y = -2\sqrt{2} + 8$, alors $x = \left(-2\sqrt{2} + 8\right) + 4\sqrt{2}$, d'où $x = 2\sqrt{2} + 8$. Donc $x + y = 16$.

Si $y = -2\sqrt{2} - 8$, alors $x = \left(-2\sqrt{2} - 8\right) + 4\sqrt{2}$, d'où $x = 2\sqrt{2} - 8$. Donc $x + y = -16$.

Les deux valeurs possibles de $x + y$ sont 16 et –16.

4. a) *Solution 1*

L'expérience admet 36 résultats possibles équiprobables.

Pour que le produit de deux entiers positifs, chacun inférieur ou égal à 6, soit divisible par 5, il faut qu'au moins un des nombres soit égal à 5.

Les résultats favorables sont

$(1,5)$, $(2,5)$, $(3,5)$, $(4,5)$, $(5,5)$, $(6,5)$, $(5,1)$, $(5,2)$, $(5,3)$, $(5,4)$, $(5,6)$.

Il y en a onze. La probabilité pour que le produit soit divisible par 5 est égale à $\frac{11}{36}$.

Solution 2

Pour que le produit de deux entiers positifs, chacun inférieur ou égal à 6, soit divisible par 5, il faut qu'au moins un des nombres soit égal à 5.

Lorsqu'on jète deux dés, la probabilité pour que le premier indique un 5 et que le deuxième indique n'importe quel nombre de 1 à 6 est égale à $\frac{1}{6} \times 1$, ou $\frac{1}{6}$.

De même, la probabilité pour que le premier dé indique n'importe quel nombre et que le deuxième indique un 5 est égale à $1 \times \frac{1}{6}$, ou $\frac{1}{6}$.

Si on additionne ces probabilités, on a compté deux fois la probabilité pour que les deux dés indiquent un 5. Cette probabilité est égale à $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$, ou $\frac{1}{36}$.

La probabilité pour que le produit soit divisible par 5 est égale à $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36}$, ou $\frac{11}{36}$.

RÉPONSE : $\frac{11}{36}$

b) On utilise $f(x) = x^2 - x + 2$ et $g(x) = ax + b$ pour obtenir une expression pour $f\big(g(x)\big)$.

$$\begin{aligned}
f\big(g(x)\big) &= f(ax+b) \\
&= (ax+b)^2 - (ax+b) + 2 \\
&= a^2x^2 + 2abx + b^2 - ax - b + 2 \\
&= a^2x^2 + (2ab-a)x + \left(b^2 - b + 2\right)
\end{aligned}$$

Or, on sait que $f\big(g(x)\big) = 9x^2 - 3x + 2$. Les coefficients correspondants sont donc égaux deux à deux.

$$\begin{aligned}
a^2 &= 9 && (1) \\
2ab - a &= -3 && (2) \\
b^2 - b + 2 &= 2 && (3)
\end{aligned}$$

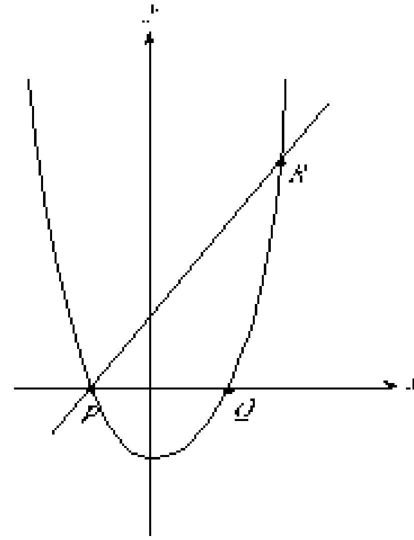
D'après la 1re équation, $a = 3$ ou $a = -3$.
D'après la 3e équation, $b^2 - b = 0$ ou $b(b-1) = 0$. Donc, $b = 0$ ou $b = 1$.
Il y a donc 4 couples (a, b) qui satisfont à deux des équations. On vérifie lesquels satisfont aussi à la 2e équation.
La 2e équation peut s'écrire sous forme $a(2b-1) = -3$. Si $a = 3$, alors $b = 0$. Si $a = -3$, alors $b = 1$.
Les couples (a, b) qui vérifient les conditions initiales sont $(3, 0)$ et $(-3, 1)$.

