Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre en mathématiques et en Université de Waterloo, Waterloo,

2003 Solutions
Concours Pascal (9e – année)

(Secondaire III au Québec)

pour les prix du

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

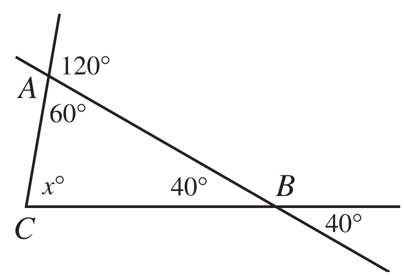
1. On calcule : $\sqrt{169}-\sqrt{25}$ est égal à $13-5$, ou 8. RÉPONSE : (A)

2. On voit la régularité : pour passer d'un terme au suivant, on multiplie par 3. (On voit que $3\times 2=6$, $3\times 6=18$, etc.) Le terme manquant est donc 3×54, ou 162. (On peut vérifier en confirmant que $3\times 162=486$.)
[L'expression « suite géométrique » signifie que chaque terme est obtenu en multipliant le terme précédent par un même nombre. On pouvait répondre sans en connaître le sens.]
RÉPONSE : (D)

3. On utilise la priorité des opérations.
$\frac{6+6\times 3-3}{3}$ est égal à $\frac{6+18-3}{3}$, c'est-à-dire à $\frac{21}{3}$, ou 7. RÉPONSE : (B)

4. Soit A, B et C les points indiqués dans le diagramme.
Puisqu'on a deux angles opposés par le sommet, $\angle ABC = 40^\circ$.
Puisque l'angle CAB est le supplément d'un angle de 120°, alors $\angle CAB = 60^\circ$. Dans le triangle ABC :

$$x^\circ + 60^\circ + 40^\circ = 180^\circ$$
$$x = 80$$



RÉPONSE : (E)

5. *Solution 1*
D'après les lois des exposants :

$$\frac{2^8}{8^2} = \frac{2^8}{\left(2^3\right)^2} = \frac{2^8}{2^6} = 2^2 = 4$$

Solution 2
En calculant :

$$\frac{2^8}{8^2} = \frac{256}{64} = 4$$

RÉPONSE : (C)

6. On évalue chacun des choix :

(A) $\frac{6^2}{10} = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}$ (B) $\frac{1}{5}[6(3)] = \frac{1}{5}[18] = \frac{18}{5}$ (C) $\frac{18+1}{5+1} = \frac{19}{6} \neq \frac{18}{5}$

(D) $3{,}6 = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}$ (E) $\sqrt{\frac{324}{25}} = \sqrt{\frac{18^2}{5^2}} = \frac{18}{5}$

Seul le choix (C) n'est pas égal à $\frac{18}{5}$. RÉPONSE : (C)

7. On peut déterminer la valeur de F au bas du diagramme. D'après la définition, on a $F-7=3$ ou $7-F=3$. Puisque F doit égaler un des nombres 1, 2, 4, 5, 6 et 8, alors $F=4$, ce qui donne :

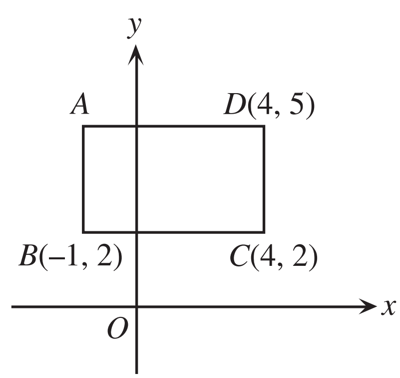
$$\begin{array}{ccccccc} A & & 10 & & B & & C \\ & D & & 9 & & E & \\ & & 7 & & 4 & & \\ & & & 3 & & & \end{array}$$

De même, on obtient $E=5$ et $D=2$, ce qui donne :

$$\begin{array}{ccccccc} A & & 10 & & B & & C \\ & 2 & & 9 & & 5 & \\ & & 7 & & 4 & & \\ & & & 3 & & & \end{array}$$

On obtient alors $A=8$, $B=1$ et $C=6$. (On remarque que chacun des six nombres donnés est utilisé une fois.) Donc, $A+C=14$. RÉPONSE : (E)

8. Puisque les côtés du rectangle sont parallèles aux axes, on peut déterminer les longueurs des côtés à partir des coordonnées.
La longueur BC est égale à la différence des abscisses, soit $4-(-1)$, ou 5.
La longueur DC est égale à la différence des ordonnées, soit $5-2$, ou 3.
L'aire du rectangle est égale à 3×5, ou 15.



