Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre en mathématiques et en
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Solutions du Concours Galois 2003 (10^{e} – année)

(Secondaire IV au Québec)

pour les prix du
The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

1. a) *Solution 1*

Puisqu'on cherche 5 carrés parfaits consécutifs dont la somme est égale à 1815, le carré du milieu devrait être près de $\frac{1}{5}(1815)$, ou 363.

Quel est le carré parfait le plus près de 363? À l'aide d'une calculatrice, on obtient $\sqrt{363} \approx 19{,}05$. Donc 19^2, ou 361, est le carré parfait le plus près de 363.

On vérifie : $17^2 + 18^2 + 19^2 + 20^2 + 21^2$ est égal à $289 + 324 + 361 + 400 + 441$, ou 1815.

Le plus grand des entiers est 21.

Solution 2

Soit n le plus petit des 5 entiers positifs consécutifs. Donc :

$$\begin{aligned} n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + (n+4)^2 &= 1815 \\ n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 + n^2 + 6n + 9 + n^2 + 8n + 16 &= 1815 \\ 5n^2 + 20n + 30 &= 1815 \\ n^2 + 4n + 6 &= 363 \\ n^2 + 4n - 357 &= 0 \\ (n+21)(n-17) &= 0 \end{aligned}$$

Puisque n est positif, on a $n = 17$. Le plus grand des entiers est $n+4$, ou 21.

Solution 3

Soit m l'entier du milieu. (Ce choix facilite les manipulations algébriques.)

Les 5 entiers positifs consécutifs sont donc $m-2$, $m-1$, m, $m+1$ et $m+2$. Donc :

$$\begin{aligned} (m-2)^2 + (m-1)^2 + m^2 + (m+1)^2 + (m+2)^2 &= 1815 \\ m^2 - 4m + 4 + m^2 - 2m + 1 + m^2 + m^2 + 2m + 1 + m^2 + 4m + 4 &= 1815 \\ 5m^2 + 10 &= 1815 \\ 5m^2 &= 1805 \\ m^2 &= 361 \end{aligned}$$

Puisque m est positif, on a $m = 19$. Le plus grand des entiers est $m+2$, ou 21.

b) *Solution 1*

Soit n le plus petit des cinq entiers consécutifs.

La somme de leurs carrés est égale à :

$$\begin{aligned} & n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + (n+4)^2 \\ &= n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 + n^2 + 6n + 9 + n^2 + 8n + 16 \\ &= 5n^2 + 20n + 30 \\ &= 5\left(n^2 + 4n + 6\right) \end{aligned}$$

Puisque 5 est un facteur de la somme et que le deuxième facteur est un entier (puisque n est un entier), la somme des carrés de n'importe quels 5 entiers consécutifs est toujours divisible par 5.

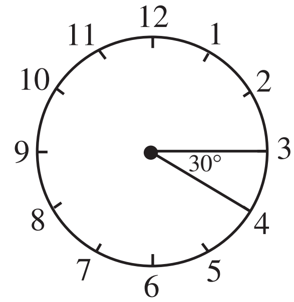
Solution 2
Soit m l'entier du milieu. (Ce choix facilite les manipulations algébriques.)
Les 5 entiers positifs consécutifs sont donc $m-2$, $m-1$, m, $m+1$ et $m+2$. Donc :

$$\begin{aligned}
&(m-2)^2+(m-1)^2+m^2+(m+1)^2+(m+2)^2 \\
&= m^2-4m+4+m^2-2m+1+m^2+m^2+2m+1+m^2+4m+4 \\
&= 5m^2+10 \\
&= 5\left(m^2+2\right)
\end{aligned}$$

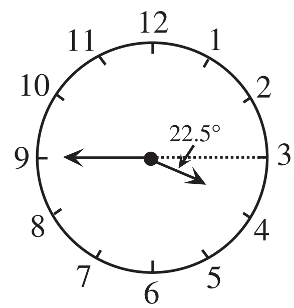
Puisque 5 est un facteur de la somme et que le deuxième facteur est un entier (puisque m est un entier), la somme des carrés de n'importe quels 5 entiers consécutifs est toujours divisible par 5.

