Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre
en mathématiques et en
Université de Waterloo, Waterloo,

# 2004 Solutions
# Concours Cayley (10<sup>e</sup> – année)

(Secondaire IV au Québec)

pour les prix du

**The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING**

# *Solutions du Concours Cayley 2004*

1. On a : $2^2+1^2+0^2+(-1)^2+(-2)^2=4+1+0+1+4$
$=10$

RÉPONSE : (E)

2. 25 % de 2004, c'est $\frac{1}{4}$ de 2004, ou 501.
50 % de 4008, c'est $\frac{1}{2}$ de 4008, ou 2004.
50 % de 1002, c'est $\frac{1}{2}$ de 1002, ou 501.
100 % de 1002, c'est 1002.
10 % de 8016, c'est $\frac{1}{10}$ de 8016, ou 801,6.
20 % de 3006, c'est $\frac{1}{5}$ de 3006, ou 601,2.

RÉPONSE : (B

3. Pour aller de $A$ à $B$, il faut bouger de 3 unités vers le haut et de 2 unités vers la droite. Puisque $B$ est le milieu de $AC$, alors pour aller de $B$ à $C$, il faut aussi bouger de 3 unités vers le haut et de 2 unités vers la droite. Les coordonnées de $C$ sont donc $(5,7)$.

RÉPONSE : (E)

4. On simplifie l'équation $x+1-2+3-4=5-6+7-8$, ce qui donne $x-2=-2$. Donc $x=0$.

RÉPONSE : (C)

5. La 1re figure a un périmètre extérieur de 4. La 2e figure a un périmètre extérieur de 8. La 3e figure a un périmètre extérieur de 12. D'une figure à la suivante, on voit que le périmètre extérieur augmente de 4. Le périmètre extérieur de la 5e figure sera donc 8 de plus que celui de la 3e figure. Il sera égal à 20. (On aurait pu dessiner la 5e figure, formée de 9 petits carrés.)

RÉPONSE : (C)

6. Par la mise en évidence d'un facteur commun, on a : $7x+42y=7(x+6y)$
$=7(17)$
$=119$

RÉPONSE : (E)

7. *Solution 1*
$3^2+3^2+3^2=3\times 3^2$
$=3^3$
Donc $a=3$.

*Solution 2*

$$3^2 + 3^2 + 3^2 = 9 + 9 + 9$$
$$= 27$$

Donc $3^a = 27$, d'où $a = 3$.

RÉPONSE : (B)

8. La circonférence d'un cercle est égale à $\pi d$, $d$ étant le diamètre du cercle.
Puisque le cercle extérieur a une circonférence de $24\pi$, il a un diamètre de 24 et un rayon de 12. Donc $OB = 12$.
Puisque le cercle intérieur a une circonférence de $14\pi$, il a un diamètre de 14 et un rayon de 7. Donc $OA = 7$.
Puisque $AB = OB - OA$, alors $AB = 5$.

RÉPONSE : (B)

9. Puisque le triangle $BCD$ est rectangle, $BC$ est égal à $\sqrt{16^2 + 30^2}$ m, c.-à-d. à $\sqrt{1156}$ m ou 34 m.
Pour déterminer $AC$, on forme un triangle rectangle en traçant une ligne horizontale au point $A$. Le triangle a un côté horizontal d'une longueur de 16 m et un côté vertical d'une longueur de 12 m, soit la différence entre la longueur des tours. Donc $AC$ est égal à $\sqrt{16^2 + 12^2}$ m, c.-à-d. à $\sqrt{400}$ m ou 20 m.
La longueur totale des cordes est de 54 m.

RÉPONSE : (A)

10. Lorsqu'on replie, les faces H et I ont une arête en commun. À une extrémité de cette arête, la face G a un sommet commun aux faces H et I. À l'autre extrémité de l'arête, la face J a un sommet commun aux faces H et I.
Donc, la face J est opposée à la face G.