RÉPONSE : (A)

9. Chaque nombre premier, après 2, est impair. Pour qu'un nombre premier soit la somme de deux nombres premiers, il doit être la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair. Le nombre en question doit donc être la somme de 2 et d'un nombre premier impair.
En ordre descendant, les nombres premier inférieurs à 30 sont 29, 23, 19, 17, 13, 11, 7, 5, 3 et 2. Le plus grand de ces nombres qui est la somme de 2 et d'un autre nombre premier est 19. RÉPONSE : (C)

10. On écrit chaque nombre sous forme développée à huit décimales près.
(A) $3{,}2571 = 3{,}25710000...$
(B) $3{,}\overline{2571} = 3{,}25712571...$
(C) $3{,}2\overline{571} = 3{,}25715715...$
(D) $3{,}25\overline{71} = 3{,}25717171...$

(E) $3{,}257\bar{1} = 3{,}25711111...$

Ces cinq nombres sont identiques pour les quatre premières décimales. Chacun a une cinquième décimale distincte. Le nombre $3{,}25\overline{71}$ est le plus grand. RÉPONSE : (D)

11. Puisque $x = 2$ et $y = -3$ vérifient l'équation, on a :

$$\begin{aligned} 2(2)^2 + k(2)(-3) &= 4 \\ 8 - 6k &= 4 \\ 4 &= 6k \\ k &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

RÉPONSE : (A)

12. D'après le premier taux, 1 calculatrice vaut 100 règles.

D'après le deuxième taux, 100 règles valent $\frac{100}{10}(30)$, ou 300 compas.

D'après le troisième taux, 300 compas valent $\frac{300}{25}(50)$, ou 600 rapporteurs.

Il faut donc 600 rapporteurs pour obtenir une calculatrice. RÉPONSE : (B)

13. Si on examine le bloc de 4 carrés, formé par les deux premiers carrés des deux premières rangées, on voit qu'il faut au moins 4 couleurs, car les carrés ont un côté ou un sommet commun. Peut-on continuer avec ces 4 mêmes couleurs? On peut le faire en prenant ce bloc de 4 carrés et en le faisant glisser dans le diagramme. (Dans le diagramme, chaque couleur est représentée par un numéro.) On constate que 4 couleurs sont suffisantes.

1	2	1	2	1
3	4	3	4	3
1	2	1	2	1

Qu'arriverait-il si le diagramme était plus grand que 3 sur 5? Aurait-on besoin de plus de 4 couleurs? Ce problème est relié au célèbre problème des 4 couleurs. Une recherche sur Internet vous en dira davantage.

RÉPONSE : (B)

14. *Solution 1*

Puisque x et y sont des entiers strictement positifs dont la somme est 5, on peut former un tableau des possibilités :

x	y	$2x - y$
1	4	–2
2	3	1
3	2	4
4	1	7

Parmi les choix donnés, seul –2 est une valeur possible.

Solution 2

On peut récrire l'expression $2x - y$ sous les formes suivantes : $3x - x - y$, $3x - (x + y)$, $3x - 5$.

Parmi les cinq choix, le seul qui est 5 de moins qu'un multiple de 3 est –2.

RÉPONSE : (D)

15. *Solution 1*

On peut obtenir l'aire du carré *KLMN* en soustrayant l'aire des triangles *KAN*, *NDM*, *MCL* et *LBK* de l'aire du carré *ABCD*.

On remarque que le carré *ABCD* a des côtés de longueur 6 et que chacun des triangles est rectangle avec une cathète de longueur 2 et l'autre de longueur 4. (Dans un triangle rectangle, une cathète est un côté autre que l'hypoténuse.)

L'aire du carré *KLMN* est égale à $6^2 - 4\left[\frac{1}{2}(2)(4)\right]$, c'est-à-dire à $36 - 4[4]$, ou 20 unités carrées.

Solution 2

Puisque *KLMN* est un carré, son aire est le carré de la longueur d'un de ses côtés. Donc l'aire est égale à NM^2.

Puisque le triangle *DNM* est rectangle, on peut déterminer NM^2 à partir du théorème de Pythagore :

$$NM^2 = ND^2 + DM^2$$
$$NM^2 = 2^2 + 4^2$$
$$NM^2 = 20$$

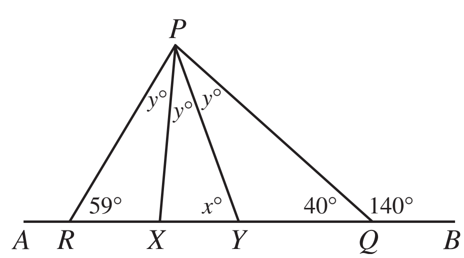
Donc l'aire du carré est égale à 20 unités carrées.