Prolongement
Dans la partie a), on a vu que $17^2+18^2+19^2+20^2+21^2=1815$.
Pour exprimer 1815 comme somme de cinq entiers consécutifs, on peut d'abord déterminer le nombre du milieu, qui est aussi la moyenne des cinq nombres, soit $\frac{1}{5}(1815)$, ou 363. On a donc $361+362+363+364+365=1815$.
On cherche le prochain nombre, plus grand que 1815, qui vérifie la même propriété.
Cherchons d'abord le prochain entier qui est la somme des carrés de 5 entiers consécutifs. Dans la partie b), on a vu que si m est le nombre du milieu parmi 5 entiers consécutifs, la somme des carrés des 5 entiers est égale à $(m-2)^2+(m-1)^2+m^2+(m+1)^2+(m+2)^2$, ou $5n^2+10$. On a vu que si $m=19$, la somme des carrés est égale à 1815. On obtiendra donc la prochaine somme des carrés de 5 entiers consécutifs en posant $m=20$, ce qui donne une somme de $5(20)^2+10$, ou 2010.
Ce nombre est-il aussi la somme de 5 entiers consécutifs?
Le nombre du milieu serait égal à $\frac{1}{5}(2010)$, ou 402, ce qui est bien un entier. On peut vérifier que $400+401+402+403+404=2010$.
Donc le nombre 2010 est le premier nombre, après 1815, qui est à la fois la somme de 5 entiers consécutifs et la somme des carrés de 5 entiers consécutifs.
(D'après ce qu'on a fait, il semble bien que *n'importe quel* multiple de 5 est la somme de 5 entiers consécutifs. Pouvez-vous le prouver?)

2. a) Dans l'intervalle de 3 h à 3 h 45, $\frac{3}{4}$ d'une heure s'est écoulée. La petite aiguille balaye donc $\frac{3}{4}$ de l'angle entre le 3 et le 4.
On forme des rayons joignant le 3 et le 4 au centre. Ces rayons forment un angle qui est $\frac{1}{12}$ d'un angle plein (360°), soit 30°.
La petite aiguille balaye donc un angle de $\frac{3}{4}(30°)$, ou 22,5°.



b) *Solution 1*
À 3 h 45, la grand aiguille pointe vers le 9, tandis que la petite aiguille a balayé un angle de 22,5° en s'éloignant du 3 vers le 4. Si la petite aiguille avait pointé vers le 3, les aiguilles formeraient un angle de 180°. Puisqu'elle a avancé de 22,5°, l'angle entre les aiguilles mesure $180^\circ - 22{,}5^\circ$, ou 157,5°.

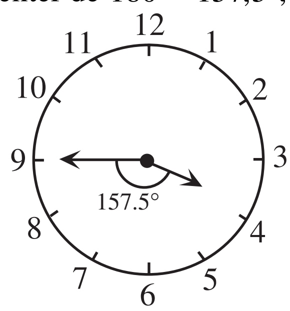


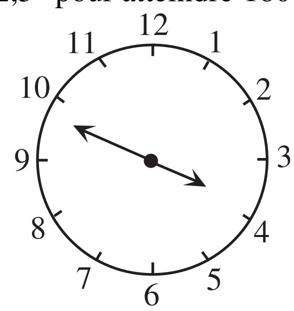
Solution 2
À chaque heure, la grande aiguille balaie un angle de 360°, tandis que la petite aiguille balaie un angle de 30°. Donc dans une période d'une heure, la grande aiguille balaie un angle qui mesure 330° de plus que celui balayé par la petite aiguille. Dans une minute, la grande aiguille balaie donc un angle qui mesure $5{,}5^\circ$ de plus que celui balayé par la petite aiguille.
Dans l'intervalle de 3 h à 3 h 45, la grande aiguille balaie un angle qui mesure $5{,}5^\circ \times 45$, ou 247,5° de plus que celui balayé par la petite aiguille.
Or à 3 h, la grande aiguille avait un retard de 90° sur la petite aiguille. À 3 h 45, elle aura donc une avance de $247{,}5^\circ - 90^\circ$, ou 157,5°. À 3 h 45, l'angle formé par les aiguilles mesure donc 157,5°.

