Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2003 Solutions

Concours Gauss

(7e et 8e années – Sec. I et II au Québec)

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche
Comptables agréés

Avec la participation de :

Institut canadien des actuaires

Great West Life and London Life

Sybase Inc. (Waterloo)

*i*Anywhere Solutions

Avec l'appui de :

Financière Manuvie

Organisation du concours — Solutions Gauss 2003

Comité exécutif	Barry Ferguson (Directeur), Peter Crippin, Ruth Malinowski, Ian VanderBurgh
Ordinatique	Steve Breen, University of Waterloo Don Cowan, University of Waterloo Matthew Oliver, University of Waterloo
Compilateurs du rapport du Concours Gauss	Lloyd Auckland, University of Waterloo Barry Ferguson, University of Waterloo
Documentation	Bonnie Findlay, University of Waterloo
Publications	Bonnie Findlay, University of Waterloo
Version française	André Ladouceur, Collège catholique Samuel-Genest, Ottawa Robert Laliberté, École secondaire publique Louis-Riel Gérard Proulx, Collège catholique Franco-Ouest, Ottawa Rodrigue St-Jean, École secondaire Embrun, Embrun
Adjoints à la technique	Joanne Kursikowski, Linda Schmidt, Kim Schnarr
Comité de validation	Ed Anderson, University of Waterloo, Waterloo John Barsby, St. John’s-Ravenscourt School, Winnipeg Jean Collins, (retired), Thornhill Tom Griffiths (retired), London Frank Rachich (retired), Woodstock Larry Rice, University of Waterloo, Waterloo Ron Scoins, University of Waterloo, Waterloo

Comité Gauss — Solutions Gauss 2003

Mark Bredin (Assoc. Chair)
St. John's-Ravenscourt School
Winnipeg, Manitoba

Richard Auckland
New Sarum Public School
St. Thomas, Ontario

Sandy Emms Jones
Forest Heights C.I.
Kitchener, Ontario

Kevin Grady
Cobden Dist. Public School
Cobden, Ontario

Joanne Halpern
Toronto, Ontario

David Matthews
University of Waterloo
Waterloo, Ontario

John Grant McLoughlin
Memorial University of Newfoundland
St. John’s, Newfoundland

Bob McRoberts (Chair)
Dr. G.W. Williams S.S.
Aurora, ON

Paul Ottaway
Halifax, Nova Scotia

Patricia Tinholt
Valley Park Middle School
Don Mills, Ontario

Sue Trew
Holy Name of Mary S.S.
Mississauga, Ontario

Partie A

1. On obtient $3{,}26 \times 1{,}5 = 4{,}89$. RÉPONSE : (B)

2. Selon la priorité des opérations, on a : $\begin{aligned}(9-2)-(4-1) &= 7-3\\ &= 4\end{aligned}$ RÉPONSE : (C)

3. On obtient $30 + 80\,000 + 700 + 60 = 80\,790$. RÉPONSE : (D)

4. $\dfrac{1+2+3}{4+5+6} = \dfrac{6}{15}$, ou $\dfrac{2}{5}$ RÉPONSE : (C)

5. On a posé la question à 90 personnes.
   Selon le diagramme, 25 personnes ont choisi le chat, 10 ont choisi le poisson, 15 ont choisi un oiseau et 5 ont répondu « autre ». Cela fait $25+10+15+5$, ou 55 personnes.
   Il reste donc $90-55$, ou 35 personnes qui ont choisi le chien. RÉPONSE : (E)

6. Puisque Thomas utilise 4 mL de gel par jour et qu'un tube de gel contient 128 mL de gel, il lui faudra $\dfrac{128}{4}$, ou 32 jours pour vider le tube. RÉPONSE : (A)

7. *Solution 1*

   Si on annule les 3 dans le membre de gauche, l'égalité $\dfrac{3\times 6\times 9}{3} = \dfrac{\square}{2}$ devient $6\times 9 = \dfrac{\square}{2}$.

   L'expression dans la case doit donc être égale à $2\times 6\times 9$, car $6\times 9 = \dfrac{2\times 6\times 9}{2}$.

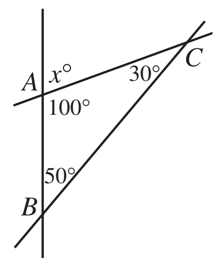
   Solution 2

   On évalue le membre de gauche, $\dfrac{3\times 6\times 9}{3}$, qui est égal à 54.
   Le nombre dans la case doit donc être égal à 54×2, ou 108, pour que l'égalité soit vraie.
   On évalue les expressions des cinq choix de réponses pour obtenir :
   (A) 48 (B) 72 (C) 108 (D) 64 (E) 432
   L'expression qu'on peut placer dans la case est donc $2\times 6\times 9$. RÉPONSE : (C)

8. Si on tourne les mots SOLDE GÉANT, comme si on les regardait de l'autre côté de la vitrine, on obtient TNAƎG ƎD⅃OƧ .
Les seules lettres qui sont pareilles, lorsqu'on les regarde d'un côté ou de l'autre de la vitrine, sont O, A et T. RÉPONSE : (A)