5. a)

$$\begin{aligned}
16^x &= 2^{x+5} - 2^{x+4} \\
\left(2^4\right)^x &= 2^{x+4}\left(2^1 - 1\right) \\
2^{4x} &= 2^{x+4}(1) \\
2^{4x} &= 2^{x+4} \\
4x &= x + 4 \\
3x &= 4 \\
x &= \tfrac{4}{3}
\end{aligned}$$

RÉPONSE : $x = \frac{4}{3}$

b) Le point P est le point d'intersection de la droite d'équation $y = 3x + 3$ et de l'axe des abscisses. Ses coordonnées sont donc $(-1, 0)$.



Puisque ce point est sur la parabole, il vérifie son équation $y = x^2 + tx - 2$. On a donc :

$$\begin{aligned} 0 &= (-1)^2 + t(-1) - 2 \\ 0 &= 1 - t - 2 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

La parabole a donc pour équation $y = x^2 - x - 2$ ou $y = (x+1)(x-2)$ (la factorisation a été facilité par notre connaissance d'une abscisse à l'origine). La deuxième abscisse à l'origine est donc égale à 2 et les coordonnées de Q sont $(2, 0)$.

Il reste à déterminer les coordonnées du point R. Puisque R est un point d'intersection de la droite et de la parabole, on a, au point R :

$$\begin{aligned} 3x + 3 &= x^2 - x - 2 \\ 0 &= x^2 - 4x - 5 \\ 0 &= (x+1)(x-5) \end{aligned}$$

Donc, $x = -1$ ou $x = 5$.

(Une fois de plus, la factorisation a été facilitée par notre connaissance d'une des racines, soit –1.) Puisque –1 est l'abscisse de P, l'abscisse de R est égale à 5. Puisque R est situé sur la droite, alors $y = 3(5) + 3$, ou $y = 18$. Les coordonnées de R sont $(5, 18)$.

On peut maintenant calculer l'aire du triangle PQR. Le triangle a une base PQ de longueur de 3 et une hauteur correspondante de 18. Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(3)(18)$, ou 27.

Donc, $t = -1$ et l'aire du triangle PQR est égale à 27.

6. a) Pour utiliser le plus grand nombre possible de pièces de monnaie, Laure doit utiliser autant de pièces que possible qui ont une petit valeur.

Peut-elle payer 1,34 $ sans utiliser la pièce de 1 $? La valeur totale des autres pièces de monnaie est égale à $3(0{,}25\ \$) + 3(0{,}10\ \$) + 3(0{,}05\ \$) + 5(0{,}01\ \$)$, ou 1,25 $. Laure doit donc utiliser la pièce de 1 $. Elle doit maintenant utiliser le plus grand nombre possible de pièces pour faire 0,34 $.

Laure doit utiliser 4 pièces de 1 ¢. Elle a maintenant utilisé 5 pièces et il lui reste 0,30 $ à combler.
Pour le faire en utilisant le plus grand nombre possible des pièces de 25 ¢, de 10 ¢ et de 5 ¢, elle devrait utiliser 2 pièces de 5 ¢ et 2 pièces de 10 ¢, c'est-à-dire 4 pièces de monnaie pour un total de 9 pièces. En effet, si elle utilise une pièce de 25 ¢, il suffit d'utiliser une seule autre pièce de 5 ¢, c'est-à-dire 2 pièces de plus pour un total de 7 pièces. De plus, il est impossible d'utiliser une seule pièce de 10 ¢.
Le plus grand nombre de pièces de monnaie qu'elle peut utiliser est 9.

RÉPONSE : 9

b) Les dimensions initiales de l'image sont de 10 cm sur 15 cm. Lorsqu'on les augmente de n %, les nouvelles dimensions sont de $10\left(1+\frac{n}{100}\right)$ sur $15\left(1+\frac{n}{100}\right)$.
Lorsque la résolution initiale est diminuée de n %, la nouvelle résolution est de $75\left(1-\frac{n}{100}\right)$ pixels/cm. (n ne peut être supérieur à 100, car la résolution ne peut être diminuée de plus de 100 %.)
Le nombre de pixels de la nouvelle image est égal à

$$\left[10\left(1+\frac{n}{100}\right)\times 75\left(1-\frac{n}{100}\right)\right]\times\left[15\left(1+\frac{n}{100}\right)\times 75\left(1-\frac{n}{100}\right)\right].$$