RÉPONSE : (D)

16. Puisque n peut représenter n'importe quel entier, posons $n = 0$. Les cinq autres entiers sont alors 3, -9, -4, 6 et -1. Si on les place en ordre croissant, on obtient -9, -4, -1, 3 et 6. Le nombre du milieu est -1, qui est une valeur particulière de $n - 1$.

RÉPONSE : (E)

17. On nomme certains sommets comme dans le diagramme.



On a alors $\angle PQR = 180^\circ - \angle PQB$, d'où $\angle PQR = 40^\circ$.

Dans le triangle PQR :

$$59^\circ + 3y^\circ + 40^\circ = 180^\circ$$
$$3y = 81$$
$$y = 27$$

Dans le triangle PRY :

$$59^\circ + 2y^\circ + x^\circ = 180^\circ$$
$$x = 180 - 59 - 2(27)$$
$$x = 67$$

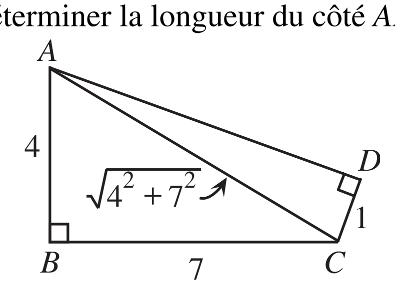
RÉPONSE : (A)

18. La moyenne d'une liste de nombres est égale à la somme des nombres divisée par le nombre d'éléments de la liste. Puisque n nombres on une moyenne de 7, leur somme est égale à $7n$.
Lorsqu'on ajoute le nombre -11 à la liste, on a alors $n+1$ nombres dont la somme est égale à $7n-11$. On a donc :

$$\frac{7n-11}{n+1} = 6$$
$$7n - 11 = 6n + 6$$
$$n = 17$$

RÉPONSE : (E)

19. On joint A et C, de manière à diviser le quadrilatère en deux triangles rectangles.
L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(4)(7)$, ou 14.
Pour calculer l'aire du triangle ADC, il faut d'abord déterminer la longueur du côté AD.
On utilise le théorème de Pythagore dans chacun des triangles :



$$AD^2 = AC^2 - DC^2$$
$$AD^2 = \left(AB^2 + BC^2\right) - 1^2$$
$$AD^2 = 7^2 + 4^2 - 1^2$$
$$AD^2 = 64$$
$$AD = 8$$

L'aire du triangle ADC est égale à $\frac{1}{2}(1)(8)$, ou 4.
L'aire du quadrilatère $ABCD$ est égale à la somme de l'aire des triangles. Elle est donc égale à $14+4$, ou 18.

RÉPONSE : (C)

20. *Solution 1*
Au lieu d'utiliser les chiffres 0, 2, 4, 6, 8, supposons que les Pairiens utilisent les chiffres 0, 1, 2, 3, 4 (chacun des chiffres précédents divisé par 2).
On voit alors que le système des Pairiens correspond à notre système de numération base 5, où tous les chiffres sont doublés.

On écrit le nombre 111 comme somme de puissances de 5 : $111 = 4\left(5^2\right) + 2\left(5^1\right) + 1\left(5^0\right)$.
Le nombre 111 est donc égal à 421_{cinq}. Les Pairiens doublent ces chiffres et écrivent donc 842 pour représenter le nombre 111.

Solution 2
Pour déterminer la façon dont les Pairiens écrivent le nombre 111, on cherche une régularité dans leurs nombres. Voici comment on écrit les 20 premiers nombres entiers positifs :

2, 4, 6, 8, 20, 22, 24, 26, 28, 40, 42, 44, 46, 48, 60, 62, 64, 66, 68, 80, …

On voit que le dernier chiffre suit un cycle de cinq chiffres (2, 4, 6, 8, 0). Le dernier chiffre du nombre 111 sera donc un 2.
Pour déterminer les autres chiffres, on doit poursuivre l'écriture des nombres. Voici comment on écrit les nombres de 20 à 30 :

