Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre en mathématiques et en Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Solutions du Concours Hypatie 2003 (11e – année)

(Secondaire V au Québec)

pour les prix du
The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

1. a) Soit N le nombre de tuiles que Carl a en sa possession.
Puisqu'il lui reste 92 tuiles non utilisées après qu'il a formé un grand carré de n cm, on a :
$$N = n^2 + 92$$
Puisqu'il lui manque 100 tuiles pour former un carré de $(n+2)$ cm, on a :
$$N = (n+2)^2 - 100$$
On a deux équations à deux inconnues, N et n. En comparant les deux équations, on a :
$$\begin{aligned}(n+2)^2 - 100 &= n^2 + 92\\ n^2 + 4n + 4 - 100 &= n^2 + 92\\ 4n &= 188\\ n &= 47\end{aligned}$$
Donc N est égal à $(47)^2 + 92$, ou 2301.
Carl a donc 2301 tuiles.

b) Soit B le nombre de blocs que Diane a apportés.
Puisqu'il lui manque 24 blocs lorsqu'il tente de former un cube de 8 cm, Carl a pris $8^3 - 24$, ou 488 cubes.
Soit r cm la longueur d'arête, du cube que Diane forme avec les cubes qu'il lui reste.
Elle a donc utilisé r^3 cubes pour former ce cube. Donc $B = r^3 + 488$.
En utilisant tous les cubes que Diane a apportés, Carl et Diane peuvent former un cube de $(r+2)$ cm. Il y a donc un total de $(r+2)^3$ cubes, c'est-à-dire que $B = (r+2)^3$. Donc :
$$\begin{aligned}(r+2)^3 &= r^3 + 488\\ (r+2)^2(r+2) &= r^3 + 488\\ \left(r^2 + 4r + 4\right)(r+2) &= r^3 + 488\\ r^3 + 2r^2 + 4r^2 + 8r + 4r + 8 &= r^3 + 488\\ 6r^2 + 12r - 480 &= 0\\ r^2 + 2r - 80 &= 0\\ (r+10)(r-8) &= 0\end{aligned}$$
Donc $r = -10$ ou $r = 8$. Puisque r est positif, la première solution est rejetée.
Le nombre total de blocs est donc égal à $(8+2)^3$, ou 1000.

Prolongement
Soit N le nombre de tuiles que Carl a en sa possession. Soit x cm la longueur des côtés du premier carré qu'il forme et y cm la longueur des côtés du carré plus grand qu'il essaie de former.
Lorsqu'il forme le premier carré, il lui reste 92 tuiles. Lorsqu'il tente de former le deuxième carré, il lui manque 100 tuiles.
Donc $N = x^2 + 92$ et $N = y^2 - 100$. On a donc :

$$x^2 + 92 = y^2 - 106$$
$$y^2 - x^2 = 192$$
$$y^2 - 100 = x^2 + 92$$
$$y^2 - x^2 = 192$$
$$(y - x)(y + x) = 192$$

On cherche le nombre de solutions entières et positives, de manière que $y > x$.
On remarque que $y - x$ et $y + x$ doivent être des entiers positifs et que $y + x > y - x$.
On écrit 192 en factorisation première, soit $192 = 2^6 \cdot 3$. Cela nous donne les diviseurs positifs de 192, soit 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96 et 192.
Le tableau suivant permet de vérifier les possibilités. Les deux premiers nombres de chaque ligne représentent un système d'équations.
(Les deux premiers nombres de la première ligne représentent le système $y - x = 1$, $y + x = 192$. Chaque ligne représente un système semblable. De plus, pour chaque ligne du tableau, on a $y = (1^{\text{re}}\text{ colonne } + 2^{\text{e}}\text{ colonne}) \div 2$, $x = (2^{\text{e}}\text{ colonne} - 1^{\text{re}}\text{ colonne}) \div 2$, car $y = \frac{1}{2}\left[(y - x) + (y + x)\right]$ et $x = \frac{1}{2}\left[(y + x) - (y - x)\right]$. On obtient donc les solutions assez facilement.)

$y - x$	$y + x$	y	x	N
1	192			
2	96	49	47	2301
3	64			
4	48	26	22	584
6	32	19	13	269
8	24	16	8	164
12	16	14	2	104

Les lignes incomplètes du tableau indiquent des solutions non entières.
Il y a donc 5 solutions. Carl peut avoir 5 nombres différents de tuiles.