Puisque l'image sera formée de 345 600 pixels, alors :

$$\begin{aligned}
\left[10\left(1+\frac{n}{100}\right)\times 75\left(1-\frac{n}{100}\right)\right]\times\left[15\left(1+\frac{n}{100}\right)\times 75\left(1-\frac{n}{100}\right)\right] &= 345\,600\\
843\,750\left(1+\frac{n}{100}\right)^2\left(1-\frac{n}{100}\right)^2 &= 345\,600\\
\left(1-\frac{n^2}{100^2}\right)^2 &= 0{,}4096\\
1-\frac{n^2}{100^2} &= 0{,}64 \qquad (n\le 100)\\
n^2 &= 0{,}36\times 100^2\\
n &= 0{,}6\times 100 \qquad (n>0)\\
n &= 60
\end{aligned}$$

Donc $n=60$.

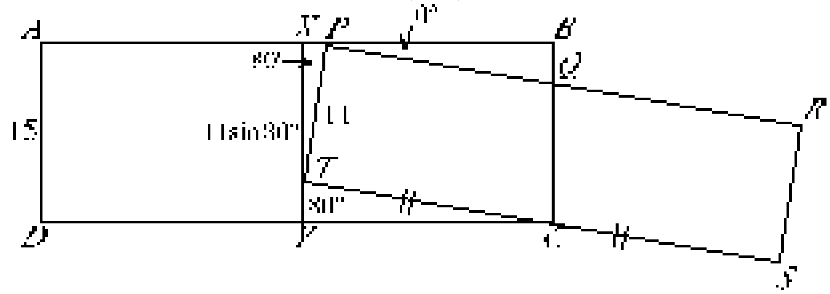
7. a) On calcule d'abord la longueur AC en utilisant la loi du cosinus :

$$\begin{aligned}
AC^2 &= 7^2+8^2-2(7)(8)\cos(120^\circ)\\
AC^2 &= 49+64-112\left(-\tfrac{1}{2}\right)\\
AC^2 &= 169\\
AC &= 13
\end{aligned}$$

Puisque ABC est un triangle rectangle isocèle, alors $x = \sqrt{2}(AC)$, ou $x = 13\sqrt{2}$.

RÉPONSE : $x = 13\sqrt{2}$

b) Au point T, on mène une perpendiculaire à AB. Elle coupe AB en X et CD en Y.
Puisque $\angle TPR = 90°$ et que $\angle BPQ = 10°$, alors $\angle XPT = 80^\circ$. Donc $XT = 11\sin(80^\circ)$.
Puisque $XY = 15$, alors $TY = 15 - 11\sin(80^\circ)$.



Puisque le triangle XPT est rectangle et que $\angle XPT = 80^\circ$, alors $\angle XTP = 10^\circ$.
Puisque $\angle XTP = 10^\circ$ et $\angle TYC = 90^\circ$, alors $\angle YTC = 80^\circ$.

Donc, $TC = \dfrac{TY}{\cos(80^\circ)}$, ou $TC = \dfrac{15 - 11\sin(80^\circ)}{\cos(80^\circ)}$.

Puisque $TS = 2TC$, alors $TS = \dfrac{30 - 22\sin(80^\circ)}{\cos(80^\circ)}$, ou $TS \approx 47{,}9949$.

Arrondie au dixième de centimètre près, la longueur du tiroir est de 48,0 cm.
[Il y a plusieurs autres démarches possibles.]

8. a) On considère le membre de droite de l'identité :

$$\begin{aligned} T^3 + bT + c &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3 + b\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + c \\ &= \left(x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + c \\ &= x^6 + 3x^2 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^6} + b\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + c \\ &= x^6 + \frac{1}{x^6} + (b+3)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + c \end{aligned}$$

Pour que cette expression soit égale à $x^6 + \dfrac{1}{x^6}$ pour toutes les valeurs de x, il faut que $b + 3 = 0$ et que $c = 0$. Donc, $b = -3$ et $c = 0$.

b) *Solution 1*

On considère l'équation $x^3 + \frac{1}{x^3} = 2\sqrt{5}$, tout en élevant chaque membre au carré :

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2$$

$$x^6 + 2 + \frac{1}{x^6} = 20$$

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = 18$$

D'après l'identité de la partie a), on a $x^6 + \frac{1}{x^6} = T^3 - 3T$, où $T = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

L'équation précédente devient donc $T^3 - 3T = 18$.

