Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre
en mathématiques et en
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Solutions du Concours Fryer 2003 (9e – année)

(Secondaire III au Québec)

pour les prix du
The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

1. a) *Solution 1*

La moyenne des notes est égale à la somme des notes divisée par le nombre de notes.
On sait qu'il y a 32 élèves. On peut aussi le vérifier en examinant le diagramme.
On a donc $\dfrac{1(10)+2(30)+2(40)+1(50)+4(60)+6(70)+9(80)+4(90)+3(100)}{32}$,
c'est-à-dire $\dfrac{2240}{32}$, ou 70.
La moyenne des notes est égale à 70.

Solution 2

La moyenne des notes est égale à la somme des notes divisée par le nombre de notes.
Voici chaque note selon le diagramme : 10, 30, 30, 40, 40, 50, 60, 60, 60, 60, 70, 70, 70, 70, 70, 70, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 90, 90, 90, 90, 100, 100, 100
On additionne ces notes et on divise la somme par 32 pour obtenir une moyenne de 70.

b) Puisque Paul a une moyenne de 86 après 6 épreuves, il a un total de 6×86, ou 516 points. S'il obtient une note de 100 après la prochaine épreuve, il aura un total de $516+100$, ou 616 points. Sa nouvelle moyenne sera $\dfrac{616}{7}$, ou 88.

c) *Solution 1*

Si Marie obtient une note de 100, elle aura une moyenne de 90.
Si elle obtient une note de 70, elle aura une moyenne de 87.
Une différence de 30 points a donc pour effet de baisser sa moyenne de 3 points.
Puisque la moyenne est égale à la somme des points divisée par le nombre d'épreuves et qu'une différence de 30 points fait baisser sa moyenne de 3 points, elle a écrit $\dfrac{30}{3}$, ou 10 épreuves.

Solution 2

Supposons que Marie a écrit n épreuves, y compris la prochaine épreuve.
Puisqu'elle aura une moyenne de 90 points si elle obtient une note de 100 lors de la prochaine épreuve, elle aura un total de $90n$ points après n épreuves. Elle a donc un total de $90n-100$ points avant d'écrire cette $n^{\text{ième}}$ épreuve.
Puisqu'elle aura une moyenne de 87 points si elle obtient une note de 70 lors de la prochaine épreuve, elle aura un total de $87n$ points après n épreuves. Elle a donc un total de $87n-70$ points avant d'écrire cette $n^{\text{ième}}$ épreuve.
Or le total de points, avant cette dernière épreuve est le même dans les deux cas. Donc :

$$\begin{aligned} 87n-70 &= 90n-100 \\ 30 &= 3n \\ n &= 10 \end{aligned}$$

Marie aura écrit 10 épreuves.

Prolongement
On utilise d'abord les renseignements donnés pour tirer des conclusions au sujet des notes des 32 élèves.
Puisque la médiane est égale à 80, si on plaçait toutes les notes en ordre, il y aurait autant de notes supérieures ou égales à 80 qu'il y en aurait qui sont inférieures ou égales à 80.
Puisque la note la plus élevée est supérieure ou égale à 80 et que l'étendue des notes est égale à 40, il ne peut y avoir de notes inférieures à 40.
Puisque la moyenne de la classe est égale à 58, le total des notes est égal à 32×58, ou 1856.
Que peut-on conclure?
Puisqu'au moins 16 élèves ont une note supérieure ou égale à 80, ces élèves contribuent un total d'au moins 1280 notes.
Puisque les 16 autres élèves ont une note supérieure ou égale à 40, ces élèves contribuent un total d'au moins 640 notes.
Puisque $1280 + 640 = 1920$, les 32 élèves ont contribué un total de 1920 notes. Ceci contredit le total de 1856 notes obtenu précédemment.
L'enseignante a donc commis une erreur.

(Il y a plusieurs façons de s'y prendre. Par exemple, on sait que 16 élèves ont contribué au moins 1280 notes et qu'il y a un total de 1865 notes. Il reste donc un total de $1856 - 1280$, ou 576 notes qui ont été obtenues par les 16 autres élèves. Ces derniers ont donc une moyenne de $576 \div 16$, ou environ 34. Donc au moins un de ces élèves a une note inférieure ou égale à 34. Puisque $80 - 34 > 40$, ceci contredit le résultat selon lequel l'étendue des notes est égale à 40.)

2. a) *Solution 1*
Xavier annonce le numéro 4. Yvonne peut annoncer n'importe quel numéro de 5 à 14, puisque son numéro doit être de 1 à 10 de plus que le numéro précédent.
Si Yvonne annonce un numéro de 5 à 14, Xavier peut annoncer le numéro 15 qui sera de 1 à 10 de plus que n'importe quel numéro annoncé par Yvonne.
Xavier peut donc gagner à son deuxième tour, peu importe le numéro annoncé par Yvonne. Il a donc une stratégie gagnante en annonçant d'abord le numéro 4, puis le numéro 15.