Remarque
On peut aussi utiliser le système d'équations suivant :
$$N = x^2 + 92$$
$$N = (x + p)^2 - 100$$
On obtiendrait $(x + p)^2 - 100 = x^2 + 92$, d'où $2px + p^2 = 192$, ou $p(2x + p) = 192$.
La suite est assez semblable. Il faut faire appel à $192 = 2^6 \cdot 3$ et examiner tous les produits possibles, *p* étant toujours le plus petit des deux facteurs.

2. a) *Solution 1*

Pour gagner, il faut être en mesure d'enlever la dernière pièce. Une personne a donc une position gagnante si, au moment de jouer, il y a une pile vide et au moins une pièce dans l'autre pile.

Pour recevoir une position gagnante, Yvonne doit forcer Xavier à lui remettre une pile vide. Pour ce faire, elle doit lui remettre deux piles ayant chacune une seule pièce. Autrement, Xavier pourrait réduire une des piles sans la vider.
Donc si Yvonne reçoit une pile de 1 pièce et une pile de 2 ou 3 pièces, elle peut jouer de manière à remettre deux piles de 1 pièce, ce qui lui assure une victoire.

Xavier ne veut donc pas, pour commencer, enlever 2 pièces d'une pile. De plus, il ne veut pas enlever les 3 pièces d'une pile, car Yvonne pourrait enlever les 3 pièces de l'autre pile et gagner.

Xavier est donc forcé à ouvrir le jeu en enlevant 1 pièce d'une pile. Yvonne ne veut pas répliquer en enlevant 1 pièce de la même pile, car elle remettrait à Xavier une pile de 1 pièce et une pile de 3 pièces, ce qui permettrait à Xavier d'utiliser la stratégie gagnante décrite ci-haut. Yvonne enlève donc 1 pièce de la pile de 3 pièces et remet à Xavier deux piles de 2 pièces chacune. Xavier est donc forcé à enlever 1 ou 2 pièces d'une pile. Dans les deux cas, il remet une position gagnante à Yvonne.

Dans tous les cas, Yvonne peut s'assurer de toujours gagner.

Solution 2

Yvonne peut s'assurer de gagner si elle peut s'assurer qu'à un moment donné, elle recevra une pile vide et une pile qu'elle pourra vider d'un seul coup.
Elle peut s'assurer de cela en enlevant toujours le même nombre de pièces que Xavier, mais dans l'autre pile. Si Xavier enlève 1, 2 ou 3 pièces, Yvonne fait de même dans l'autre pile. Cela veut dire qu'à un moment donné, Xavier devra vider une pile et Yvonne pourra vider l'autre et gagner.

Solution 3

Yvonne peut s'assurer de gagner si elle remet toujours à Xavier deux piles égales. Si les deux piles sont vides, c'est qu'elle a vidé la dernière et qu'elle a gagné. Si elle remet deux piles non vides, Xavier ne peut vider la dernière pile d'un coup.
Si Yvonne reçoit une pile de 2 pièces et une pile de 3 pièces, elle remet deux piles de 2.
Si Yvonne reçoit une pile de 1 pièce et une pile de 3 pièces, elle remet deux piles de 1.
Si Yvonne reçoit une pile vide et une pile de 3 pièces, elle remet deux piles vides et gagne.
Si Xavier reçoit deux piles de 1 pièce, il doit vider une pile et Yvonne videra l'autre et gagnera.
Si Xavier reçoit deux piles de 2 pièces, il peut remettre une pile de 1 pièce et une pile de 2 pièces, ce qui permet à Yvonne de lui remettre deux piles de 1 pièce. Il peut aussi vider une pile, ce qui permet à Yvonne de vider l'autre.
Yvonne peut donc s'assurer de toujours gagner en utilisant cette stratégie.

b) Yvonne peut s'assurer de toujours gagner en remettant à Xavier, après son premier tour, deux piles égales et une pile vide. Elle pourra par la suite utiliser une stratégie de la partie a). On vérifie les divers choix possibles de Xavier, au premier tour, et la réplique d'Yvonne qui permet cette stratégie. Dans chacun des cas suivants, les trois nombres indiquent le nombre de pièces dans chaque pile, dans l'ordre, après le premier choix de Xavier et après la réplique d'Yvonne. Les piles de départ, dans l'ordre, sont celles de 1 pièce, de 2 pièces et de 3 pièces.