9. Au départ, Paul est à une distance de 1000 m de la maison et il se rend à un point situé à 800 m de la maison. Il parcourt donc une distance de 200 m. Le graphique indique qu'il revient sur ses pas, puisqu'il se rend à un point situé à 1000 m de la maison. Ce faisant, il parcourt de nouveau une distance de 200 m. Il se rend ensuite à la maison, en parcourant une distance de 1000 m. Paul parcourt donc une distance totale de $200 + 200 + 1000$, ou 1400 m. RÉPONSE : (E)

10. Puisque la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°, alors $\angle BAC = 180^\circ - 30^\circ - 50^\circ$, ou $\angle BAC = 100^\circ$.
Puisqu'une droite forme un angle plat au point A, alors $x^\circ + 100^\circ = 180^\circ$, d'où $x = 80$.



RÉPONSE : (A)

Partie B

11. Puisque $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ est égal à $\frac{1}{3}$, on enlève $\frac{1}{3}$ des 12 carrés, soit 4 carrés.
Il restera donc 8 carrés. RÉPONSE : (D)

12. *Solution 1*
Puisque le périmètre du champ est 3 fois sa longueur et que le périmètre mesure 240 m, le champ a une longueur de 80 m.
Pour calculer le périmètre, il faut additionner deux fois la longueur et deux fois la largeur. La longueur contribue donc 160 m au périmètre, ce qui laisse 80 m pour deux fois la largeur. Le champ a donc une largeur de 40 m.

Solution 2
Soit P le périmètre du champ, L sa longueur et l sa largeur.
On sait que $P = 3L$ et que $P = 240$. Donc $L = \frac{1}{3}(240)$, ou $L = 80$.
Puisque $P = 240$ et que $P = 2L + 2l$, alors $240 = 2(80) + 2l$, d'où $l = 40$.
RÉPONSE : (B)

13. Si Louis court à $\frac{1}{2}$ de sa vitesse habituelle, il court à 5 km/h et il mettra 6 h pour compléter la course de 30 km.

Si Éliane court à $1\frac{1}{2}$ fois sa vitesse habituelle, elle court à 15 km/h et elle mettra 2 h pour compléter la course de 30 km.
Louis met donc 4 h de plus qu'Éliane pour compléter la course.

RÉPONSE : (D)

14. *Solution 1*
Puisqu'il y a deux fois plus de disques rouges que de disques verts et deux fois moins de disques bleus que de disques verts, alors il y a quatre fois plus de disques rouges que de disques bleus.
Pour chaque deux disques verts, il y a donc quatre disques rouges et un disque bleu. On peut donc imaginer que les disques sont en groupes de sept.
Puisqu'il y a 14 disques en tout, il y a deux groupes de sept. Il y a donc huit disques rouges, quatre disques verts et deux disques bleus.

Solution 2
Soit v le nombre de disques verts.
Le nombre de disques rouges est égal à $2v$ et le nombre de disques bleus est égal à $\frac{1}{2}v$.
On a donc :

$$\begin{aligned} 2v + v + \frac{1}{2}v &= 14 \\ 4v + 2v + v &= 28 \\ 7v &= 28 \\ v &= 4 \end{aligned}$$

Il y a donc quatre disques verts.

RÉPONSE : (B)

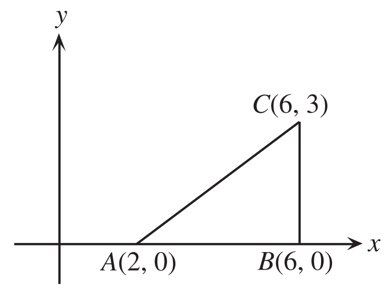
15. Il y a 180 comprimés en tout dans la bouteille.
Parmi les 60 comprimés de forme étoilée, il y a des quantités égales qui goûtent la fraise, le bleuet ou l'orange. Il y a donc 20 comprimés de forme étoilée qui goûtent le bleuet.
Puisqu'il y a une chance égale de choisir n'importe quel comprimé, la probabilité de choisir un comprimé de forme étoilée au goût de bleuet est égale à :

$$\frac{\text{Nombre de comprimés étoilés au bleuet}}{\text{Nombre total de comprimés}} = \frac{20}{180}, \text{ ou } \frac{1}{9}.$$

RÉPONSE : (A)

16. On commence par esquisser le triangle.
Puisque le point C est directement au-dessus du point B, l'angle ABC est droit. Le triangle ABC a donc une base AB de longueur 4 et une hauteur BC de longueur 3.

L'aire du triangle est égale à $A = \frac{b \times h}{2}$. Elle est donc égale à $A = \frac{4 \times 3}{2}$, ou 6 unités carrées.