RÉPONSE : (D)

11. Puisque chaque terme, après le deuxième, est le produit des deux termes précédents, alors 18 est le produit de 3 et du nombre dans la 4^e^ position. Le nombre dans la 4^e^ position est donc égal à 6.
La suite est donc $x$, ____, 3, 6, 18.
D'après la règle, 6 est le produit du nombre dans la 2^e^ position et de 3. Le nombre dans la 2^e^ position est donc égal à 2. La suite est donc $x$, 2, 3, 6, 18.
D'après la règle, on a $2x = 3$, d'où $x = \frac{3}{2}$.

RÉPONSE : (B)

12. La somme des nombres de la première ligne est égale à $2x+5$. Donc, la somme des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale est égale à $2x+5$.
Dans la 1^re^ colonne, le 2^e^ nombre doit donc être égal à 5.
Dans la 2^e^ ligne, le deuxième nombre doit donc être égal à $2x+3$.
Dans la 2^e^ colonne, on a donc : $$\begin{aligned} 3+(2x+3)+x &= 2x+5 \\ 3x+6 &= 2x+5 \\ x &= -1 \end{aligned}$$
La somme des nombres d'une ligne est donc égale à $2(-1)+5$, ou 3.

Réponse : (C)

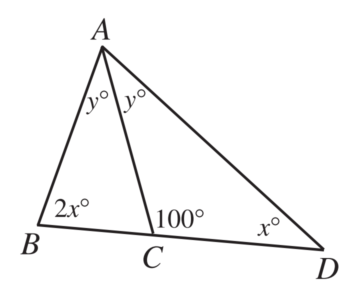
13. Puisque le petit carré a un périmètre de 72 cm, ses côtés mesurent $\frac{1}{4}(72)$ cm, ou 18 cm.
Le petit carré a donc une aire de $18^2$ cm$^2$, ou 324 cm$^2$.
L'aire du grand carré est égale à la somme de l'aire du petit carré et de l'aire de la partie ombrée. Elle est donc égale à 160 cm$^2$ + 324 cm$^2$, ou 484 cm$^2$.
Les côtés du grand carré mesurent donc $\sqrt{484}$ cm, ou 22 cm. Le périmètre du grand carré est donc égal à 4(22) cm ou 88 cm.

Réponse : (B)

14. La moyenne de 4, 20 et $x$ est égale à $\frac{4+20+x}{3}$. La moyenne de $y$ et 16 est égale à $\frac{16+y}{2}$.
Puisque ces moyennes sont égales, alors : $$\begin{aligned} \frac{4+20+x}{3} &= \frac{16+y}{2} \\ 2(4+20+x) &= 3(16+y) \\ 48+2x &= 48+3y \\ 2x &= 3y \\ \frac{x}{y} &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Réponse : (A)

15. Dans le triangle $ACD$, on a $x^\circ + y^\circ + 100^\circ = 180^\circ$, d'où $x+y=80$.
Puisque les angles $ACB$ et $ACD$ sont supplémentaires et que $\angle ACD = 100^\circ$, alors $\angle ACB = 80^\circ$.
Dans le triangle $ACB$, on a donc $2x^\circ + y^\circ + 80^\circ = 180^\circ$, d'où $2x+y=100$.
On soustrait l'équation de l'équation, membre par membre, pour obtenir $x=20$.




Réponse : (E)

16. Lorsqu'on jette deux dés, le premier dé donne 6 résultats possibles et pour chacun de ces résultats, il y a 6 résultats possibles pour le deuxième dé. Il y a donc 36 résultats équiprobables en tout.
Les résultats qui donnent 3 points ou moins sont : 1 et 1, 1 et 2, 1 et 3, 2 et 1, 2 et 2, 2 et 3, 3 et 1, 3 et 2, 3 et 3. Donc 9 des 36 résultats possibles donnent 3 points ou moins. La probabilité d'obtenir 3 points ou moins est égale à $\frac{9}{36}$ ou $\frac{1}{4}$.