Après le 1er choix de Xavier	*Après le 1er choix d'Yvonne*
0, 2, 3	0, 2, 2
1, 1, 3	1, 1, 0
1, 0, 3	1, 0, 1
1, 2, 2	0, 2, 2
1, 2, 1	1, 0, 1
1, 2, 0	1, 1, 0

On voit que, peu importe le premier choix de Xavier, il est possible pour Yvonne de lui remettre deux piles égales et une pile vide. Cette stratégie permet à Yvonne de poursuivre la stratégie gagnante de la partie a).

Prolongement
Dans la partie a), on a vu que si Xavier joue premier avec deux piles égales, Yolande peut s'assurer de gagner. Dans la partie b), on a vu que si Xavier joue premier avec une pile de 1 pièce, une pile de 2 pièces et une pile de 3 pièces, Yolande peut s'assurer de gagner.
Lors de son premier choix, Xavier veut donc éviter de laisser deux piles égales, comme 2, 4, 4 ou 2, 2, 5, car Yvonne pourrait alors enlever la pile inégale et remettre deux piles égales et une pile vide.
De même, il ne veut pas créer une situation qui permettrait à Yvonne de lui remettre des piles de 1, 2 et 3 pièces. Yvonne pourrait alors poursuivre la stratégie de la partie b).

On examine donc les premiers choix possibles de Xavier, de même que le meilleur choix possible d'Yvonne.

Après le 1er choix de Xavier	*Après le 1er choix d'Yvonne*	*Gagnante ou gagnant*
2, 4, 4	0, 4, 4	Yvonne
2, 4, 3	2, 1, 3	Yvonne
2, 4, 2	2, 0, 2	Yvonne
2, 4, 1	2, 3, 1	Yvonne
2, 4, 0	2, 2, 0	Yvonne
2, 3, 5	2, 3, 1	Yvonne
2, 2, 5	2, 2, 0	Yvonne
2, 1, 5	2, 1, 3	Yvonne
2, 0, 5	2, 0, 2	Yvonne
1, 4, 5	?	?
0, 4, 5	0, 4, 4	Yvonne

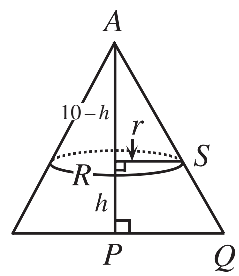
À l'exception du choix où il laisse 1, 4, 5, Yvonne peut toujours gagner.
S'il laisse 1, 4, 5, il y a 10 choix possibles pour Yvonne.

Si Yvonne joue de manière à laisser 0, 4, 5 ou 1, 1, 5 ou 1, 0, 5 ou 1, 4, 4 ou 1, 4, 1 ou 1, 4, 0, Xavier peut jouer de manière à laisser deux piles égales et une pile vide, ce qui lui assure la victoire.
Si Yvonne joue de manière à laisser 1, 3, 5 ou 1, 2, 5 ou 1, 4, 3 ou 1, 4, 2, Xavier peut jouer de manière à laisser des piles respectives de 1, de 2 et de 3 pièces, ce qui lui assure la victoire.
Xavier peut donc gagner en laissant, au premier tour, des piles respectives de 1, de 4 et de 5 pièces et au deuxième tour, en laissant deux piles égales et une pile vide ou des piles respectives de 1, de 2 et de 3 pièces.

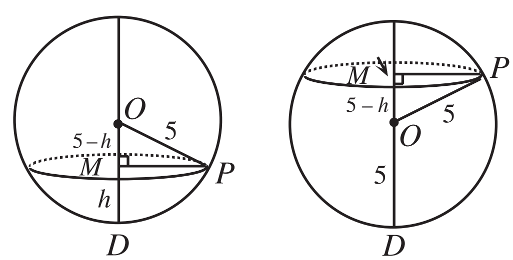
3. On cherche la hauteur h du plan qui forme deux cercles de même aire. Puisque la formule pour l'aire d'un cercle est πr^2, il faut d'abord établir une relation entre h et r dans le cas du cône et dans celui de la sphère.