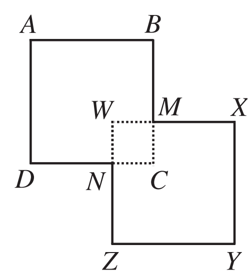


Réponse : (C)

17. Puisque la facture était de 74,16 $ et qu'il y avait un coût initial de 45 $, le coût associé à la distance parcourue est égal à 74,16 $ – 45 $, ou 29,16 $. Puisque le taux associé à la distance est égal à 0,12 $ le kilomètre, le nombre de kilomètres parcourus est égal à $\frac{29{,}16}{0{,}12}$, ou 243. Réponse : (C)

18. *Solution 1*
Comme on le voit dans le diagramme, le périmètre de la figure ombrée est égal à la somme des périmètres des deux grands carrés, moins le périmètre du petit carré.
Puisque les grands carrés ont des côtés de 5 cm, ils ont chacun un périmètre de 20 cm.
Puisque le petit carré a une aire de 4 cm^2, il a des côtés de 2 cm et un périmètre de 8 cm.
Le périmètre de la figure ombrée est donc égal à $20 + 20 - 8$, ou 32 cm.

Solution 2
On nomme les sommets et on calcule la longueur de chaque côté.
Puisque les grands carrés ont des côtés de 5 cm, alors $AB = AD = YX = YZ = 5$.
Le petit carré a une aire de 4 cm^2. Ses côtés mesurent donc 2 cm.
Donc $WM = MC = CN = NW = 2$. Donc BM, DN, MX et NZ ont chacun une longueur de 3 cm (la différence entre les côtés de 5 cm et ceux de 2 cm).
Le périmètre de la figure ombrée est égal à $4 \times 5 + 4 \times 3$, ou 32 cm.

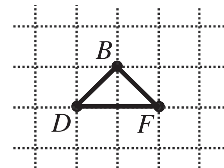


Réponse : (B)

19. L'examen d'Abel comportait 80 questions. Puisqu'il a obtenu une note de 80 %, il a répondu correctement à 80 % des 80 questions, c'est-à-dire à $\frac{80}{100} \times 80$, ou 64 questions.
Abel a réussi 70 % des 30 questions portant sur l'algèbre, c'est-à-dire à $\frac{70}{100} \times 30$, ou 21 questions.
Il a donc réussi $64 - 21$, ou 43 questions portant sur la géométrie.

Réponse : (A)

20. On écrit d'abord tous les triangles qui ont une base sur DEF (c'est-à-dire avec un côté DE, DF ou EF) : DAE, DBE, DCE, DAF, DBF, DCF, EAF, EBF, ECF
Or les triangles DAE, DBE, DAF, DCF, EBF et ECF sont évidemment rectangles, tandis que les triangles DCE et EAF ne le sont pas, car ils ont chacun un angle de 135°.
Qu'en est-il du triangle DBF?
Le triangle DBF est rectangle, car $\angle DBE = \angle EBF = 45^\circ$, d'où $\angle DBF = 90^\circ$.
Dans la liste ci-dessus, il y a deux triangles non rectangles.



Si on construit tous les triangles qui ont une base sur ABC, on trouvera aussi deux triangles non rectangles. (On peut le vérifier en faisant subir une réflexion aux triangles de la première liste, par rapport à un axe de réflexion horizontal, à mi-chemin entre DEF et ABC.)
On remarque qu'il est impossible de construire un triangle qui n'a pas un côté sur ABC ou sur DEF, puisque les seuls autres côtés sont AD, AE, AF, BD, BE, BF, CD, CE et CF et il est impossible de former un triangle avec n'importe quels trois de ces côtés, chaque côté ayant une extrémité à A, B ou C et l'autre extrémité à D, E ou F.
On peut former quatre triangles qui ne sont pas rectangles. RÉPONSE : (E)

Partie C

21. Puisque dix personnes attendent pour subir une intervention et que les interventions sont prévues à intervalles de 15 minutes, la première commencera à 8 h et la dixième commencera après neuf intervalles de 15 minutes.
Or neuf intervalles de 15 minutes correspondent à 135 minutes, ou 2 heures et 15 minutes.
La dixième intervention commencera donc à 10 h 15 et se terminera à 11 h.
RÉPONSE : (D)

22. *Solution 1*
Puisque Line a gagné 95 % des 20 parties qu'elle a joueés, elle a gagné $\frac{95}{100} \times 20$, ou 19 parties. On peut aussi dire qu'elle a gagné $\frac{19}{20}$ des parties jouées. Or 96 %, exprimé sous forme fractionnaire, est égal à $\frac{96}{100}$, ou $\frac{24}{25}$. Si on compare les rapports $\frac{19}{20}$ et $\frac{24}{25}$, on voit que Line doit gagner les 5 parties suivantes $\left(\frac{19+5}{20+5} = \frac{24}{25}\right)$ pour qu'elle ait gagné 24 des 25 parties jouées, ou 96 % des parties jouées.

Solution 2

Puisque Line a gagné 95 % des 20 parties qu'elle a joueés, elle a gagné $\frac{95}{100} \times 20$, ou 19 parties.

Soit x le nombre de parties consécutives qu'elle doit gagner pour obtenir un pourcentage de parties gagnées égal à 96 %. Le rapport du nombre de parties gagnées au nombre de parties jouées, après ces x parties, est égal à : $\dfrac{\text{Nombre de parties gagnées}}{\text{Nombre de parties jouées}} = \dfrac{19+x}{20+x}$.

On a donc $\dfrac{19+x}{20+x} = \dfrac{96}{100}$, ou $\dfrac{19+x}{20+x} = \dfrac{24}{25}$.