RÉPONSE : (A)

17. On additionne les fractions en utilisant le dénominateur commun $mn$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}+\frac{1}{n} &= \frac{5}{24} \\
\frac{n}{mn}+\frac{m}{mn} &= \frac{5}{24} \\
\frac{m+n}{mn} &= \frac{5}{24} \\
\frac{20}{mn} &= \frac{5}{24} \\
mn &= \frac{24\times 20}{5} \\
mn &= 96
\end{aligned}$$

RÉPONSE : (D)

18. Ce problème exige beaucoup de tâtonnements. On constate alors que la foumi peut parcourir un maximum de 9 arêtes, soit 108 cm, avant de devoir s'arrêter. (Par exemple, elle peut procéder de $A$ à $B$ à $F$ à $E$ à $A$ à $D$ à $C$ à $G$ à $H$ à $D$. À ce somment, elle ne peut plus continuer.)
La fourmi peut parcourir une distance maximale de 108 cm.

Pour justifier ce résultat, on peut faire appel à une branche fascinante des mathématiques appelée la théorie des graphes. (La théorie des graphes est issue des travaux du grand mathématicien suisse du 18^e^ siècle, Euler, alors qu'il résolvait le célèbre problème des 7 ponts de Königsberg.)
Supposons que la fourmi pouvait parcourir 10 arêtes. Sur chaque arête, il y a un départ d'un sommet et une arrivée à un autre sommet. Il y aurait donc un total de 20 départs et arrivées. Or le cube a 8 sommets et à chaque sommet, il y a 3 arêtes qui se rencontrent. À chaque sommet, il ne peut donc pas y avoir plus de 3 départs et arrivées.
Pour 20 départs et arrivées, il doit y avoir 4 sommets qui ont été utilisés 3 fois (2 départs et 1 arrivée ou 1 départ et 2 arrivées). Or seul le sommet initial peut faire l'objet de 2 départs et 1 arrivée et seul le dernier sommet visité peut faire l'objet de 1 départ et 2 arrivées. Il ne peut donc pas y avoir plus de 2 sommets qui ont été utilisés un nombre impair de fois.

La supposition est donc fausse et la fourmi ne peut parcourir 10 arêtes.
La fourmi peut parcourir une distance maximale de 108 cm.

RÉPONSE : (D)

19. Chaque fraction peut être réduite à $\frac{1}{2}$.
La somme est donc égale à 2004 fois $\frac{1}{2}$, ce qui est égal à 1002.

RÉPONSE : (A)

20. Soit $a$, $b$ et $c$ le nombre de points accordés dans les régions respectives $A$, $B$ et $C$.
Selon les résultats des trois archères, on a :
$c + a = 15$
$c + b = 18$
$b + a = 13$
On cherche la valeur de $2b$.
On additionne la 2ᵉ et la 3ᵉ équation, membre par membre, pour obtenir $a + 2b + c = 31$.
On reporte $c + a = 15$ dans cette équation, ce qui donne $2b + 15 = 31$, d'où $2b = 16$.
(On aurait pu déterminer la valeur de chaque inconnue, mais ce n'était pas nécessaire.)

RÉPONSE : (C)

21. Supposons que Lara utilise la dernière feuille bleue le jour numéro $n$.
Elle a donc utilisé $n$ feuilles bleues et $3n$ feuilles rouges.
Puisqu'il lui reste 15 feuilles rouges, le nombre initial de feuilles rouges est égal à $3n + 15$.
Puisque le rapport du nombre initial de feuilles bleues au nombre initial de feuilles rouges est égal à $2:7$, alors :

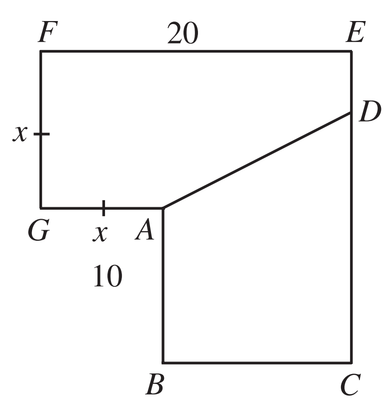
$$\frac{n}{3n+15} = \frac{2}{7}$$
$$7n = 6n + 30$$
$$n = 30$$

Au départ, il y avait donc 30 feuilles bleues et 105 feuilles rouges pour un total de 135 feuilles.