On aimerait factoriser le membre de gauche de l'équation $T^3 - 3T - 18 = 0$.

Par tâtonnements, on conclut que $T = 3$ vérifie l'équation. Selon le théorème de factorisation, $(T - 3)$ est un facteur du membre de gauche.

On obtient $(T - 3)\left(T^2 + 3T + 6\right) = 0$, d'où $T = 3$ ou $T^2 + 3T + 6 = 0$. Or, cette dernière équation n'admet aucune racine réelle, car son discriminant, soit $3^2 - 4(1)(6)$, est négatif.

Donc $T = 3$, c'est-à-dire que $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$.

Solution 2

Soit $t = x + \frac{1}{x}$. On a vu, en a), que $x^6 + \frac{1}{x^6} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3 - 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ est une identité.

On peut conclure que $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$ est une identité.

L'équation $x^3 + \frac{1}{x^3} = 2\sqrt{5}$ peut donc s'écrire sous la forme $t^3 - 3t = 2\sqrt{5}$ ou $t^3 - 3t - 2\sqrt{5} = 0$.

Puisque $\left(\sqrt{5}\right)^3 = 5\sqrt{5}$, on voit que $t = \sqrt{5}$ vérifie l'équation. Selon le théorème de factorisation, $\left(t - \sqrt{5}\right)$ est un facteur du membre de gauche. Par tâtonnements, on obtient $\left(t - \sqrt{5}\right)\left(t^2 + \sqrt{5}t + 2\right) = 0$, d'où $t = \sqrt{5}$ ou $t^2 + \sqrt{5}t + 2 = 0$. Or, cette dernière équation n'admet aucune racine réelle, car son discriminant, soit $\left(\sqrt{5}\right)^2 - 4(1)(2)$, est négatif.

Donc $t = \sqrt{5}$, ou $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$.

On élève chaque membre au carré pour obtenir :

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2$$

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=5$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=3$$

Solution 3

On considère l'équation $x^3+\frac{1}{x^3}=2\sqrt{5}$ et on élève chaque membre au carré :

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2$$

$$x^6+2+\frac{1}{x^6}=20$$

$$x^6+\frac{1}{x^6}=18$$

D'après la partie a), en posant $T=x^2+\frac{1}{x^2}$, cette équation devient $T^3-3T-18=0$.

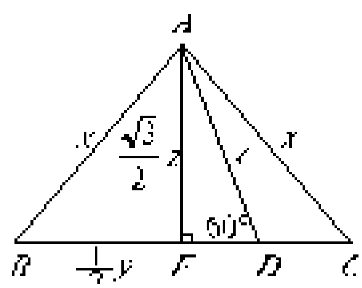
Comme dans la solution 1, on obtient $T=3$, c'est-à-dire que $x^2+\frac{1}{x^2}=3$.

9. a) *Solution 1*

Au point A, on abaisse une perpendiculaire AE à BC.

Dans le triangle ABE, on a $AE^2=x^2-\frac{1}{4}y^2$.

Dans le triangle ADE, on a $AE=\frac{\sqrt{3}}{2}z$.



Donc $AE^2=\frac{3}{4}z^2$.

On a donc $x^2-\frac{1}{4}y^2=\frac{3}{4}z^2$ ou

$4x^2-y^2=3z^2$.

Si $x=7$ et $z=5$, alors :

$$196-y^2=75$$

$$y^2=121$$

$$y=11$$

Le triplet de Kirk pour lequel $x=7$ et $z=5$ est $(7,11,5)$.

Solution 2

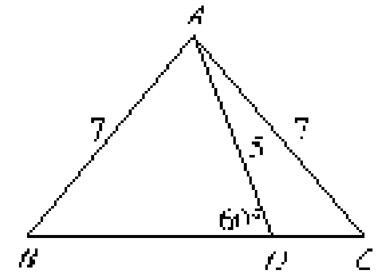
D'après la loi du cosinus dans le triangle ADB :

$$7^2 = 5^2 + BD^2 - 2(5)(BD)\cos(60^\circ)$$

$$0 = BD^2 - 5BD - 24$$

$$0 = (BD-8)(BD+3)$$

Puisque BD est une longueur positive, alors $BD = 8$.



