Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

Le mercredi 14 avril 2004

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche

Comptables agréés

Avec la participation de :

Institut canadien des actuaires

Great West Life and London Life

Sybase Inc. (Waterloo)

*i*Anywhere Solutions

Durée : 2 heures et demie

L'utilisation de la calculatrice **est permise**, pourvu que celle-ci ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

N'ouvrez pas ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions valant 10 points chacune. Les parties de chaque question peuvent être de deux types. Les parties à **RÉPONSE COURTE** valent 2 points chacune (questions 1 à 2) ou 3 points chacune (questions 3 à 7). Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points pour la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES :

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci: .
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse**. Le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera accordée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT :

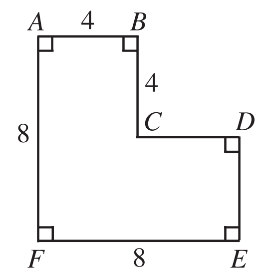
1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci: .
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse**. Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse.
3. Des points sont accordés pour de solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

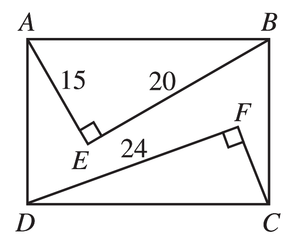
REMARQUES :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Une partie des points peut être accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. Sauf indication contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de valeurs exactes, telles que 4π, $2+\sqrt{7}$, etc.

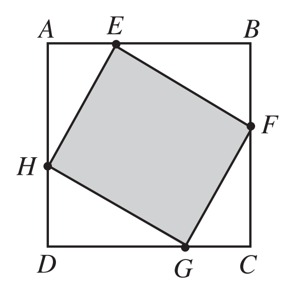
1. a) D'après la figure, quelle est l'aire de $ABCDEF$?



b) Dans la figure, $ABCD$ est un rectangle, où $AE = 15$, $EB = 20$ et $DF = 24$.
Quelle est la longueur CF?

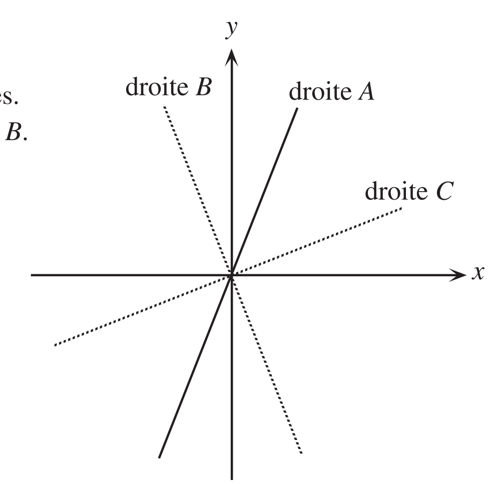


c) $ABCD$ est un carré dont les côtés ont une longueur de 6.
Les points E, F, G et H sont situés sur les côtés respectifs AB, BC, CD et DA, de manière que les rapports $AE:EB$, $BF:FC$, $CG:GD$ et $DH:HA$ égalent tous 1:2.
Déterminer l'aire de $EFGH$.

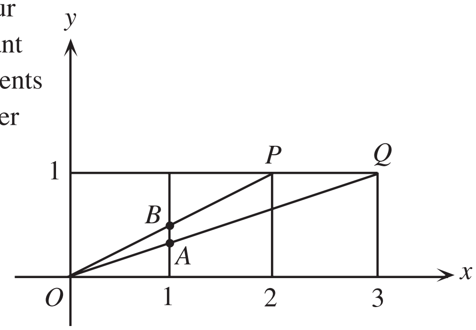


2. a) Une droite horizontale a la même ordonnée à l'origine que la droite d'équation $3x - y = 6$. Quelle est l'équation de la droite horizontale?

b) La droite A a pour équation $y = 2x$. La droite B est l'image de la droite A par une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées. La droite C est perpendiculaire à la droite B. Quelle est la pente de la droite C?



c) Trois carrés, dont les côtés ont une longueur de 1, sont placés côte à côte dans le quadrant I comme dans la figure. On trace des segments de l'origine O aux points P et Q. Déterminer la longueur AB.



3. a) Dans une suite arithmétique de cinq termes, la somme des deux premiers termes est égale à 2 et la somme des deux derniers termes est égale à –18. Quel est le troisième terme de la suite? (Une *suite arithmétique* est une suite dont chaque terme est obtenu en additionnant une constante au terme précédent. Par exemple, 3, 5, 7, 9, 11 est une suite arithmétique de cinq termes.)