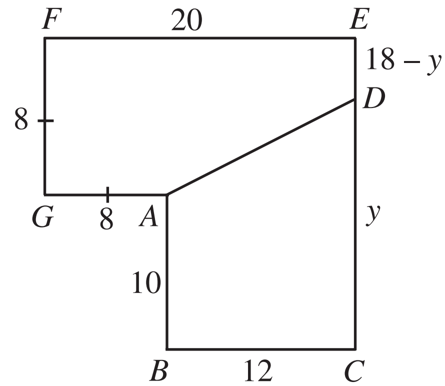
RÉPONSE : (C)

22. On détermine d'abord la longueur des côtés.
Soit $AG = x$. Donc $FG = x$.
L'aire de la salle, soit 280 m², est égale à l'aire d'un grand rectangle, mesurant 20 m sur $(10 + x)$ m, moins l'aire d'un petit rectangle mesurant $x$ m sur 10 m. Donc :

$$20(10 + x) - 10x = 280$$
$$10x + 200 = 280$$
$$x = 8$$



En partant du point $B$ et en allant dans le sens des aiguilles d'une montre, les côtés ont une longueur respective de 10 m, 8 m, 8 m, 20 m, 18 m et 12 m.
Soit $y = CD$.




$ABCD$ est un trapèze ayant pour bases $CD$ et $AB$. La haute ur est égale à $BC$, ou 12.
On veut que l'aire du trapèze soit la moitié de l'aire de la salle. On a donc :

$$\frac{1}{2}(12)(10+y) = 140$$
$$6(10+y) = 140$$
$$10 + y = \frac{70}{3}$$
$$y = \frac{40}{3}$$

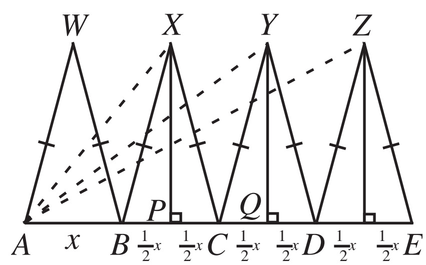
La distance de $C$ à $D$ est égale à $\frac{40}{3}$ m.

RÉPONSE : (E)

23. Le ballon roule vers Marcos à une vitesse de 4 m/s et celui-ci court en direction du ballon à une vitesse de 8 m/s. Marcos se rapproche donc du ballon à une vitesse de 12 m /s. Puisqu'il est à 30 m du ballon, au départ, il mettra $\frac{30}{12}$ s, ou 2,5 s pour atteindre le ballon.
Le ballon s'éloigne de Michel à une vitesse de 4 m/s, mais Michel court dans la direction du ballon à une vitesse de 9 m/s. Il gagne donc 5 m/s sur le ballon. Puisqu'il est à 15 m du ballon, au départ, il mettrait 3 s pour le rattraper si celui-ci continuait à rouler.
Marcos est donc le premier à toucher le ballon. Après 2,5 s, Michel a gagné $2{,}5 \times 5$ m ou 12,5 m sur le ballon. Au moment où Marcos touche le ballon, Michel est à 2,5 m de Marcos.

RÉPONSE : (C)

24. On détermine d'abord la longueur des côtés du nouveau triangle en fonction de $x$.
On trace les hauteurs $XP$, $YQ$ et $ZR$. Puisque les triangles sont isocèles, on a $BP = PC = CQ = QD = DR = RE = \frac{1}{2}x$.




Le triangle $ARZ$ est rectangle en $R$. On a $AZ = AE = 4x$. Selon le théorème de Pythagore :

$$AR^2 + RZ^2 = AZ^2$$
$$RZ^2 = (4x)^2 - \left(\frac{7}{2}x\right)^2$$
$$RZ^2 = \frac{15}{4}x^2$$

Le carré de la hauteur de chaque triangle est égal à $\frac{15}{4}x^2$.