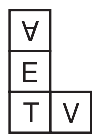
Par observation ou par tâtonnements, on obtient $x = 5$.

Line doit donc gagner les cinq parties suivantes. Réponse : (D)

23. On déplie le cube, c'est-à-dire qu'on fait son développement.

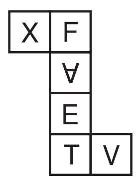
La première position du cube donne le développement suivant :

La troisième position du cube nous permet d'ajouter le A au-dessus du E.



La deuxième position du cube nous permet d'ajouter le F au-dessus du A et le X à la gauche du F.

On obtient le développement suivant :



Si on replie ce cube, en plaçant le A en avant, le F au-dessus et le E en dessous, il y aura un V renversé sur la face à droite et la lettre sur la face ombrée est donc un V. Réponse : (E)

24. Pour mieux comprendre la régularité, on la récrit, à droite, en montrant comment les nombres ont été obtenus :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 2 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 2 & & \\ & 1 & & 4 & & 5 & & 2 & \\ 1 & & 5 & & 9 & & 7 & & 2 \\ \iddots & & & & \vdots & & & & \ddots \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 2 & & & \\ & & 1 & & 1+2 & & 2 & & \\ & 1 & & 1+3 & & 3+2 & & 2 & \\ 1 & & 1+4 & & 4+5 & & 5+2 & & 2 \\ \iddots & & & & \vdots & & & & \ddots \end{array}$$

En examinant la régularité à droite, on s'aperçoit que chaque nombre d'un ligne paraît *deux fois* dans la ligne suivante. (Chaque nombre à l'extrémité d'une ligne, soit 1 ou 2, paraît seul et paraît une fois dans une addition dans la ligne suivante. Les autres nombres d'une ligne paraissent deux fois dans des additions de la ligne suivante.)

Donc la somme des nombres d'une ligne doit être égale à deux fois la somme des nombres de la ligne précédente.
On peut le vérifier :

Somme des nombres de la 1re ligne :	3
Somme des nombres de la 2e ligne :	6
Somme des nombres de la 3e ligne :	12
Somme des nombres de la 4e ligne :	24

Pour obtenir la somme des nombres de la 13e ligne, on doit donc calculer la somme des nombres de la 1re ligne et la multiplier par 2 douze fois. Cela donnera 3×2^{12}, c'est-à-dire 3×4096, ou $12\,288$.

Réponse : (D)

25. Dans la solution qui suit, on examine chaque possibilité. On peut aussi obtenir une solution plus rapidement par tâtonnements.

On écrit la multiplication en remplaçant les cases par des lettres :

$$\begin{array}{ccc} & A & B \\ & \times & C \\ \hline D & E & F \end{array}$$

On veut ensuite remplacer les lettres *A*, *B*, *C*, *D*, *E* et *F* par les chiffres de 1 à 6.

C peut-il être égal à 1?
Si *C* est égal à 1, il faut que *B* et *F* représentent le même chiffre, ce qui est interdit, car chaque chiffre doit être utilisé une seule fois. Donc *C* n'est pas égal à 1.

C peut-il être égal à 5?
Si *C* est égal à 5 et si *B* est impair, *F* doit lui aussi être égal à 5, ce qui est interdit. Si *C* est égal à 5 et si *B* est pair, alors *F* doit être égal à 0, ce qui est interdit. Donc *C* n'est pas égal à 5.

C peut-il être égal à 6?
Si *C* est égal à 6, on examine les valeurs possibles de *B* et les valeurs correspondantes de *F* :

B	*F*	
1	6	Interdit car il y a deux 6.
2	2	Interdit car il y a deux 2.
3	8	Interdit car il ne peut y avoir un 8.
4	4	Interdit car il y a deux 4.
5	0	Interdit car il ne peut y avoir un 0.

Puisque tous ces résultats sont interdits, *C* n'est pas égal à 6.

C peut-il être égal à 4?
Si *C* est égal à 4, on utilise un tableau semblable au précédent pour démontrer que *B* doit être égal à 3 et que *F* doit être égal à 2. On y reviendra plus loin.

C peut-il être égal à 3?

Si C est égal à 3, on utilise un tableau semblable au précédent pour démontrer que B doit être égal à 2 ou à 4 et que F doit alors être égal à 6 ou à 2. On y reviendra.

C peut-il être égal à 2?

Si C est égal à 2, on utilise un tableau semblable au précédent pour démontrer que B doit être égal à 3 et que F doit alors être égal à 6. Dans ce cas, on a :

$$\begin{array}{ccc} & A & 3 \\ & \times & 2 \\ \hline D & E & 6 \end{array}$$

Puisque le produit $DE6$ est formé de trois chiffres et que A doit égaler 1, 4 ou 5, il faut que A soit égal à 5. On obtient alors le produit $53 \times 2 = 106$ qui est interdit, car il ne peut y avoir un 0.
On revient au cas où C est peut-être égal à 4. On a vu que B doit alors égaler 3 et que F doit égaler 2. A doit alors égaler 1, 5, ou 6, et chaque possibilité aboutit à une résultat interdit.