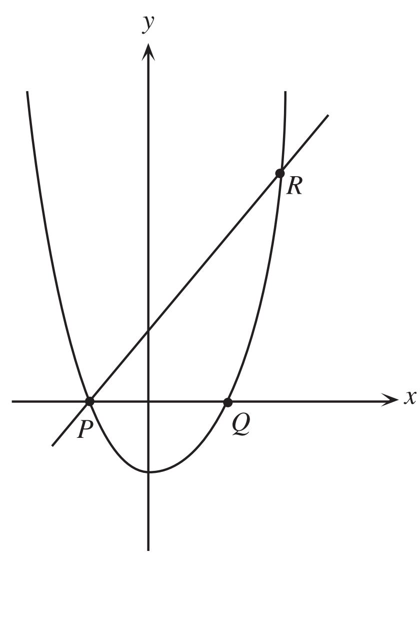
b) Sachant que $x - y = 4\sqrt{2}$ et $xy = 56$, déterminer les deux valeurs possibles de $x + y$.

4. a) On jète deux dés justes, ayant chacun six faces numérotées de 1 à 6. Quelle est la probabilité pour que le *produit* des deux nombres sur la face supérieure des dés soit divisible par 5?

b) Soit $f(x) = x^2 - x + 2$, $g(x) = ax + b$ et $f\big(g(x)\big) = 9x^2 - 3x + 2$. Déterminer tous les couples (a, b) qui vérifient ces conditions.

5. a) Soit $16^x = 2^{x+5} - 2^{x+4}$. Quelle est la valeur de x?

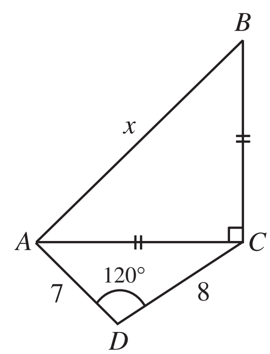
b) La parabole d'équation $y = x^2 + tx - 2$ coupe l'axe des abscisses aux points P et Q.
La droite d'équation $y = 3x + 3$ coupe la parabole aux points P et R.
Déterminer la valeur de t, ainsi que l'aire du triangle PQR.



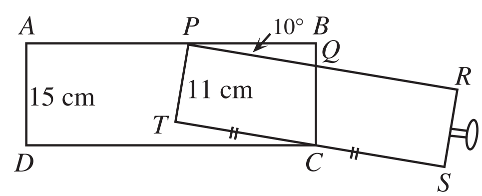
6. a) Laure a une pièce de 1 $, trois pièces de 25 ¢, trois pièces de 10 ¢, trois pièces de 5 ¢ et cinq pièces de 1 ¢. Elle veut acheter un petit hélicoptère qui coûte 1,34 $. Quel est le plus grand nombre de pièces de monnaie qu'elle peut utiliser pour faire l'achat? (Une pièce de 25 ¢ vaut 0,25 $, une pièce de 10 ¢ vaut 0,10 $, une pièce de 5 ¢ vaut 0,05 $ et une pièce de 1 ¢ vaut 0,01 $.)

b) Une image numérique est formée d'un très grand nombre de points appelés *pixels*.
La *résolution* d'une image est le nombre de pixels par centimètre, à l'horizontale et à la verticale.
Une image mesurant 10 cm sur 15 cm et ayant une résolution de 75 pixels/cm est donc formée de $(10\times 75)\times(15\times 75)$ ou $843\,750$ pixels.
Si on augmente chacune de ses dimensions de n % et si la résolution est diminuée de n %, l'image sera formée de 345 600 pixels.
Déterminer la valeur de n.

7. a) Dans la figure, $AC = BC$, $AD = 7$, $DC = 8$ et $\angle ADC = 120^\circ$. Quelle est la valeur de x?



b) La figure représente une vue de côté d'un tiroir $PRST$ partiellement emboîté dans un cadre $ABCD$. Le tiroir a une hauteur de 11 cm, tandis que le cadre a une hauteur de 15 cm. Le tiroir a été glissé jusqu'à ce que le milieu de sa base soit au point C. Le tiroir est penché de manière que le point P touche le haut du cadre. L'angle entre le haut du tiroir et le haut du cadre mesure 10°. Déterminer la longueur du tiroir, au dixième de centimètre près.



8. a) Soit $T = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$. Déterminer les valeurs de b et de c pour lesquelles $x^6 + \dfrac{1}{x^6} = T^3 + bT + c$ pour toutes les valeurs réelles non nulles de x.