c) *Solution 1*
À 3 h 45, l'angle formé par les aiguilles mesure $157{,}5^\circ$. Cet angle augmente, car la grande aiguille avance plus rapidement que la petite aiguille.
À chaque minute, la grande aiguille fait $\frac{1}{60}$ d'un tour. Elle balaie donc un angle de 6°.
À chaque minute, la petite aiguille fait $\frac{1}{60}$ de l'angle entre deux numéros, soit $\frac{1}{60}$ de $\frac{1}{12}$ d'un tour. Elle balaie donc un angle de $0{,}5^\circ$.
L'angle entre les aiguilles augmente donc de $6^\circ - 0{,}5^\circ$, ou 5,5° par minute, car les aiguilles avancent dans le même sens.

À partir de 3 h 45, l'angle doit augmenter de $180^\circ - 157{,}5^\circ$, ou 22,5° pour atteindre 180°.

Cela prendra donc $\frac{22{,}5}{5{,}5}$, ou 4,09 minutes (ou 4 minutes et 5 secondes).
Les aiguilles formeront un angle de 180° vers 3 h 49.

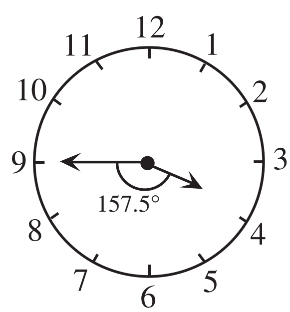


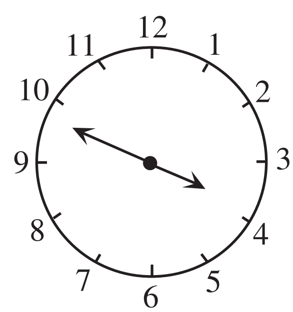


Solution 2

D'après la solution 2 de la partie b), on sait qu'à chaque minute la grande aiguille balaie un angle qui mesure $5{,}5^\circ$ de plus que l'angle balayé par la petite aiguille. À 3 h, la grande aiguille a un retard de 90° sur la petite aiguille et on veut que la grande aiguille ait une avance de 180° sur la petite.

La grande aiguille doit donc « combler » un angle de 270°, ce qui prendra $\frac{270}{5{,}5}$, ou $49\frac{1}{11}$ minutes.
Les aiguilles formeront donc un angle de 180° vers 3 h 49.

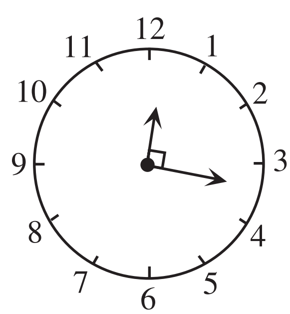


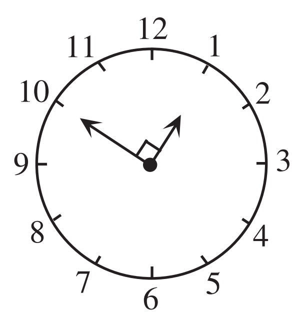


Prolongement

On peut supposer que la période de 12 heures va de 0 h à 12 h. Si elle commençait à une autre heure, il suffirait de faire subir une rotation à l'horloge.
On cherche les positions des aiguilles, dans chaque intervalle d'une heure, où les aiguilles forment un angle de 90°.

Entre 0 h et 1 h, la petite aiguille sera entre le 12 et le 1. Les aiguilles formeront un angle de 90° lorsque la grande aiguille sera entre le 3 et le 4 (entre 12 h 15 et 12 h 20) et lorsqu'elle sera entre le 9 et le 10 (entre 12 h 45 et 12 h 50).