Donc : $AY^2 = AQ^2 + QY^2$ et $AX^2 = AP^2 + PX^2$

$$\begin{aligned} &= \left(\tfrac{5}{2}x\right)^2 + \tfrac{15}{4}x^2 && = \left(\tfrac{3}{2}x\right)^2 + \tfrac{15}{4}x^2 \\ &= 10x^2 && = 6x^2 \\ AY &= \sqrt{10}x & AX &= \sqrt{6}x \end{aligned}$$

Les côtés du nouveau triangle ont pour longueur respective $\sqrt{6}x$, $\sqrt{10}x$ et $4x$.

Puisque $\left(\sqrt{6}x\right)^2 + \left(\sqrt{10}x\right)^2 = (4x)^2$, le nouveau triangle est rectangle. L'hypoténuse a pour longueur $4x$. L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}x\right)\left(\sqrt{10}x\right)$, c.-à-d. à $\frac{1}{2}\sqrt{60}x^2$ ou $\sqrt{15}x^2$.

On veut que cette aire soit inférieure à 2004. On a donc $\sqrt{15}x^2 < 2004$ d'où $x < \sqrt{\dfrac{2004}{\sqrt{15}}}$ ou $x < 22{,}747$. La plus grande valeur entière de $x$ pour laquelle l'aire est inférieure à 2004 est 22.

RÉPONSE : (E)

25. On récrit chaque expression de manière à montrer un numérateur commun.

$$\frac{7x+1}{2} = \frac{2+(7x-1)}{2} = 1 + \frac{7x-1}{2} \qquad \frac{7x+2}{3} = \frac{3+(7x-1)}{3} = 1 + \frac{7x-1}{3} \qquad \cdots$$

$$\frac{7x+300}{301} = \frac{301+(7x-1)}{301} = 1 + \frac{7x-1}{301}$$

Dans chaque cas, l'expression rationnelle initiale sera réduite à sa plus simple expression si la nouvelle expression rationnelle l'est aussi. Par exemple, $\dfrac{7x+1}{2}$ est réduite à sa plus simple expression si $\dfrac{7x-1}{2}$ est réduite à sa plus simple expression.

On cherche donc le nombre de valeurs entières de $x$, de 1 à 60, pour lesquelles chacune des expressions rationnelles $\dfrac{7x-1}{2}$, $\dfrac{7x-1}{3}$, …, $\dfrac{7x-1}{301}$ est réduite à sa plus simple expression.

On cherche donc le nombre de valeurs entières de $x$, de 1 à 60, pour lesquelles la valeur de $7x-1$ n'admet aucune diviseur commun avec les entiers de 2 à 301.

Pour les valeurs de $x$ de 1 à 43, l'expression $7x-1$ aura des valeurs entières positives inférieures ou égales à 301. Il y aura donc des diviseurs communs.

On considère donc les valeurs de $x$ de 44 à 60.

Si $x$ a une valeur impaire, alors $7x-1$ prend une valeur paire. Il y a donc un diviseur commun, 2.

Il suffit donc de considérer les entiers 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58 et 60 comme valeurs de $x$.

Les valeurs correspondantes de $7x-1$ sont 307, 321, 335, 349, 363, 377, 391, 405 et 419. On cherche les valeurs qui n'admettent aucun diviseur commun avec les entiers positifs de 2 à 301.

On peut éliminer les nombres 321, 363 et 405 qui sont divisibles par 3. On peut aussi éliminer le nombre 335 qui est divisible par 5. Il reste les nombres 307, 349, 377, 391 et 419.
307 est un nombre premier.
349 est un nombre premier.
377 est divisible par 13. On peut l'éliminer.
391 est divisible par 17, On peut l'éliminer.
419 est un nombre premier.
Un nombre premier n'est divisible que par 1 et par lui-même. Les nombres 307, 349 et 419 n'admettent donc aucun diviseur commun avec les entiers de 2 à 301.

Il y a donc trois valeurs entières de $x$, de 1 à 60, pour lesquelles chacune des expressions rationnelles est une fraction réduite à sa plus simple expression.

RÉPONSE : (C)