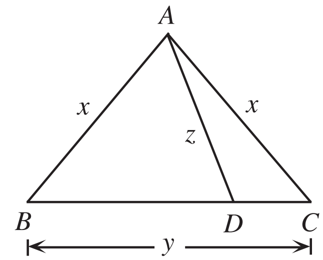
b) Soit x un nombre réel qui vérifie l'équation $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = 2\sqrt{5}$. Déterminer la valeur exacte de $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

9. Un *triplet de Kirk* est un triplet (x, y, z) d'entiers tel que :

i $x > z$,

ii z est un nombre premier et

iii il existe un triangle ABC où $AB = AC = x$ et $BC = y$, ainsi qu'un point D sur BC de manière que $AD = z$ et $\angle ADB = 60°$.



a) Déterminer le triplet de Kirk pour lequel $x = 7$ et $z = 5$.

b) Déterminer tous les autres triplets de Kirk pour lesquels $z = 5$.

c) Déterminer le triplet de Kirk pour lequel la valeur de $\cos(\angle ABC)$ est le plus rapprochée possible de 0,99.

10. Une *suite de Skolem* d'ordre n est une suite $(s_1, s_2, ..., s_{2n})$ de $2n$ entiers qui vérifie les conditions suivantes :

i pour chaque k dans l'ensemble $\{1, 2, 3, ..., n\}$, il y a exactement deux termes, s_i et s_j, pour lesquels $s_i = s_j = k$ et

ii si $s_i = s_j = k$ $(i < j)$, alors $j - i = k$.

Par exemple, $(4, 2, 3, 2, 4, 3, 1, 1)$ est une suite de Skolem d'ordre 4.

a) Écrire toutes les suites de Skolem d'ordre 4.

b) Déterminer toutes les suites de Skolem d'ordre 9 qui vérifient les trois conditions suivantes :

I $s_3 = 1$,

II $s_{18} = 8$,

III entre n'importe quels deux termes pairs égaux, il y a exactement un terme impair.

c) Démontrer qu'il n'existe aucune suite de Skolem d'ordre n si n est un nombre de la forme $4k + 2$ ou $4k + 3$, k étant un entier non négatif.

PUBLICATIONS

Les étudiants et les parents qui estiment que la résolution de problèmes constitue un divertissement et un loisir se réjouiront de pouvoir consulter les publications suivantes. Il s'agit d'excellentes ressources documentaires axées sur l'enrichissement, le développement des capacités à résoudre des problèmes et la préparation en vue des concours de mathématiques.

Exemplaires des Concours canadiens de mathématiques des années antérieures
Des exemplaires des concours antérieurs et des solutions, aussi bien en français qu'en anglais, sont disponibles gratuitement sur note site web http://www.cemc.uwaterloo.ca

Livres «Problems Problems Problems»
Chaque volume est une ensemble de problèmes à choix multiple ou à solution complète. Les problèmes sont regroupés selon les sujets, avec 9 sujets ou plus par volume. Les problèmes sont choisis à partir des concours des années précédentes offerts par le Concours canadien de mathématiques et des solutions complètes sont fournies pour chaque problème. Chaque volume coûte 15,00 $. **Le Volume 1 est disponible en français et en anglais. Les Volumes 2-9 sont disponibles en anglais seulement.**

Volume 1
- **(Disponible en français)**
- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets
- pour les élèves de 9e, 10e et 11e année (Sec. III, IV et V)

Volume 2
- plus de 325 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets (différents de ceux du volume 1)
- pour les élèves de 9e, 10e et 11e année (Sec. III, IV et V)

Volume 3
- plus de 235 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)

Volume 4
- plus de 325 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves de 7e, 8e et 9e année (Sec. I, II et III)

Volume 5
- plus de 200 problèmes avec solutions complètes
- 9 sujets (différents de ceux du volume 3)
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)

Volume 6
- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 11 sujets (différents de ceux du vol. 4)
- pour les élèves de 7e, 8e et 9e année (Sec. I, II et III)

Volume 7
- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves de 9e et 10e année (Sec. III et IV)

Volume 8
- plus de 200 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)

Volume 9
- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 11 sujets
- pour les élèves de 7e et 8e année (Sec. I et II)

Faire passer les commandes au : Concours canadien de mathématiques
Faculté de mathématiques, pièce MC 5181
Université de Waterloo
Waterloo (Ontario) N2L 3G1

Veuillez inscrire votre nom, votre adresse (et votre code postal) ainsi que votre numéro de téléphone.
Établir les chèques ou les mandats à l'ordre du «Centre for Education in Mathematics and Computing». Pour les commandes effectuées au Canada, veuillez ajouter 3 $ pour le premier article afin d'acquitter les frais de port et de manutention et 1 $ pour chaque article additionnel. Aucune taxe de vente provinciale ne s'applique, mais il faut ajouter la TPS de 7 p. 100. Pour les commandes ***de l'extérieur du Canada SEULEMENT***, veuillez ajouter 10 $ pour le premier article afin d'acquitter les frais de port et de manutention et 2 $ pour chaque article additionnel. **Les prix de ces publications demeureront en vigueur jusqu'en 1 septembre 2004.**