Entre 1 h et 2 h, la petite aiguille sera entre le 1 et le 2. Les aiguilles formeront un angle de 90° à deux moments, soit lorsque la grande aiguille sera entre le 4 et le 5 et lorsqu'elle sera entre le 10 et le 11.
On reprend ce raisonnement pour chaque intervalle d'une heure. On obtient 2 positions des aiguilles dans chaque intervalle. Il semble donc qu'il y ait 24 positions des aiguilles qui forment un angle de 90°. Or si l'angle de 90° est formé sur l'heure, comme à 3 h et à

9 h, on aura compté une des deux positions deux fois. En effet, de 2 h à 3 h, la deuxième position est formée à 3 h. De 3 h à 4 h, la première position est aussi formée à 3 h. Il en est de même à 9 h. Il faut donc soustraire 2 du 24.
Pendant une période de 12 heures, les aiguilles forment 22 fois un angle de 90°.

3. a) Voici un diagramme indiquant chaque mouvement.

Il s'agit d'une façon de jouer en 8 mouvements.

Départ	*V*	*V*		*D*	*D*
Glissement	*V*		*V*	*D*	*D*
Saut	*V*	*D*	*V*		*D*
Glissement	*V*	*D*	*V*	*D*	
Saut	*V*	*D*		*D*	*V*
Saut		*D*	*V*	*D*	*V*
Glissement	*D*		*V*	*D*	*V*
Saut	*D*	*D*	*V*		*V*
Glissement	*D*	*D*		*V*	*V*

De fait, il n'y a qu'une autre façon de réussir en 8 mouvements. Les mouvements sont les mêmes que ceux du diagramme précédent, sauf qu'à chaque mouvement, on bouge la pièce de dix cents au lieu de la pièce de vingt-cinq cents et vice versa.

(On peut vérifier qu'à chaque étape, il y a un seul mouvement possible qui permet de ne pas reculer.)

Départ	*V*	*V*		*D*	*D*
Glissement	*V*	*V*	*D*		*D*
Saut	*V*		*D*	*V*	*D*
Glissement		*V*	*D*	*V*	*D*
Saut	*D*	*V*		*V*	*D*
Saut	*D*	*V*	*D*	*V*	
Glissement	*D*	*V*	*D*		*V*
Saut	*D*		*D*	*V*	*V*
Glissement	*D*	*D*		*V*	*V*

b) Si on a 3 pièces de chaque sorte, il y aura 7 cases. Puisque seuls les sauts et les glissements sont permis et qu'une pièce ne peut sauter par dessus une autre pièce de la même sorte, les trois pièces de vingt-cinq cents seront toujours dans le même ordre. Ainsi la pièce de vingt-cinq cents qui se trouve dans la 3^{e} case finira dans la 7^{e} case, celle qui se trouve dans la 2^{e} case finira dans la 6^{e} case et celle qui se trouve dans la 1re case finira dans la 5^{e} case.
Chaque pièce de vingt-cinq cents bouge de 4 espaces pour un total de 12 espaces. De

même, chaque pièce de dix cents bouge de 4 espaces pour un total de 12 espaces. En tout, les pièces bougent de 24 espaces. S'il n'y avait que des glissements, il y aurait 24 mouvements en tout.

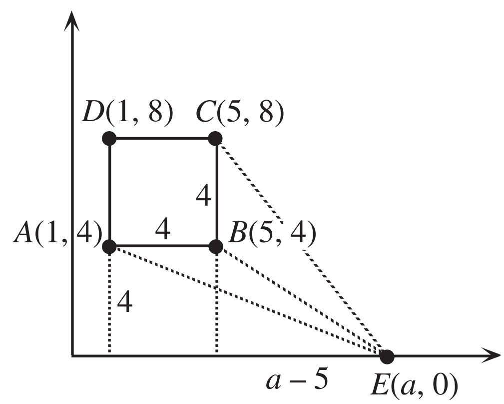
Or il est impossible de faire des glissements seulement. Il faut des sauts. Pour que les pièces de dix cents et les pièces de vingt-cinq cents changent de position, chaque pièce de dix cents doit sauter par dessus (ou passer en dessous de) chaque pièce de vingt-cinq cents. Il doit donc y avoir 9 sauts. Or chaque saut est l'équivalent de deux glissements, car la pièce bouge de deux espaces. Chaque saut « épargne » donc un mouvement. Le nombre de mouvements requis est donc au moins égal à $24-9$, ou 15. On a supposé que l'on n'a pas fait marche arrière. Le jeu exige donc au moins 15 mouvements.
On peut construire un diagramme qui illustre une joute en 15 mouvements.