Relation entre h et r dans le cas du cône
Le diagramme suivant est une coupe transversale verticale du cône. On a ajouté l'axe AP du cône, A étant l'apex, ainsi que le cercle formé par le plan horizontal à une hauteur h. On voit que les triangles APQ et ARS sont semblables.
Donc :

$$\frac{10}{5} = \frac{10-h}{r}$$
$$2r = 10-h$$
$$r = \frac{1}{2}(10-h)$$



Relation entre h et r dans le cas de la sphère
Les diagrammes suivants représentent des coupes transversales verticales de la sphère. On a aussi deux positions du cercle formé par le plan horizontal, de même que l'axe de la sphère qui relie le centre O de la sphère et le centre M du cercle. Cet axe est perpendiculaire au cercle.
On a $OP = 5$, $DO = 5$, $DM = h$ et $MP = r$. Dans le premier diagramme, h est inférieur à 5 et $OM = 5 - h$. Dans le deuxième diagramme, h est supérieur ou égal à 5 et $OM = h - 5$.



D'après le théorème de Pythagore, $r = \sqrt{OP^2 - OM^2}$, d'où $r = \sqrt{5^2 - (5-h)^2}$ ou $r = \sqrt{5^2 - (h-5)^2}$ selon le cas. Dans les deux cas, on obtient $r = \sqrt{10h - h^2}$.

On veut que les deux cercles aient la même aire. On a donc :

$$\pi\left[\frac{1}{2}(10-h)\right]^2 = \pi\left[\sqrt{10h-h^2}\right]^2$$
$$(10-h)^2 = 4\left(10h-h^2\right)$$
$$100-20h+h^2 = 40h-4h^2$$
$$5h^2-60h+100=0$$
$$h^2-12h+20=0$$
$$(h-10)(h-2)=0$$

Donc $h=10$ ou $h=2$. Dans le cas de la première solution, le plan passe par l'apex du cône et il est tangent à la sphère. La coupe transversale par le plan horizontal donne alors deux cercles de rayon nul.

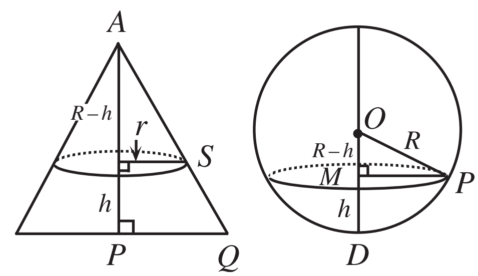
Prolongement

Pour éviter des fractions, soit $d=2R$. Le rayon du cône est donc égal à R, de même que sa hauteur.

Les diagrammes suivants représentent des coupes transversales verticales du cône et de la sphère, comme dans le problème précédent.

Comme dans le problème précédent, on a des triangles semblables dans le cône. Soit r le rayon du cercle formé par le plan horizontal.

Donc $\dfrac{R-h}{R}=\dfrac{r}{R}$, d'où $r=R-h$.



Dans la sphère, à la hauteur h, on a un cercle de rayon r.

Par le théorème de Pythagore, on a $r=\sqrt{OP^2-OM^2}$, ou $r=\sqrt{R^2-(R-h)^2}$, d'où $r=\sqrt{2hR-h^2}$.

La somme de l'aire des coupes transversales formées par le plan horizontal est égale à :

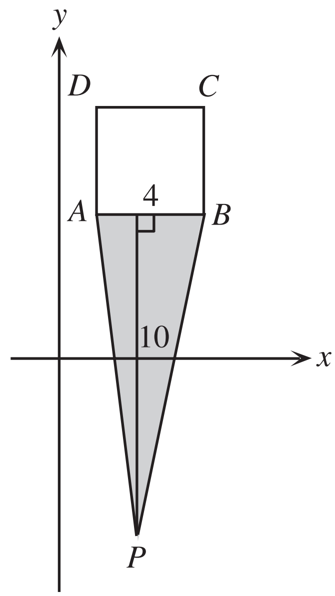
$$\pi\left(\sqrt{2hR-h^2}\right)^2+\pi(R-h)^2$$
$$=\pi\left(2hR-h^2\right)+\pi\left(R^2-2hR+h^2\right)$$
$$=\pi R^2$$

Cette somme est constante, puisque R est une constante.

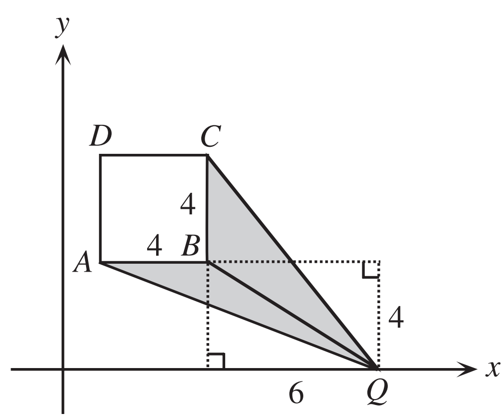
4. a) L'aire visible du point $P(2,-6)$ est l'aire du triangle ABP. Le triangle a une base AB de longueur 4. La hauteur correspondante est la distance du point P à la droite horizontale AB. Elle est égale à 10.