D'après la loi du cosinus dans le triangle ADC :

$$7^2 = 5^2 + DC^2 - 2(5)(DC)\cos(120^\circ)$$

$$0 = DC^2 + 5DC - 24$$

$$0 = (DC+8)(DC-3)$$

Puisque DC est une longueur positive, alors $DC = 3$. Donc, $y = 8+3$, ou $y = 11$.

Le triplet de Kirk pour lequel $x = 7$ et $z = 5$ est $(7, 11, 5)$.

b) *Solution 1*

D'après la solution 1 de la partie a), on a $4x^2 - y^2 = 3z^2$. Puisque $z = 5$, alors :

$$4x^2 - y^2 = 75$$

$$(2x+y)(2x-y) = 75$$

Les facteurs $2x+y$ et $2x-y$ représentent des entiers positifs et leur produit doit donc égaler 75. On remarque que la valeur de l'expression $2x+y$ est toujours supérieure à celle de $2x-y$. Les diviseurs de 75 sont 1, 3, 5, 15, 25 et 75.

On examine les possibilités et on résout les systèmes d'équations correspondants :

$2x+y$	$2x-y$	x	y
75	1	19	37
25	3	7	11
15	5	5	5

Les autres triplets de Kirk pour lesquels $z = 5$ sont $(19, 37, 5)$ et $(7, 11, 5)$.

Solution 2

Soit $BD = a$ et $DC = b$.

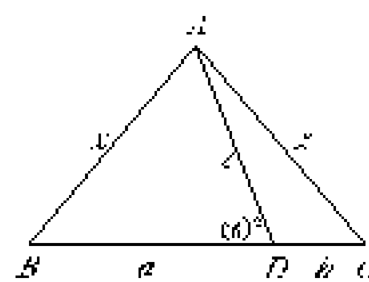
D'après la loi du cosinus dans les triangles ABD et ADC :

$x^2 = 5^2 + a^2 - 2(5)(a)\cos(60^\circ)$, ou

$x^2 = a^2 - 5a + 25$ et

$x^2 = 5^2 + b^2 - 2(5)(b)\cos(120^\circ)$, ou

$x^2 = b^2 + 5b + 25$



On soustrait la deuxième équation de la première, membre par membre :

$$0 = a^2 - b^2 - 5a - 5b$$
$$0 = (a+b)(a-b-5)$$
$$0 = y(a-b-5)$$

Puisque y ne peut être nul, alors $a = b + 5$.
Puisque $y = a + b$, alors $y = 2b + 5$, ou $2b = y - 5$.
Puisque $x^2 = b^2 + 5b + 25$, alors :

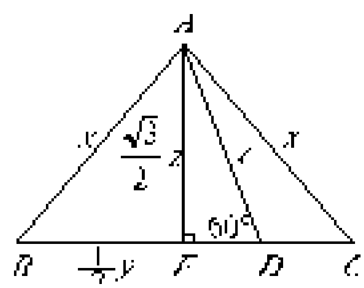
$$4x^2 = 4b^2 + 20b + 100$$
$$4x^2 = (y-5)^2 + 10(y-5) + 100$$
$$4x^2 = y^2 + 75$$
$$4x^2 - y^2 = 75$$

On continue comme dans la solution 1.
Les autres triplets de Kirk pour lesquels $z = 5$ sont $(19, 37, 5)$ et $(7, 11, 5)$.

c) Pour déterminer le triplet de Kirk demandé, il faut d'abord une démarche pour déterminer des triplets de Kirk. On utilise la démarche de la solution 1 de la partie b).
Au point *A*, on abaisse une perpendiculaire *AF* à *BC*.
Puisque le triangle *ABC* est isocèle, *F* est le milieu de *BC*.
Le triangle *AFD* est un triangle remarquable 30°–60°–90° et on a $AD = z$.
Donc, $FD = \frac{1}{2}z$ et $AF = \frac{\sqrt{3}}{2}z$.