80, 82, 84, 86, 88, 200, 202, 204, 206, 208, 220, …

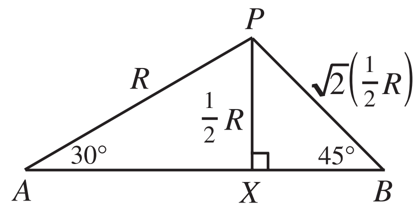
Les nombres de trois chiffres qui ont 2 comme premier chiffre verront les deux autres chiffres aller de 00 à 88. Après le nombre 288, on verra le nombre 400 et le cycle recommencera.
Combien les Pairiens ont-ils de nombres de trois chiffres qui commencent par 2? Puisque les nombres vont de 200 à 288, il y en a autant que pour les nombres de 00 à 88, soit 25 nombres, puisque 88 correspond à notre nombre 24.
Donc 200 représente notre nombre 25, 400 représente notre nombre 50, 600 représente notre nombre 75 et 800 représente notre nombre 100.
Pour passer de notre nombre 100 à notre nombre 111, on peut continuer à écrire chaque nombre à la façon des Pairiens ou encore utiliser le 11^e^ nombre de la première liste, 42 et le placer après le chiffre 8. Le nombre 111 s'écrit 842 à la façon des Pairiens.

RÉPONSE : (D)

21. Puisque chaque feu a le même cycle et que chaque feu devient rouge 10 secondes après le feu précédent, alors chaque feu devient vert 10 secondes après le feu précédent.
Supposons que le premier feu devient vert au temps 0 seconde. Quand le dernier feu devient-il vert?
Puisqu'il s'agit du 8^e^ feu, il deviendra vert 70 secondes (sept intervalles de 10 secondes) après le premier feu.
(Le premier feu deviendra jaune au temps 90 secondes et rouge au temps 93 secondes.
Tour à tour, chaque autre feu deviendra rouge, jusqu'au 8^e^ au temps 163 secondes. À ce temps-là, le premier feu sera encore rouge.)
L'intervalle de temps que l'on a décrit plus haut est donc le seul où tous les feux sont verts en même temps. Il dure 20 secondes.
(On remarque que la durée du feu jaune n'a aucun effet sur la situation.)

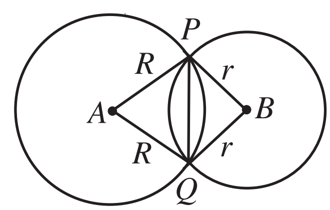
RÉPONSE : (C)

22. *Solution 1*



On trace le segment AB qui coupe PQ en X. On considère le triangle APB.
Par symétrie, $\angle PAB = 30^\circ$, $\angle PBA = 45^\circ$ et PX est perpendiculaire à AB. Soit R le rayon du cercle à gauche et r le rayon du cercle à droite.
Puisque $AP = R$ et que le triangle APX est un triangle 30°-60°-90°, alors $PX = \frac{1}{2}R$.
Puisque le triangle BPX est un triangle 45°-45°-90°, alors $PB = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}R\right)$.
Donc $r = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}R\right)$, ou $r^2 = \frac{1}{2}R^2$.
Puisque les cercles ont une aire respective de πR^2 et de πr^2, le rapport de l'aire du premier à l'aire du deuxième est égal à 2:1.

Solution 2



Soit R le rayon du cercle à gauche et r le rayon du cercle à droite. On trace la corde commune PQ. Puisque cette corde est commune, on tentera de déterminer sa longueur en fonction de R et en fonction de r, de manière à établir une relation entre ces inconnues.
On considère d'abord le triangle APQ. On a $AP = AQ = R$ et $\angle PAQ = 60°$. Le triangle APQ est donc isocèle avec un angle de 60°. Il est donc équilatéral. Donc $PQ = R$, ou $PQ^2 = R^2$.
On considère ensuite le triangle BPQ. On a $BP = BQ = r$ et $\angle PBQ = 90°$. D'après le théorème de Pythagore, $PQ^2 = r^2 + r^2$, ou $PQ^2 = 2r^2$.
On a donc $R^2 = 2r^2$, d'où $\pi R^2 = 2\left(\pi r^2\right)$.
Or l'expression du membre de gauche est l'aire du cercle de centre A et l'expression dans la parenthèse est l'aire du cercle de centre B. Le rapport de l'aire du cercle de centre A à l'aire du cercle de centre B est donc égal à 2:1. RÉPONSE : (D)

23. *Solution 1*

Supposons que l'escalier est deux fois plus long, reliant le premier étage au troisième, et que Jean et Josée partent en même temps. Jean atteindra le troisième étage au même moment où Josée atteindra le deuxième, car Josée prend deux fois plus de temps pour faire le même trajet. Pendant ce temps, Jean aura monté $2(29)$ des marches à pied, tandis que Josée en aura monté 11. À la fin de cet intervalle de temps, il y aura $2(29) - 11$, ou 47 marches entre eux.
Ces 47 marches représentent donc le nombre de marches entre deux étages.

