Concours Hypatie (11^{e} année - Sec. V au Quebec)

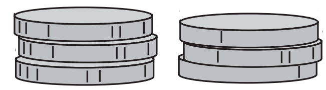
mercredi 16 avril 2003

1. a) Carl a un certain nombre de tuiles carrées mesurant chacune 1 cm sur 1 cm. Il les place de manière à former un grand carré dont les côtés mesurent n cm et constate qu'il reste 92 tuiles non utilisées. S'il avait allongé les côtés du grand carré jusqu'à $(n+2)$ cm, il lui aurait manqué 100 tuiles pour réussir à former le grand carré. Combien de tuiles Carl a-t-il?

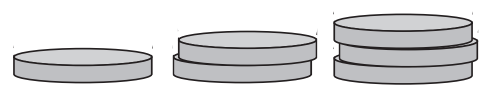
   b) Diane, l'amie de Carl, arrive avec une grosse pile de blocs, chacun étant un cube dont les arêtes mesurent 1 cm. Carl prend une partie des blocs et Diane garde le reste. Carl utilise ses blocs pour tenter de former un gros cube dont les arêtes mesurent 8 cm, mais il constate qu'il lui manque 24 blocs. Diane réussit à former un gros cube en utilisant tous ses blocs. S'ils utilisent tous les blocs que Diane a apportés, ils peuvent former un grand cube dont les arêtes ont 2 cm de plus que celles du grand cube de Diane. Combien y a-t-il de cubes en tout?

2. Xavier et Yvonne participent à un jeu. Au départ, il y a un certain nombre de pièces de monnaie placées en piles. Xavier joue toujours le premier. À tour de rôle, chacun enlève au moins une pièce d'*une seule* pile. La personne qui enlève la dernière pièce gagne.

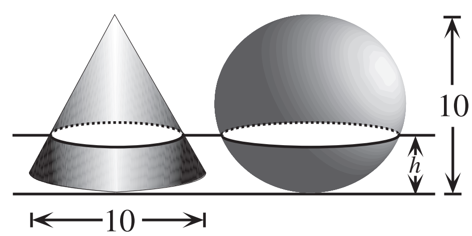
   a) S'il y a deux piles contenant chacune trois pièces de monnaie, démontrer qu'Yvonne peut s'assurer de toujours gagner.



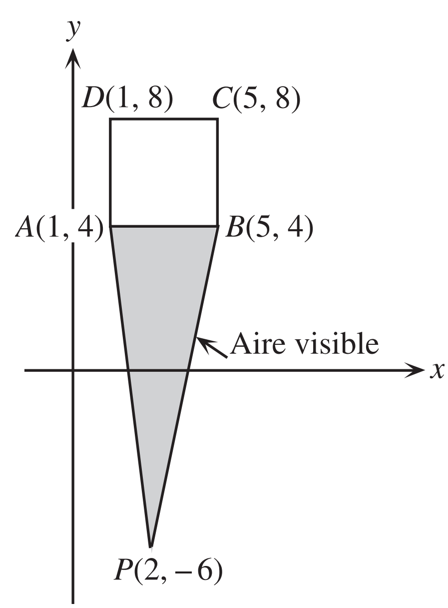
   b) S'il y a une pile de 1 pièce, une pile de 2 pièces et une pile de 3 pièces, démontrer qu'Yvonne peut s'assurer de toujours gagner.



3. Une sphère a un diamètre de 10 cm. Un cône droit a une hauteur de 10 cm et sa base est un cercle dont le diamètre mesure 10 cm. Les deux solides reposent sur une surface horizontale. Si un plan horizontal coupe la sphère et le cône, la coupe transversale est un cercle dans les deux cas, comme l'indique le diagramme. Déterminer la hauteur du plan qui forme deux cercles de même aire.



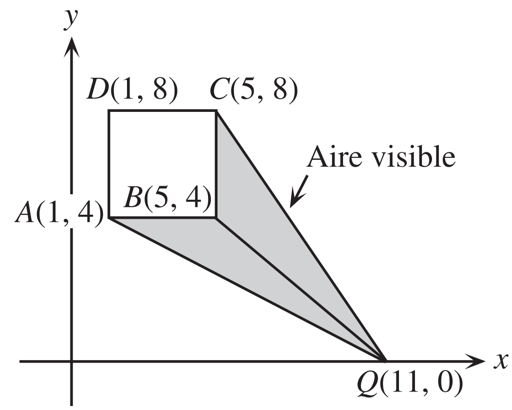
4. Le carré $ABCD$ a pour sommets $A(1,4)$, $B(5,4)$, $C(5,8)$, et $D(1,8)$. Depuis un point P à l'extérieur du carré, on dit qu'un sommet du carré est *visible* si on peut le relier à P au moyen d'un segment de droite qui ne passe pas à travers le carré. Ainsi depuis un point P à l'extérieur du carré, il y a toujours deux ou trois sommets du carré qui sont visibles. L'*aire visible de P* est l'aire du triangle ou la somme de l'aire des deux triangles formés en reliant P aux deux ou trois sommets visibles du carré.



   a) Démontrer que l'*aire visible* du point $P(2,-6)$ est égale à 20 unités carrées.

à suivre ...

b) Démontrer que l'aire visible du point $Q(11, 0)$ est aussi égale à 20 unités carrées.



c) L'ensemble des points P qui ont une aire visible de 20 unités carrées est appelé l'*ensemble 20/20*. Cet ensemble a la forme d'un polygone. Déterminer le périmètre de l'ensemble 20/20.

Prolongements (Vous devriez essayer de répondre à ces questions uniquement lorsque vous aurez complété au meilleur de vos connaissances les quatre principaux problèmes)

Prolongement du Problème 1

Comme dans la question 1a), Carl place ses tuiles de manière à former un grand carré et il lui reste 92 tuiles non utilisées. Pour former un carré plus grand, il ajoute *un certain nombre de tuiles* à chaque côté du carré précédent et constate qu'il lui manque 100 tuiles pour compléter le carré. Combien de nombres différents de tuiles Carl peut-il avoir?

Prolongement du Problème 2

S'il y a trois piles, contenant 2, 4 et 5 pièces, quel joueur gagnera si chacun fait toujours le meilleur choix? Expliquer la stratégie gagnante.

Prolongement du Problème 3

Une sphère de diamètre d et un cône circulaire droit, dont la base a un diamètre d, reposent sur une surface horizontale. Dans ce cas, la hauteur du cône est égale au *rayon* de la sphère. Démontrer que si un plan horizontal coupe les deux solides, la *somme* de l'aire des coupes transversales est toujours constante.

Prolongement du Problème 4

Depuis un point quelconque P, à l'extérieur d'un cube unitaire, 4, 6 ou 7 sommets du cube sont visibles dans le même sens que pour le carré. Si on relie le point P à chacun de ces sommets, on obtient 1, 2 ou 3 pyramides à base carrée qui forment le *volume visible* de P. L'*ensemble 20/20* est l'ensemble de tous les points P qui ont un volume visible de 20. Il a la forme d'un polyèdre. Quelle est l'aire totale de ce polyèdre?