On conclut que C doit être égal à 3, puisque c'est le seul cas qui reste. Il faut tout de même vérifier que la multiplication est possible.
En utilisant le même argument que ci-haut, on obtient $54 \times 3 = 162$. Donc $C = 3$. Réponse : (B)

Partie A

1. On obtient :

$$1{,}000 + 0{,}101 + 0{,}011 + 0{,}001 = 1{,}113$$

RÉPONSE : (B)

2. On peut faire des additions d'abord, ensuite les soustractions, puis les dernières additions :

$$\begin{aligned}&1+2+3-4+5+6+7-8+9+10+11-12\\&=6-4+18-8+30-12\\&=2+10+18\\&=30\end{aligned}$$

RÉPONSE : (A)

3. Chacune des 25 œuvres de charité reçoit un vingt-cinquième du total, soit $3109\ \$ \div 25$, ou 124,36 \$.

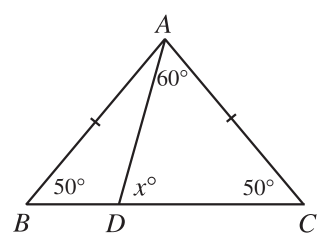
RÉPONSE : (E)

4. Le carré de la racine carrée de 17 est $\left(\sqrt{17}\right)^2$, ce qui est égal à 17. Mettre au carré est l'opération réciproque de prendre la racine carrée.

RÉPONSE : (C)

5. Puisque le triangle ABC est isocèle, $\angle ACB = \angle ABC = 50^\circ$.
Puisque la somme des mesures des angles du triangle ACD est égale à 180°, alors :

$$\begin{aligned}x^\circ + 60^\circ + 50^\circ &= 180^\circ\\ x &= 70\end{aligned}$$



RÉPONSE : (A)

6. *Solution 1*
On peut défaire les opérations en soustrayant d'abord 13, puis en divisant par 2, ce qui donne $(89-13) \div 2$, ou 38.

Solution 2
Soit x le nombre. On a $2x + 13 = 89$. Donc $2x = 76$, d'où $x = 38$.

RÉPONSE : (D)

7. L'étendue de température est égale à la différence entre le maximum et le minimum. On calcule l'étendue dans le tableau suivant.

Jour	Étendue (°C)
Lundi	$5-(-3)=8$
Mardi	$0-(-10)=10$
Mercredi	$-2-(-11)=9$
Jeudi	$-8-(-13)=5$
Vendredi	$-7-(-9)=2$

La plus grande étendue a été obtenue mardi. RÉPONSE : (B)

8. On écrit d'abord les nombres sous forme décimale pour mieux les comparer.

$$\begin{aligned} \sqrt{5} &= 2{,}236... \\ 2{,}1 &= 2{,}1 \\ \tfrac{7}{3} &= 2{,}333... \\ 2{,}0\overline{5} &= 2{,}055... \\ 2\tfrac{1}{5} &= 2{,}2 \end{aligned}$$

On les place en ordre, du plus petit au plus grand : $2{,}0\overline{5}$, $2{,}1$, $2\frac{1}{5}$, $\sqrt{5}$, $\frac{7}{3}$.

Le nombre du milieu est $2\frac{1}{5}$. RÉPONSE : (E)

9. Puisque un tiers des 30 élèves de la classe sont des filles, il y a 10 filles dans la classe. Il y a donc 20 garçons dans la classe. Trois quarts des 20 garçons jouent au basket-ball. Il y a donc 15 garçons qui jouent au basket-ball. RÉPONSE : (E)

10. On récrit l'addition en colonne, tout en écrivant trois décimales pour chaque nombre :

$$\begin{array}{r} 15{,}200 \\ 1{,}520 \\ 0{,}15\square \\ +\ \square{,}128 \\ \hline 20{,}000 \end{array}$$

Puisque la somme des chiffres de la dernière colonne se termine en 0, la case dans cette colonne doit contenir un 2. On obtient alors :

$$\begin{array}{r} 15,200 \\ 1,520 \\ 0,152 \\ +\ \square,128 \\ \hline 20,000 \end{array}$$

On additionne les chiffres des trois colonnes à droite de la virgule. La somme des chiffres de la colonne des dixièmes nous donne une retenue de 1 pour la colonne des unités. Puisque la somme de la retenue et des chiffres de la colonne des unités se termine en 0, la case doit contenir un 3. La somme des chiffres dans les deux cases est donc égale à 5. (On vérifie que $15{,}2 + 1{,}52 + 0{,}152 + 3{,}128 = 20$.) RÉPONSE : (A)

Partie B

11. D'après le diagramme, il y a 10, 14, 7, 9 et 13 filles dans les cinq classes. La moyenne du nombre de filles par classe est égale à $\frac{10+14+7+9+13}{5}$, c'est-à-dire à $\frac{53}{5}$, ou 10,6.

RÉPONSE : (E)

12. L'aire de la photo initiale est égale à 20×25, ou 500 cm2. L'aire de la grande photo est égale à 25×30, ou 750 cm2. L'augmentation de l'aire est égale à $750 - 500$, ou 250 cm2.