Prolongement
On utilise la même stratégie que dans la partie b).
Si on a n pièces de chaque sorte, il y aura $2n+1$ cases.
Puisque seuls les sauts et les glissements sont permis et qu'une pièce ne peut sauter par dessus une autre pièce de la même sorte, les pièces de vingt-cinq cents seront toujours dans le même ordre.
Ainsi la pièce de vingt-cinq cents qui se trouve dans la 1$^{\text{re}}$ case finira dans la $(n+2)^{\text{e}}$ case, la pièce de vingt-cinq cents qui se trouve dans la 2$^{\text{e}}$ case finira dans la $(n+3)^{\text{e}}$ case, ainsi de suite, et la pièce de vingt-cinq cents qui se trouve dans la n^{e} case finira dans la $(2n+1)^{\text{e}}$ case.
Chacune des n pièces de vingt-cinq cents bouge donc de $n+1$ espaces. Les pièces de vingt-cinq cents bougent donc un total de $n(n+1)$ espaces.
De même, les pièces de dix cents bougent un total de $n(n+1)$ espaces.
En tout, les pièces bougent de $2n(n+1)$, ou $2n^2+2n$ espaces. S'il n'y avait que des glissements, il y aurait $2n^2+2n$ mouvements en tout.
En utilisant le même raisonnement que dans la partie c), on conclut que le nombre de mouvements requis est au moins égal à $2n^2+2n-n^2$, c'est-à-dire à n^2+2n, ou $n(n+2)$.
(On devrait aussi se demander s'il est possible de réussir le jeu en $n(n+2)$ mouvements. Pour y répondre, il faudrait décrire une stratégie qui permet de réussir en $n(n+2)$ mouvements, peu importe la valeur de n.)

4. a) Puisque $ABCD$ est un carré dont le côté AD a une longueur de 4, tous les côtés ont une longueur de 4. Le point B a donc pour coordonnées $(5,4)$ et le point C a pour coordonnées $(5,8)$. (Puisque AD est parallèle à l'axe des ordonnées, AB est parallèle à l'axe des abscisses.) L'aire du carré $ABCD$ est donc égale à 16.

Puisque les triangles CBE et ABE sont situés complètement à l'extérieur du carré $ABCD$, le point E doit être en dessous de la droite AB (ce qui est le cas) et à la droite de la droite CB, d'où $a > 5$.

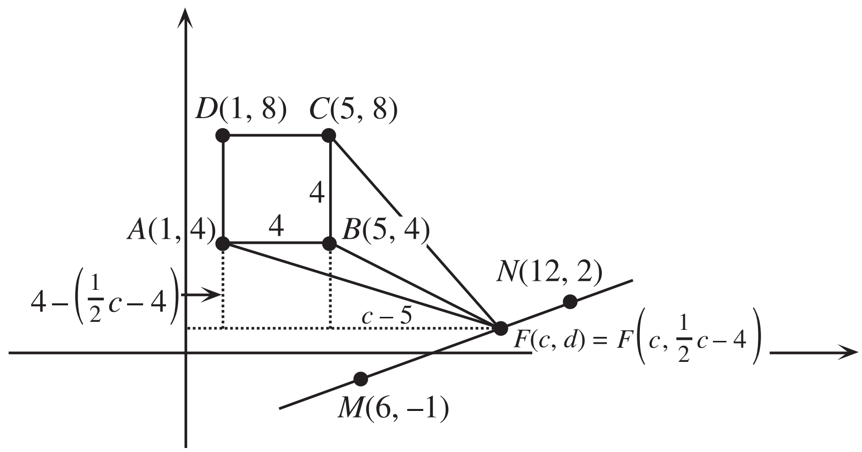
On considère d'abord le triangle ABE. Sa base AB a une longueur de 4. La hauteur correspondante a également une longueur de 4, puisque la base est parallèle à l'axe des abscisses. L'aire du triangle ABE est égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(4)$, ou 8. (On remarque que l'aire du triangle ABE est *toujours* égale à 8, peu importe la position de E sur l'axe des abscisses.)