L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(10)$, ou 20 unités carrées.

L'aire visible du point $P(2,-6)$ est donc égale à 20 unités carrées.



b) L'aire visible du point $Q(11,0)$ est égale à la somme de l'aire des triangles QBA et QBC. Le triangle QBA a une base AB de longueur 4. Sa hauteur correspondante est la distance du point Q à la droite horizontale AB. Elle est égale à 4. L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(4)$, ou 8 unités carrées.



Le triangle QBC a une base BC de longueur 4. Sa hauteur correspondante est la distance du point Q à la droite verticale BC. Elle est égale à 6. L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(6)$, ou 12 unités carrées.

L'aire visible du point $Q(11,0)$ est égale à la somme de l'aire des triangles. Elle est donc égale à 20 unités carrées.

c) Depuis un point quelconque P, à l'extérieur du carré, il y aura 2 ou 3 sommets visibles. On considère d'abord les points P pour lesquels il y a 2 sommets visibles.

Ces points P doivent être dans une des régions suivantes :

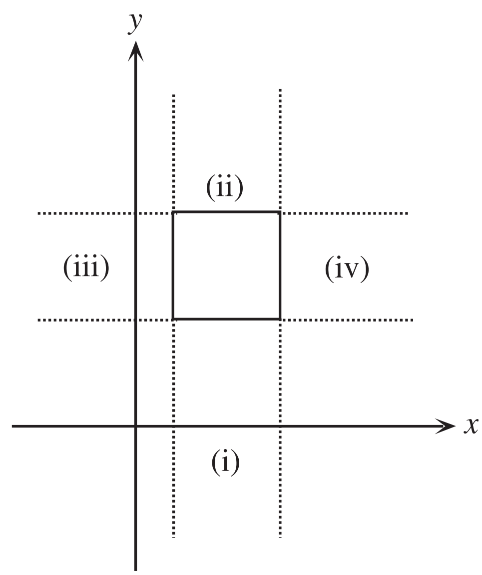
i) La région en dessous du carré. Les points P ont alors une abscisse x telle que $1 \le x \le 5$.

ii) La région au-dessus du carré. Les points P ont alors une abscisse x telle que $1 \le x \le 5$.

iii) La région à la gauche du carré. Les points P ont alors une ordonnée y telle que $4 \le y \le 8$.

iv) La région à la droite du carré. Les points P ont alors une ordonnée y telle que $4 \le y \le 8$.

Dans chacune de ces régions, l'aire visible est l'aire d'un triangle dont la base est un côté du carré et dont la longueur est donc 4.



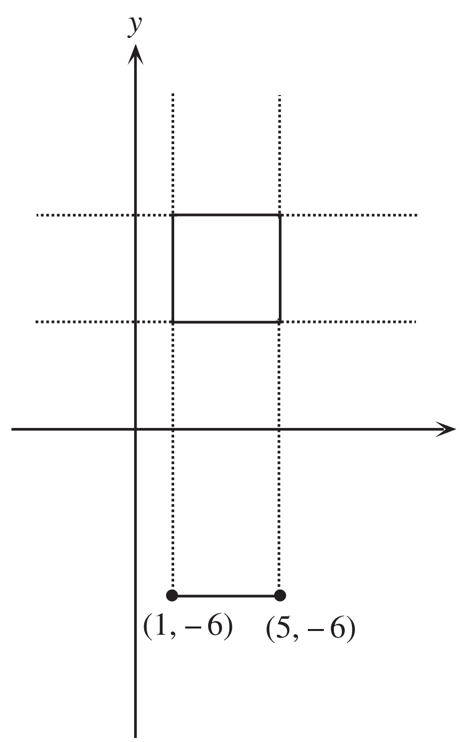
Pour que l'aire d'un tel triangle soit égale à 20, la hauteur correspondante doit être égale à 10.

Donc dans la région i), les points P sur le segment de droite qui joint les points $(1, -6)$ et $(5, -6)$ font partie de l'ensemble 20/20.