On a $\frac{\text{augmentation de l'aire}}{\text{aire initiale}} = \frac{250}{500}$, ou $\frac{\text{augmentation de l'aire}}{\text{aire initiale}} = \frac{1}{2}$.

Ce rapport est égal à 50 %. RÉPONSE : (B)

13. Les mesures des angles sont dans un rapport de 2 : 3 : 4. Cela signifie que la mesure du premier angle se divise en 2 groupes, celle du deuxième angle en 3 groupes et celle du troisième angle en 4 groupes pour un total de 9 groupes. Or la somme de ces mesures est égale à 180°. Chaque groupe contient donc 20°. Le plus grand angle mesure donc $4 \times 20°$, ou 80°. On peut présenter cet argument sous forme algébrique, ou x représente le nombre de degrés de chaque groupe :

Puisque les mesures des angles sont dans un rapport de 2 : 3 : 4, soit $2x$, $3x$ et $4x$ les mesures respectives des angles en degrés. Puisque la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°, alors :

$$\begin{aligned} 2x + 3x + 4x &= 180 \\ 9x &= 180 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Le plus grand angle mesure donc $4 \times 20°$, ou 80°. RÉPONSE : (C)

14. *Solution 1*

Puisque Josée a inscrit une note plus haute pour son meilleur résultat, cela ne change pas l'ordre des résultats lorsqu'elle les écrit en ordre croissant.
La note minimum n'est donc pas changée. De plus, la médiane (la note du milieu) n'est pas changée.
L'étendue et la moyenne sont-elles changées?
L'étendue est la différence entre la note la plus haute et la note la plus basse. En écrivant une note plus élevée pour son meilleur résultat, l'étendue devient plus grande.
Pour calculer la moyenne, on additionne les résultats et on divise la somme par 7. En écrivant une note plus élevée, la somme est changée et la moyenne aussi.
Donc deux des nombres sont changés, soit l'étendue et la moyenne.

Solution 2

Supposons que Josée a eu pour résultats 80, 81, 82, 83, 84, 85 et 86, mais qu'elle a écrit 100 au lieu de 86.
Avec ses vrais résultats, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, on obtient :

Moyenne	$\frac{80+81+82+83+84+85+86}{7}=83$
Médiane	83
Note minimum	80
Étendue	$86-80=6$

Avec les résultats 80, 81, 82, 83, 84, 85, 100, on obtient :

Moyenne	$\frac{80+81+82+83+84+85+100}{7}=85$
Médiane	83
Note minimum	80
Étendue	$100-80=20$

Donc deux des nombres sont changés, soit l'étendue et la moyenne. RÉPONSE : (C)

15. L'aire de la base du prisme est égale à 10×2, ou 20 m2. La hauteur du prisme (c'est-à-dire la profondeur de la fosse) est égale à 50 cm, ou 0,5 m. Le volume est donc égal à $20\times 0{,}5$, ou 10 m3.
Puisque la fosse est à moitié pleine au départ, il faut donc ajouter 5 m3 de sable pour la remplir.

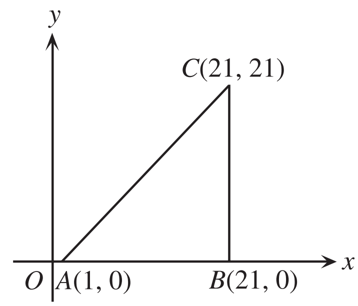
RÉPONSE : (B)

16. On évalue cette « fraction continue » étape par étape :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)}}=\frac{1}{1+\frac{2}{3}}=\frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)}=\frac{3}{5}$$

RÉPONSE : (A)

17. Le périmètre du triangle est la somme des longueurs des côtés. Pour faciliter le travail, on fait une esquisse de la situation. Puisque le côté AB est sur l'axe des x et que le côté BC est parallèle à l'axe des y, le triangle est rectangle et on peut utiliser le théorème de Pythagore pour calculer la longueur de l'hypoténuse AC.
Or $AB = 20$ et $BC = 21$. Donc :



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AC^2 = 20^2 + 21^2$$
$$AC^2 = 400 + 441$$
$$AC^2 = 841$$
$$AC = 29$$

Le périmètre est égal à $20 + 21 + 29$, ou 70. RÉPONSE : (A)

18. *Solution 1*

Si $-3x^2 < -14$, alors $3x^2 > 14$, d'où $x^2 > \frac{14}{3}$, ou $x^2 > 4\frac{2}{3}$.
Les seuls nombres de l'ensemble qui vérifient cette inéquation sont –5, –4, –3 et 3.