On considère ensuite le triangle CBE. Sa base CB a une longueur de 4. La hauteur correspondante a une longueur de $a-5$, puisque la base est parallèle à l'axe des ordonnées. L'aire du triangle CBE est égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(a-5)$, ou $2a-10$.

On veut que la somme de ces aires soit égale à l'aire du carré. Donc $8+(2a-10)=16$, d'où $a=9$.
[On peut aussi obtenir ce résultat par la soustraction d'aires.]

b) Soit (c, d) les coordonnées du point F.
Puisque le triangle CBF est situé complètement à l'extérieur du carré, F est situé à la droite du carré. Donc $c > 5$. Puisque le triangle ABF est situé complètement à l'extérieur du carré, F est situé en dessous du carré. Donc $d < 4$.
On sait que F est situé sur la droite qui passe par les points M et N. Quelle est l'équation de cette droite? Sa pente est égale à $\frac{2-(-1)}{12-6}$, ou $\frac{1}{2}$. L'équation de la droite est donc $y-2=\frac{1}{2}(x-12)$, ou $y=\frac{1}{2}x-4$.
Puisque F est sur cette droite, on a $d=\frac{1}{2}c-4$ et F a pour coordonnées $\left(c, \frac{1}{2}c-4\right)$.



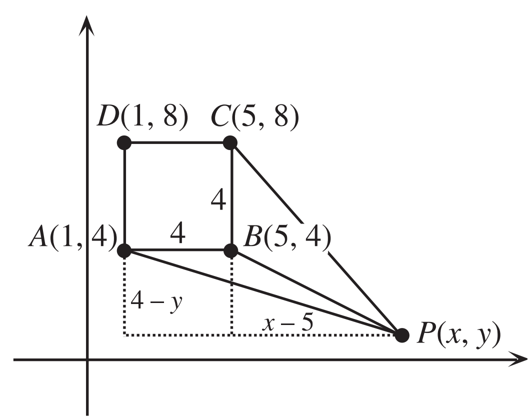
On considère le triangle ABF. Sa base AB a une longueur de 4. La hauteur correspondante est la distance verticale de F à la droite horizontale AB. Elle a une longueur de $4-\left(\frac{1}{2}c-4\right)$, ou $8-\frac{1}{2}c$. L'aire du triangle ABF est donc égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)\left(8-\frac{1}{2}c\right)$, ou $16-c$.

Le triangle CBF a une base, CB, de longueur 4. La hauteur correspondante est la distance horizontale de F à la droite verticale BC. Elle a une longueur de $c-5$. L'aire du triangle CBF est donc égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(c-5)$, ou $2c-10$.

On cherche donc la valeur de c pour laquelle $16-c+2c-10=16$, d'où $c=10$.
Le point F a donc pour coordonnées $(10,1)$.

Prolongement

Puisque le triangle CBP est situé complètement à l'extérieur du carré, P est situé à la droite du carré. Donc $x>5$. Puisque le triangle ABP est situé complètement à l'extérieur du carré, P est situé dessous le carré. Donc $y<4$.



On considère le triangle ABP. Sa base AB a une longueur de 4. La hauteur correspondante est la distance verticale de P à la droite horizontale AB. Elle a une longueur égale à $4-y$. L'aire du triangle ABP est donc égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(4-y)$, ou $8-2y$.

Le triangle CBP a une base CB de longueur 4. La hauteur correspondante est la distance horizontale de P à la droite verticale BC. Elle a une longueur égale à $x-5$. L'aire du triangle CBP est donc égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(x-5)$, ou $2x-10$.

Puisque la somme de l'aire des triangles CBP et ABP doit être égale à l'aire du carré, alors :

$$\begin{aligned}(8-2y)+(2x-10)&=16\\ 2x-18&=2y\\ y&=x-9\end{aligned}$$

L'ensemble de tous les points P tels que les triangles ABP et CBP soient situés complètement à l'extérieur du carré et que la somme de leur aire soit égale à l'aire du carré est le segment de tous les points sur la droite d'équation $y=x-9$, où $x>5$ et $y<4$.

[On pourrait aussi inclure les extrémités $(5,-4)$ et $(13,4)$ du segment si on accepte que l'aire d'un des triangles soit égale à 0.]