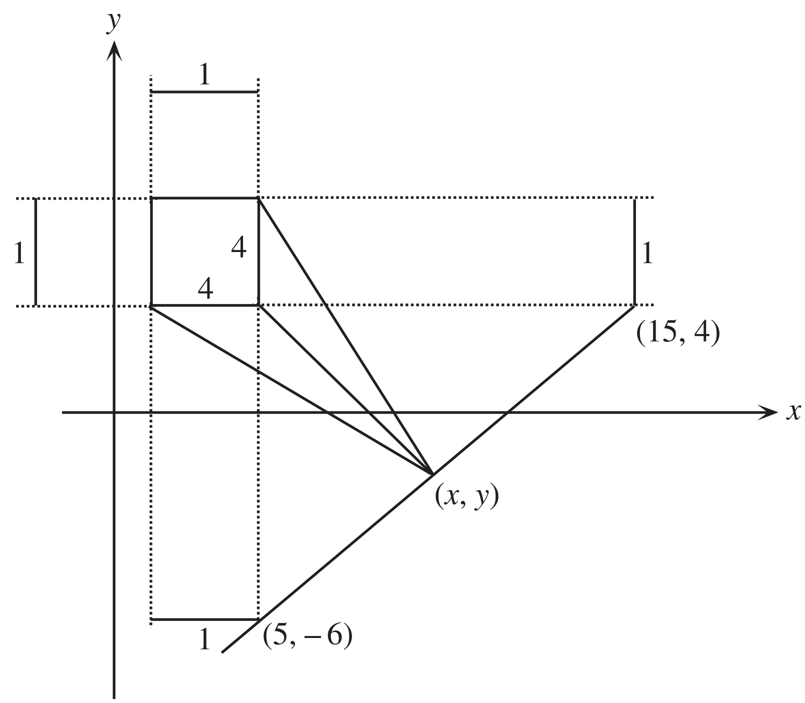
Dans les trois autres régions, les points P sont situés sur des segments de droites semblables.

On a donc identifié quatre segments de droites, chacun de longueur 4, qui font partie de l'ensemble 20/20.

On doit aussi examiner quatre autres régions dans lesquelles les points P ont trois sommets visibles. Ces régions sont celles qui sont traversées par les droites formées par les diagonales du carré lorsqu'on les prolonge. Par exemple, la région qui contient tous les points $P(x, y)$ tels que $x \ge 5$ et $y \le 4$. On analyse les points d'une région. Par symétrie, on aura des résultats semblables pour les trois autres régions.



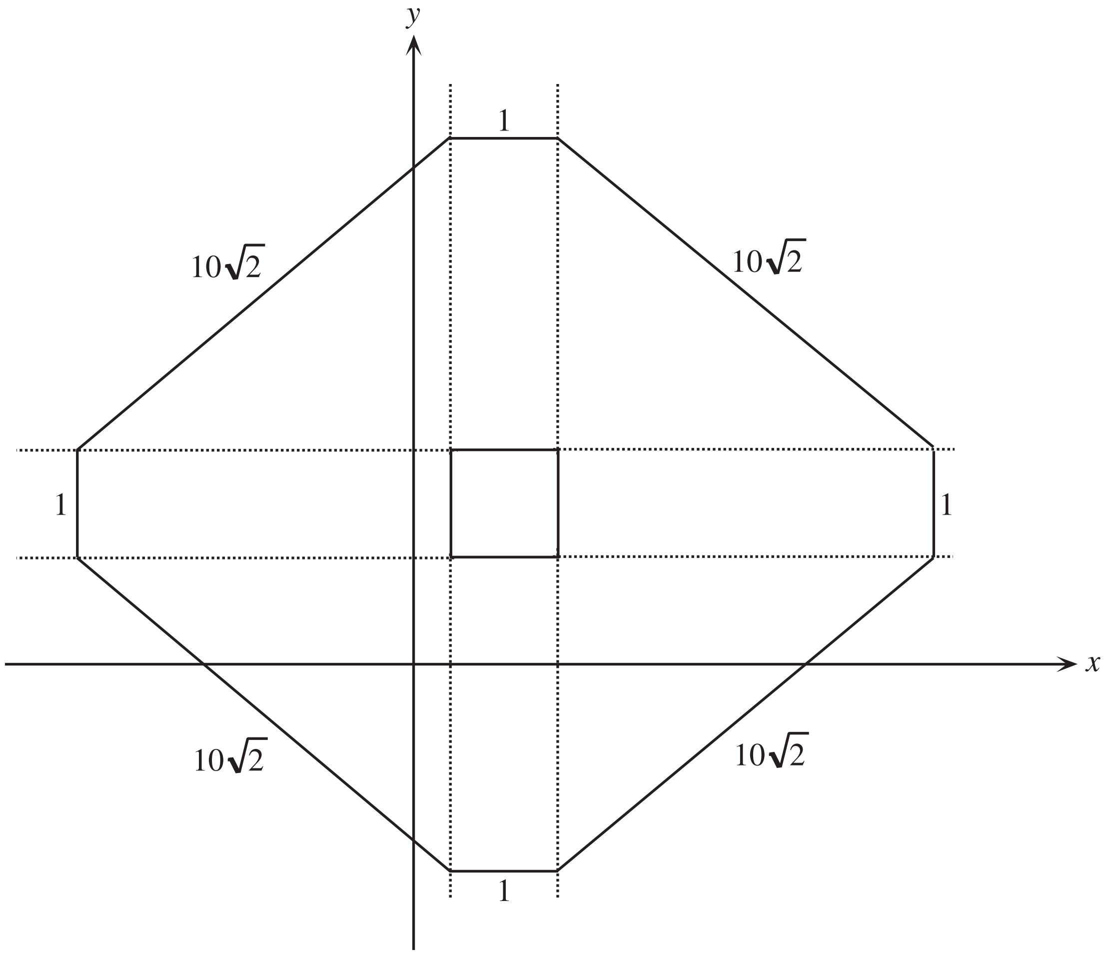
Soit $P(x, y)$ un point de la région définie par $x \geq 5$ et $y \leq 4$, qui a une aire visible de 10 unités carrées.
La somme de l'aire des triangles PBA et PBC est donc égale à 20 unités carrées.
Le triangle PBA a une base de longueur 4 et une hauteur correspondante égale à $4-y$.
Le triangle PBC a une base de longueur 4 et une hauteur correspondante égale à $x-5$.