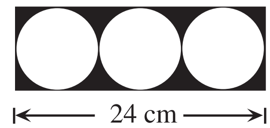
Solution 2

Pour chaque nombre x de l'ensemble, on calcule la valeur de $-3x^2$:

x	$-3x^2$
–5	–75
–4	–48
–3	–27
–2	–12
–1	–3
0	0
1	–3
2	–12
3	–27

Les nombres –5, –4, –3 et 3 vérifient l'inéquation. RÉPONSE : (D)

19. Puisque les cercles se touchent et qu'ils touchent aux extrémités du rectangle, la longueur du rectangle, soit 24 cm, est égale à trois fois le diamètre du cercle.
Chaque cercle a donc un diamètre de 8 cm et un rayon de 4 cm, tandis que le rectangle a une hauteur de 8 cm.
On a donc :



$$\begin{aligned}&\text{Aire de la région ombrée}\\&= \text{Aire du rectangle} - \text{Aire des trois cercles}\\&= (24\times 8) - 3\left[\pi(4)^2\right]\\&= 192 - 48\pi\\&\approx 192 - 150{,}80 \qquad \text{(en utilisant } \pi \approx 3{,}14)\\&= 41{,}20\end{aligned}$$

L'aire de la région ombrée, arrondie au centimètre carré près, est égale à $41\ \text{cm}^2$.

Réponse : (A)

20. Le problème est difficile à cause des deux lettres identiques. On peut surmonter cette difficulté en collant temporairement une étiquette T par dessus un des S, ce qui fait que les lettres sont maintenant G, A, U, S et T. On veut maintenant calculer la probabilité pour que Luc choisisse le S et le T lorsqu'il choisit deux tuiles au hasard.
Supposons que Luc choisit les tuiles une à la fois. Pour son premier choix, il peut choisir n'importe quelle des 5 tuiles, ce qui fait 5 choix. Pour chacun de ces choix, il peut choisir n'importe quelle des 4 tuiles qui restent, ce qui fait 4 choix. Il y a donc 20 choix possibles pour les deux tuiles. (On peut écrire les 20 choix au long pour s'assurer que le nombre total de choix est égal à 5×4 et non pas à $5+4$.)
Dans deux des 20 choix, on retrouve les lettres *S* et *T*. Or dans ces deux choix, on a vraiment choisi les deux S. La probabilité de choisir les deux S est donc égale à $\frac{2}{20}$, ou $\frac{1}{10}$.

Réponse : (D)

Partie C

21. Examinons d'abord quelques exemples de quatre entiers positifs consécutifs dont la somme est un multiple de 5. Cela nous permettra peut-être de conclure que quelques-uns des énoncés ne sont pas toujours vrais.
On considère 1, 2, 3 et 4, dont la somme est 10. On peut éliminer le choix (A), car la somme ne se termine pas par un 5. On peut aussi éliminer le choix (B), car le plus grand des nombres ne se termine pas par un 9.
On considère maintenant 6, 7, 8 et 9, dont la somme est 30, et que l'on peut découvrir par tâtonnements. On peut éliminer le choix (C), car le plus petit des nombres n'est pas impair. On peut aussi éliminer le choix (E), car aucun de ces nombres ne se termine par un 3.
Le seul choix qui reste est (D).

Pourquoi l'énoncé (D) est-il toujours vrai? Il est plutôt difficile de s'en convaincre. On devra faire appel à l'algèbre.
Si n est le plus petit des entiers, les trois autres sont $n+1$, $n+2$ et $n+3$. Leur somme est donc $n+n+1+n+2+n+3$, ou $4n+6$.
Or cette expression donne toujours des valeurs paires. Pour qu'elle donne un multiple de 5, l'expression $4n+6$ doit égaler un nombre qui se termine par 0. Pour cela, il faut que $4n$ égale un nombre qui se termine par 4. Quels sont les chiffres des unités possibles pour n? Les seules possibilités sont 1 et 6 ($4\times 1=4$ et $4\times 6=2\underline{4}$). Dans le premier cas, les quatre nombres se termineraient par 1, 2, 3 et 4 et dans le deuxième cas, les quatre nombres se termineraient par 6, 7, 8 et 9. Aucun de ces nombres n'est un multiple de 5. RÉPONSE : (D)

22. *Solution 1*
Si Carmina remplace les pièces de cinq cents par des pièces de dix cents et vice versa, elle gagne 1,80 \$. Puisqu'on gagne 5 cents lorsqu'on remplace une pièce de cinq cents par une pièce de dix cents et que l'on perd 5 cents dans le cas contraire, elle a gagné $\frac{180}{5}$, ou 36 fois plus souvent qu'elle n'a perdu. Elle devait donc avoir 36 pièces de plus de cinq cents que de pièces de dix cents.
Ces 36 pièces de cinq cents supplémentaires valent 1,80 \$. En plus de ces 36 pièces de cinq cents, elle a un nombre égal de pièces de cinq cents et de dix cents. Ensemble, une pièce de cinq cents et une pièce de dix cents valent 15 cents. Elle doit avoir $\frac{180}{15}$, ou 12 ensembles de pièces de cinq cents et de dix cents, c'est-à-dire 12 pièces de cinq cents et 12 pièces de dix cents.
En tout, Carmina a donc 48 pièces de cinq cents et 12 pièces de dix cents, pour un total de 60 pièces.

Solution 2
Supposons que Carmina a c pièces de cinq cents et d pièces de dix cents.
La valeur de ces pièces est égale à 360 cents, ce qui donne $5c+10d=360$.
Si elle échange les pièces de cinq cents pour des pièces de dix cents et vice versa, la valeur de ces pièces sera égale à 540 cents, ce qui donne $10c+5d=540$.
Si on additionne ces équations, membre par membre, on obtient :

$$\begin{aligned} 5c+10d+10c+5d &= 360+540 \\ 15c+15d &= 900 \\ c+d &= 60 \end{aligned}$$

Il y a donc 60 pièces en tout. (On remarque qu'il n'a pas été nécessaire de calculer le nombre de pièces de chaque sorte!)