Le triangle *ABF* est rectangle en *F* et on a $AF = \frac{\sqrt{3}}{2}z$, $AB = x$ et $BF = \frac{1}{2}y$.
D'après le théorème de Pythagore :

$$x^2 = \left(\frac{1}{2}y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2$$
$$4x^2 - y^2 = 3z^2$$
$$(2x+y)(2x-y) = 3z^2$$



Les facteurs $2x + y$ et $2x - y$ représentent des entiers positifs et leur produit doit donc être égal à $3z^2$. On remarque que la valeur de l'expression $2x + y$ est toujours supérieure à celle de $2x - y$. Puisque z est un nombre premier, les facteurs de $3z^2$ sont 1, 3, z, $3z$, z^2 et $3z^2$. (On remarquera que si z est égal à 2, ces facteurs ne sont pas en ordre ascendant; si z est égal à 3, certains facteurs sont répétés.)
On examine les possibilités et on résout les systèmes d'équations correspondants :

$2x+y$	$2x-y$	x	y
$3z^2$	1	$\dfrac{3z^2+1}{4}$	$\dfrac{3z^2-1}{2}$
z^2	3	$\dfrac{z^2+3}{4}$	$\dfrac{z^2-3}{2}$
$3z$	z	z	z

Les deux seuls triplets de Kirk qui correspondent à une valeur particulière de z sont donc $\left(\dfrac{3z^2+1}{4}, \dfrac{3z^2-1}{2}, z\right)$ et $\left(\dfrac{z^2+3}{4}, \dfrac{z^2-3}{2}, z\right)$.

On cherche le triplet de Kirk pour lequel la valeur de $\cos(\angle ABC)$ est le plus rapprochée possible de 0,99.

D'après le triangle ABF, on a $\cos(\angle ABC) = \dfrac{\frac{1}{2}y}{x}$.

Pour le 1^er^ triplet, on a donc $\cos(\angle ABC) = \dfrac{3z^2-1}{3z^2+1}$, ou $\cos(\angle ABC) = 1 - \dfrac{2}{3z^2+1}$.

Pour le 2^e^ triplet, on a $\cos(\angle ABC) = \dfrac{z^2-3}{z^2+3}$ ou $\cos(\angle ABC) = 1 - \dfrac{6}{z^2+3}$.

Pour que $\cos(\angle ABC)$ soit près de 0,99, il faut que $\dfrac{2}{3z^2+1}$ ou $\dfrac{6}{z^2+3}$ soit près de 0,01.

Il faut donc que $3z^2+1$ soit près de 200 ou que z^2+3 soit près de 600.

Dans le 1^er^ cas, on voit que $3(8)^2+1=193$ et que $3(9)^2+1=244$. Puisque z doit être un nombre premier, on vérifie les choix $z=7$ et $z=11$. En utilisant $\cos(\angle ABC) = \dfrac{3z^2-1}{3z^2+1}$, on obtient $\cos(\angle ABC) \approx 0{,}986487$ si $z=7$ et $\cos(\angle ABC) \approx 0{,}994506$ si $z=11$.

Dans le 2^e^ cas, on voit que $24^2+3=579$ et que $25^2+3=628$. Puisque z doit être un nombre premier, on vérifie les choix $z=23$ et $z=29$. En utilisant $\cos(\angle ABC) = \dfrac{z^2-3}{z^2+3}$, on obtient $\cos(\angle ABC) \approx 0{,}988722$ si $z=23$ et $\cos(\angle ABC) \approx 0{,}993644$ si $z=29$.

La valeur de $\cos(\angle ABC)$ semble être le plus rapprochée possible de 0,99 lorsque $z=23$.

Il faut vérifier que cette valeur de z donne bien un triplet de Kirk! Dans le 2^e^ cas, en utilisant $z=23$, on obtient le triplet $(133, 263, 23)$.

Le triplet de Kirk $(133, 263, 23)$ fait en sorte que la valeur de $\cos(\angle ABC)$ est le plus rapprochée possible de 0,99.

(Remarque : On aurait pu suivre une approche semblable à celle de la solution 2 de la partie b), obtenir l'équation $4x^2 - y^2 = 3z^2$ et continuer comme ci-haut.)