P est dans l'ensemble 20/20 si ses coordonnées vérifient :

$$\frac{1}{2}(4)(x-5)+\frac{1}{2}(4)(4-y)=20$$
$$x-5+4-y=10$$
$$y=x-11$$

P doit donc être situé sur la droite de pente 1, définie par l'équation $y = x-11$. On remarque que cela inclut le point $(11, 0)$ de la partie b). Dans cette région, les points de l'ensemble 20/20 forment donc le segment qui joint les points $(5, -6)$ et $(15, 4)$. Ce segment a une longueur de $10\sqrt{2}$.
Par symétrie, les points de l'ensemble 20/20 des trois autres régions sont situés sur des segments semblables de même longueur. L'ensemble 20/20 est donc un octogone ayant quatre côtés de longueur 4 et quatre côtés de longueur $10\sqrt{2}$. Son périmètre est donc égal à $16+40\sqrt{2}$.



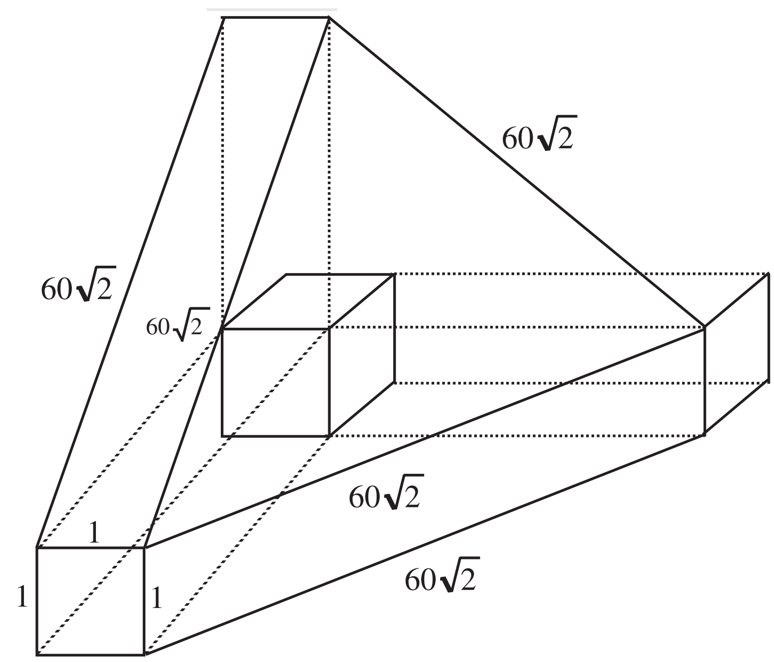
Prolongement

On utilise une approche semblable à celle utilisée dans le plan.