Solution 2

Soit N le nombre de marches entre les deux étages.

En montant un étage, Jean monte 29 marches à pied. Il est donc transporté par l'escalier sur une longueur de $N-29$ marches.

En montant un étage, Josée monte 11 marches à pied. Elle est donc transportée par l'escalier sur une longueur de $N-11$ marches.

Puisque Josée prend deux fois plus de temps pour faire le même trajet, elle est transportée sur une longueur deux fois plus grande que celle de Jean. Donc :

$$N-11=2(N-29)$$
$$N-11=2N-58$$
$$N=47$$

Il y a donc 47 marches entre deux étages.

RÉPONSE : (A)

24. *Solution 1*

On suppose que l'artiste utilise des carrés dont les côtés mesurent c et que M carrés sont utilisés sur la longueur et N sur la largeur. D'après la première phrase de l'énoncé, M et N doivent être des entiers positifs.

On a donc $Mc=60\frac{1}{2}$ cm et $Nc=47\frac{2}{3}$ cm, ou $Mc=\frac{121}{2}$ cm et $Nc=\frac{143}{3}$ cm.

Puisqu'on cherche M et N, on peut diviser, membre par membre, pour éliminer c.

$$\frac{Mc}{Nc}=\frac{121}{2}\div\frac{143}{3}$$
$$\frac{M}{N}=\frac{11\times 11}{2}\times\frac{3}{11\times 13}$$
$$=\frac{33}{26}$$

On veut donc déterminer les plus petites valeurs possibles de M et de N de manière que $\frac{M}{N}=\frac{33}{26}$. Puisque la fraction $\frac{33}{26}$ est irréductible, les plus petites valeurs sont $M=33$ et $N=26$. Le plus petit nombre de carrés qu'il faut est donc égal à 33×26, ou 858.

Solution 2

L'aire du rectangle, en centimètres carrés, est égale à $\frac{121}{2}\times\frac{143}{3}$, ou $\frac{11\times 11}{2}\times\frac{11\times 13}{3}$.

On veut écrire cette expression sous la forme du nombre de carrés, multiplié par l'aire d'un carré, c'est-à-dire sous forme d'un entier multiplié par le carré d'un nombre.

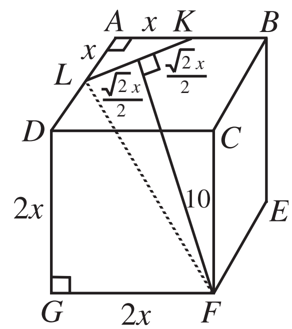
On peut écrire $\frac{11\times 11}{2}\times\frac{11\times 13}{3}=\frac{11\times 13}{6}\times 11^2$. Or le premier facteur doit être un entier.

On doit donc placer le 6 dans la partie qui sera au carré.

$$\frac{11\times13}{6}\times11^2 = \frac{6\times11\times13}{6^2}\times11^2$$
$$= [6\times11\times13]\times\left(\frac{11}{6}\right)^2$$
$$= 858\times\left(\frac{11}{6}\right)^2$$

Il faut donc 858 carrés mesurant $\frac{11}{6}$ cm sur $\frac{11}{6}$ cm. RÉPONSE : (B)

25. Soit $AK = x$. On a donc $AL = x$, $DG = 2x$ et $FG = 2x$. Puisque $AL = AK$, le triangle ALK est un triangle rectangle isocèle. On a donc $LK = \sqrt{2}x$.
Au point F, on abaisse une perpendiculaire FQ au segment LK. Puisque le triangle ALK est isocèle, Q est le milieu de LK. On a donc $FQ = 10$ et $LQ = \frac{\sqrt{2}x}{2}$.



D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle DGF, $DF^2 = (2x)^2 + (2x)^2$, ou $DF^2 = 8x^2$.
Puisque le triangle FDL est rectangle en D, on obtient, d'après le théorème de Pythagore, $FL^2 = 8x^2 + x^2$, ou $FL^2 = 9x^2$.
D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle LQF, on a :

$$LF^2 = LQ^2 + QF^2$$
$$9x^2 = \left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)^2 + 10^2$$
$$9x^2 = \frac{1}{2}x^2 + 100$$
$$\frac{17}{2}x^2 = 100$$
$$x \approx 3,429$$

Le volume du cube est égal à $8x^3$, ou approximativement à 322,82. À l'entier près, il est égal à 323. RÉPONSE : (A)