10. a) On commence par placer les deux 4. De façon systématique, on les place dans toutes les paires de positions, soit 1 et 5, 2 et 6, 3 et 7, 4 et 8. Dans chaque cas, on tente de placer les deux 3 dans chaque paire de positions disponibles, puis on cherche à placer les deux 2, puis les deux 1.
(On peut réduire le travail en remarquant que si on a une suite de Skolem, on peut en obtenir une autre en renversant l'ordre des nombres. Ainsi il suffit de placer les deux 4 dans les positions 1 et 5 ou 2 et 6. Les autres résultats viendront en renversant l'ordre.)
Les six suites de Skolem d'ordre 4 sont :
(4, 2, 3, 2, 4, 3, 1, 1) et en ordre renversé, (1, 1, 3, 4, 2, 3, 2, 4)
(4, 1, 1, 3, 4, 2, 3, 2) et en ordre renversé, (2, 3, 2, 4, 3, 1, 1, 4)
(3, 4, 2, 3, 2, 4, 1, 1) et en ordre renversé, (1, 1, 4, 2, 3, 2, 4, 3)

b) Dans une telle suite de Skolem d'ordre 9, il y aura 18 positions à remplir, avec 10 nombres impairs et 8 nombres pairs.
Puisque $s_{18} = 8$, on aura $s_{10} = 8$, puisque les 8 seront séparés de 8 positions.
D'après la condition III, il ne doit y avoir qu'un terme impair entre les deux 8. Or il ne reste que 6 nombres pairs à placer et 7 positions entre les 8. On doit donc placer tous les nombres pairs entre les deux 8. La seule façon de le faire, tout en respectant la condition ii, est de placer les 6 à côté des 8, puis les 4 à côté des 6, puis les 2 à côté des 4.
La suite, encore incomplète, a la forme :
(__, __, 1, __, __, __, __, __, __, 8, 6, 4, 2, __, 2, 4, 6, 8)
Il reste à placer les nombres 1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 9, et les positions disponibles sont 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14.
Puisque les deux 9 doivent être séparés de 9 positions, on doit les placer dans les positions 5 et 14. On a donc :
(__, __, 1, __, 9, __, __, __, __, 8, 6, 4, 2, 9, 2, 4, 6, 8)

Le 1 qui reste doit être placé dans la position 2 ou 4. Si on le place dans la position 2, les deux 7 doivent être placés dans les positions 1 et 8, ce qui donne :
(7, 1, 1, __, 9, __, __, 7, __, 8, 6, 4, 2, 9, 2, 4, 6, 8)
Or, si on place les deux 5, on ne peut plus placer les deux 3. De même, si on place les deux 3, on ne peut plus placer les deux 5.
Le 1 doit donc être placé dans la position 4, ce qui donne :
(__, __, 1, 1, 9, __, __, __, __, 8, 6, 4, 2, 9, 2, 4, 6, 8)
Il reste à placer les nombres 3, 3, 5, 5, 7, 7 dans les positions 1, 2, 6, 7, 8, 9.
On doit placer les deux 3 dans les positions 6 et 9, puis les deux 7 dans les positions 1 et 8, puis les deux 5 dans les positions 2 et 7.
La seule suite de Skolem d'ordre 9 qui vérifie les trois conditions est :

(7, 5, 1, 1, 9, 3, 5, 7, 3, 8, 6, 4, 2, 9, 2, 4, 6, 8)

c) *Solution 1*

Supposons qu'il existe une suite de Skolem d'ordre n, n étant un nombre de la forme $4k+2$ ou $4k+3$. (On traite les deux cas simultanément.)
Soit P_1 la position du premier 1 de la suite. La position du deuxième 1 est donc P_1+1.
De même, soit P_2, P_3, …, P_n la position respective du premier 2, du premier 3, …, du premier n. La position respective du deuxième nombre correspondant est donc P_2+2, P_3+3, …, P_n+n.
Or, les nombres P_1, P_2, P_3, …, P_n, P_1+1, P_2+2, P_3+3, …, P_n+n sont un arrangement des numéros de toutes les positions, c'est-à-dire des nombres 1, 2, …, $2n$.

$$P_1+P_2+\ldots+P_n+(P_1+1)+(P_2+2)+\ldots+(P_n+n)=1+2+\ldots+2n$$

$$2(P_1+P_2+\ldots+P_n)+(1+2+\ldots+n)=1+2+..+2n$$

Donc :

$$2(P_1+P_2+\ldots+P_n)+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{2n(2n+1)}{2}$$

$$2(P_1+P_2+\ldots+P_n)+\frac{n(n+1)}{2}=n(2n+1) \qquad (**)$$

Remarque : On a utilisé deux fois l'identité $1+2+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

On examine maintenant la parité dans l'égalité (**) pour chacun des deux cas qui nous concernent.