1^er^ cas : P a 4 sommets visibles.
Pour avoir 4 sommets visibles, *P* doit être situé directement devant une des 6 faces du cube. Le volume visible de *P* sera le volume d'une pyramide à base carrée. Puisque le volume d'une pyramide est le tiers du produit de l'aire de la base et de la hauteur et que la base a une aire de 1, la pyramide doit avoir une hauteur de 60.
Les points *P* de l'ensemble 20/20 sont donc directement au-dessus de la face, à une hauteur de 60. Ils forment donc une surface plane délimitée par un carré unitaire. On a donc un total de 6 telles surfaces carrées, soit une pour chaque face du cube.

2^e^ cas : P a 6 sommets visibles.
Pour avoir 6 sommets visibles, *P* doit être situé dans une région où les 6 sommets visibles sont ceux de deux faces adjacentes, reliées par une même arête. Puisque le cube admet 12 arêtes, il y a 12 telles régions.
On considère un point *P* dans une de ces régions. Le volume visible est le volume de deux pyramides à base carrée, chaque base ayant une aire de 1. Le volume visible est donc égal au tiers du produit de l'aire de la base et de la somme des hauteurs. Pour un volume visible de 20, la somme des hauteurs doit être égale à 60. Dans cette région, les points *P* de l'ensemble 20/20 forment une surface plane délimitée par un rectangle qui relie deux carrés de l'ensemble 20/20 au-dessus des faces du cube. Ce rectangle aura deux côtés de longueur 1 et deux côtés de longueur $60\sqrt{2}$. Chacun de ces derniers côtés est l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont les cathètes mesurent 60.
(Comment sait-on que les points forment une surface plane? Imaginons une coupe transversale de la région, perpendiculaire aux deux faces adjacentes. *P* doit être situé de manière que la somme des hauteurs de *P* aux deux faces soit égale à 60. Dans la coupe transversale, la somme des longueurs de deux segments perpendiculaires doit être égale à 60. Comme dans la partie b), les points *P*, dans la coupe transversale, forment un segment de droite.)
L'ensemble 20/20 contient donc, en plus des 6 carrés, 12 rectangles d'aire $60\sqrt{2}$.

3^e^ cas : P a 7 sommets visibles.
Pour avoir 7 sommets visibles, *P* doit être situé dans une des 8 régions au-dessus des sommets. On remarquera qu'après les cas précédents, il reste en effet 8 régions autour du cube qui n'ont pas été considérées.
On considère une de ces régions au-dessus d'un sommet. Le volume visible est le volume de trois pyramides à base carrée. Comme dans le cas précédent, on veut que la somme des hauteurs soit égale à 60. La région formée par les points *P* de l'ensemble 20/20 sera une portion d'un plan. Elle doit être reliée aux trois rectangles au-dessus des arêtes qui se rencontrent au sommet du cube, car si *P* est sur le côté d'un tel rectangle, on peut affirmer que l'on a trois pyramides dont une de hauteur 0. La région formée par les points *P* de l'ensemble 20/20 est donc la surface plane délimitée par un triangle équilatéral dont les côtés mesurent $60\sqrt{2}$.
Le diagramme suivant représente une partie des différentes régions qui entourent le cube, ainsi que quelques-unes des surfaces qui forment l'ensemble 20/20.



Pour déterminer l'aire du triangle, on trace une médiane qui coupe le triangle en deux triangles 30°-60°-90°. L'hypoténuse a une longueur de $60\sqrt{2}$. Le petit côté a donc une longueur de $30\sqrt{2}$. Le troisième côté est aussi la hauteur du triangle équilatéral. Sa longueur est égale à $\left(30\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}\right)$, ou $30\sqrt{6}$. L'aire du triangle équilatéral est donc égale à $\frac{1}{2}\left(60\sqrt{2}\right)\left(30\sqrt{6}\right)$, c'est-à-dire à $900\sqrt{12}$, ou $1800\sqrt{3}$.

L'ensemble 20/20 est un polyèdre dont l'aire totale est égale à $6(1)+12\left(60\sqrt{2}\right)+8\left(1800\sqrt{3}\right)$, ou $6+720\sqrt{2}+14\ 400\sqrt{3}$ unités carrées.