Solution 3
Supposons que Carmina a c pièces de cinq cents et d pièces de dix cents.
La valeur de ces pièces est égale à 360 cents, ce qui donne $5c+10d=360$, ou $c+2d=72$, d'où $c=72-2d$.

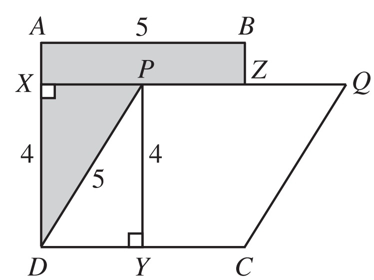
Après l'échange, on a :

$$\begin{aligned} 5d + 10c &= 540 \\ 5d + 10(72 - 2d) &= 540 \\ 5d + 720 - 20d &= 540 \\ 180 &= 15d \\ d &= 12 \end{aligned}$$

Puisque $d = 12$, alors $c = 72 - 2(12)$, ou $c = 48$.
Il y a donc 60 pièces en tout. Réponse : (D)

23. Supposons que les 12 plantes de tomates portent respectivement 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12 tomates. Il y aurait alors 78 tomates. Or on sait qu'il y a vraiment 186 tomates. Il y a donc 108 tomates de plus qu'il faut distribuer. Pour que les nombres demeurent consécutifs, il faut distribuer les 108 tomates également aux 12 plantes. Chacune doit donc en recevoir 9 de plus.
Les plantes ont donc 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 et 21 tomates respectivement.
La dernière plante porte donc 21 tomates. (On peut vérifier que $10 + 11 + ... + 21 = 168$.)
Réponse : (D)

24. Puisque *ABCD* est un carré avec une aire de 25 cm^2, ses côtés ont une longueur de 5 cm. Puisque *PQCD* est un losange, il est aussi un parallélogramme. Son aire est donc égale au produit de sa base et de sa hauteur.
On prolonge QP jusqu'au point *X* sur *AD*. Au point *P*, on abaisse une perpendiculaire jusqu'au point *Y* sur *DC*.



L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du rectangle *ABZX* plus l'aire du triangle *PXD*.

Puisque le losange *PQCD* a une aire de 20 cm^2 et une base de 5 cm, sa hauteur *PY* doit mesurer 4 cm. On ajoute donc au diagramme les renseignements $DX = 4$, $DP = 5$ (puisque *PQCD* est un losange), $AX = 1$ et $AB = 5$.

Le rectangle *ABZX* a une base de 5 cm et une hauteur de 1 cm. Il a donc une aire de 5 cm^2.
Le triangle *PXD* est rectangle en *X*. Puisque $DP = 5$ et $DX = 4$, alors $PX = 3$ selon le théorème de Pythagore. L'aire du triangle *PXD* est égale à $\frac{3 \times 4}{2}$, ou 6 cm2.

L'aire de la région ombrée est donc égale à 11 cm^2. Réponse : (C)

25. Puisqu'une des diagonales est remplie, on connaît le produit des nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale, soit $6 \times 12 \times 24$, ou 1728.
La première rangée et la première colonne ont chacune deux cases occupées. La troisième case doit donc contenir un nombre égal à 1728, divisé par le produit des nombres des deux autres cases.

On a donc :

N	$\frac{1728}{24N}$	24
$\frac{1728}{6N}$	12	
6		$\frac{1728}{12N}$

On simplifie pour obtenir :

N	$\frac{72}{N}$	24
$\frac{288}{N}$	12	
6		$\frac{144}{N}$

On remplit les deux autres cases en procédant de la même façon :

N	$\frac{72}{N}$	24
$\frac{288}{N}$	12	$\frac{1}{2}N$
6	$2N$	$\frac{144}{N}$

Puisque chaque case doit contenir un entier strictement positif, alors les nombres N, $2N$, $\frac{1}{2}N$, $\frac{72}{N}$, $\frac{144}{N}$ et $\frac{288}{N}$ sont des entiers strictement positifs.
On examine ces expressions une à une.
Si N est un entier, $2N$ est aussi un entier.
Si $\frac{1}{2}N$ est un entier, alors N doit être un entier pair.
Si $\frac{72}{N}$ est un entier, alors N doit être un diviseur de 72.
Si $\frac{144}{N}$ est un entier, alors N doit être un diviseur de 144. Or puisque N doit être un diviseur de 72 et que $144 = 2 \times 72$, alors N sera de ce fait un diviseur de 144.
De même, si N est un diviseur de 72, il sera de ce fait un diviseur de 288 et $\frac{288}{N}$ sera un entier.
Pour résumer, N doit être un diviseur pair de 72.
Les diviseurs positifs de 72 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 et 72.
Neuf d'entre eux sont pairs. Il y a donc 9 valeurs possibles pour N. RÉPONSE : (C)