Si $n=4k+2$, alors $\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{(4k+2)(4k+3)}{2}$, ou $\dfrac{n(n+1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$, ce qui est le produit de deux entiers impairs. Ce produit est donc impair. De plus, on a $n(2n+1)=(4k+2)(8k+5)$, ce qui est le produit d'un entier pair et d'un entier impair. Ce produit est donc pair.
L'égalité (**) a donc la forme (nombre pair) + (nombre impair) = (nombre pair), ce qui est une contradiction.

Si $n=4k+3$, alors $\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{(4k+3)(4k+4)}{2}$, ou $\dfrac{n(n+1)}{2}=(4k+3)(2k+2)$, ce qui est le produit d'un entier impair et d'un entier pair. Ce produit est donc pair. De plus, on a $n(2n+1)=(4k+3)(8k+7)$, ce qui est le produit de deux entiers impairs. Ce produit est donc impair.
L'égalité (**) a donc la forme (nombre pair) + (nombre pair) = (nombre impair), ce qui est une contradiction.

Dans les deux cas, on obtient une contradiction. Il n'existe donc aucune suite de Skolem d'ordre n si n est un nombre de la forme $4k+2$ ou $4k+3$, k étant un entier non négatif.

Solution 2

Supposons qu'il existe une suite de Skolem d'ordre *n*, *n* étant un nombre de la forme $4k+2$ ou $4k+3$.

Soit *l* un entier de 1 à *n*.

Si *l* est pair, alors les positions des deux *l* diffèrent d'un nombre pair, soit *l*. Les deux positions ont donc chacune un numéro pair ou chacune un numéro impair.

Si *l* est impair, alors les positions des deux *l* diffèrent d'un nombre impair, soit *l*. Une des positions a donc un numéro pair et l'autre, un numéro impair.

1^er^ cas : $n = 4k+2$

De 1 à *n*, il y a $2k+1$ nombres pairs, soit 2, 4, …, $4k+2$, et $2k+1$ nombres impairs, soit 1, 3, …, $4k+1$.

Les numéros de position dans une suite de Skolem d'ordre $n = 4k+2$ sont les entiers 1, 2, …, $8k+4$. Il y a donc $4k+2$ numéros de position pairs et $4k+2$ numéros de position impairs.

Or, selon ce qui précède, les $2k+1$ nombres impairs de la suite donnent $2k+1$ numéros de position impairs et $2k+1$ numéros de position pairs, c'est-à-dire un nombre impair de numéros de position impairs et un nombre impair de numéros de position pairs.

Chaque nombre pair de la suite contribue deux numéros de position impairs ou deux numéros de position pairs. En d'autres mots, les nombres pairs de la suite contribuent un nombre pair de numéros de position impairs.

Le nombre total de numéros de position impairs est égal à la somme d'un nombre impair et d'un nombre pair, ce qui en fait un nombre impair. On a donc une contradiction, car on sait qu'il y a $4k+2$ numéros de position impairs.

2^e^ cas : $n = 4k+3$

De 1 à *n*, il y a $2k+1$ nombres pairs, soit 2, 4, …, $4k+2$, et $2k+2$ nombres impairs, soit 1, 3, …, $4k+3$.

Les numéros de position dans une suite de Skolem d'ordre $n = 4k+3$ sont les entiers 1, 2, …, $8k+6$. Il y a donc $4k+3$ numéros de position pairs et $4k+3$ numéros de position impairs.

Or, selon les premières lignes de la solution, les $2k+2$ nombres impairs de la suite produisent $2k+2$ numéros de position impairs et $2k+2$ numéros de position pairs, c'est-à-dire un nombre pair de numéros de position impairs et un nombre pair de numéros de position pairs.

Chaque nombre pair de la suite contribue deux numéros de position impairs ou deux numéros de position impairs. En d'autres mots, tous les nombres pairs de la suite contribueront un nombre pair de numéros de position impairs.
Le nombre total de numéros de position impairs est donc la somme de deux nombres pairs, ce qui en fait un nombre pair. On a donc une contradiction, car on sait qu'il y a $4k+3$ numéros de position impairs.

Dans les deux cas, on a une contradiction. Il n'existe donc aucune suite de Skolem d'ordre n, si n est un nombre de la forme $4k+2$ or $4k+3$, k étant un entier non négatif.