Solution 2
Xavier annonce le numéro 4. Yvonne peut annoncer n'importe quel numéro de la forme $4 + n$, où n est un entier de 1 à 10.
À son deuxième tour, Xavier peut annoncer le numéro 15, pourvu que la différence entre 15 et $4 + n$ soit au moins 1 et pas plus que 10. Or $15 - (4 + n) = 11 - n$. Puisque n est un nombre de 1 à 10, $11 - n$ est aussi un nombre de 1 à 10. Donc Xavier peut annoncer le numéro 15.
Xavier a donc une stratégie gagnante en annonçant d'abord le numéro 4, puis le numéro 15.

b) Dans la partie a), Xavier a annoncé le numéro 4, ce qui lui a permis d'annoncer le numéro 15, soit 11 de plus, à son deuxième tour.
En procédant à rebours, pour annoncer le numéro 50 au dernier tour, il devra annoncer le numéro 39 à l'avant-dernier tour.
(En annonçant le 39, Yvonne peut annoncer n'importe quel nombre de 40 à 49, ce qui permet à Xavier d'annoncer le 50 au dernier tour, ce numéro étant de 1 à 10 de plus que le numéro d'Yvonne.)
De la même manière, pour assurer le choix du numéro 39, il devrait annoncer le numéro 28 au tour précédent, pour la même raison.
Pour assurer le choix du numéro 28, il devrait annoncer le numéro 17 au tour précédent.
Pour assurer le choix du numéro 17, il devrait annoncer le numéro 6 au tour précédent. Ce numéro sera le premier qu'il annoncera.
Pour résumer, Xavier devrait annoncer le 6 au 1er tour, le 17 au 2e tour, le 28 au 3e tour, le 39 au 4e tour et le 50 au 5e tour.
À chaque tour, il choisit le numéro qui est 11 de plus que son numéro précédent. Il peut toujours le faire, car si Yvonne annonce un numéro qui est 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 de plus que le dernier numéro, Xavier peut choisir un numéro correspondant qui est 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 ou 1 de plus que celui d'Yvonne, pour un total de 11 à chaque fois.

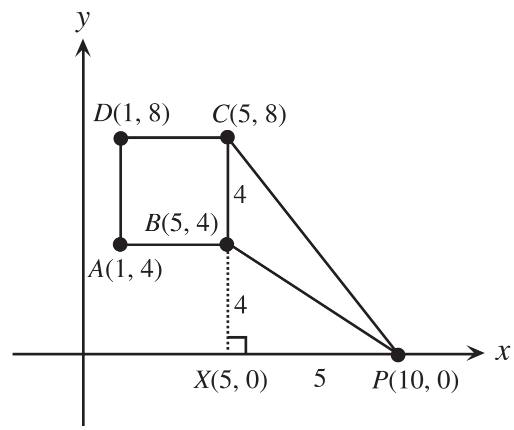
Prolongement
Dans la partie b), on a vu que Xavier pouvait toujours atteindre le nombre-cible s'il annonçait un nombre qui est 11 de plus que le nombre annoncé à son tour précédent.
Examinons divers nombres-cibles.
Si le nombre-cible est un nombre de 1 à 9, Xavier peut gagner au premier tour en annonçant ce nombre.
Selon l'analyse de la partie b), si le nombre-cible est 11 de plus qu'un de ces nombres, Xavier peut gagner au deuxième tour. Xavier peut donc gagner si le nombre-cible est un nombre de 12 à 20.
Qu'en est-il des numéros 10 et 11? Dans chaque cas, Yvonne peut gagner si le nombre-cible est 10 ou 11 en annonçant le numéro 11 à son premier tour. Elle peut le faire car ce nombre est de 1 à 10 de plus que n'importe quel nombre de 1 à 9 choisi par Xavier au premier tour.
Yvonne peut aussi gagner si le nombre-cible est 11 de plus, soit 21 ou 22, 32 ou 33, ainsi de suite.
Xavier et Yvonne peuvent répéter leur stratégie aussi souvent qu'il le faut. Donc Xavier peut gagner si le nombre-cible est un nombre de 1 à 9 ou un nombre de 1 à 9 plus un multiple de 11. Yvonne peut gagner si le nombre-cible est un multiple de 11 ou 1 de moins qu'un multiple de 11.

3. a) *Solution 1*

Puisque $ABCD$ est un carré et que le côté AD a une longueur de 4, chaque côté a une longueur de 4. Le points B et C ont donc pour coordonnées respectives $(5, 4)$ et $(5, 8)$. (Puisque AD est parallèle à l'axe des ordonnées, AB est donc parallèle à l'axe des abscisses.)

On considère BC comme base du triangle PCB. Elle a une longueur de 4. La hauteur correspondante mesure 5 unités. (On peut le voir en prolongeant le segment CB jusqu'au point X sur l'axe des abscisses. X a pour coordonnées $(5,0)$ et PX, de longueur 5, est la hauteur qui correspond à la base CB.)

L'aire du triangle PCB est donc égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(5)$, ou 10 unités carrées.



Solution 2

Puisque $ABCD$ est un carré et que le côté AD a une longueur de 4, chaque côté a une longueur de 4. Le points B et C ont donc pour coordonnées respectives $(5, 4)$ et $(5, 8)$. (Puisque AD est parallèle à l'axe des ordonnées, AB est donc parallèle à l'axe des abscisses.)

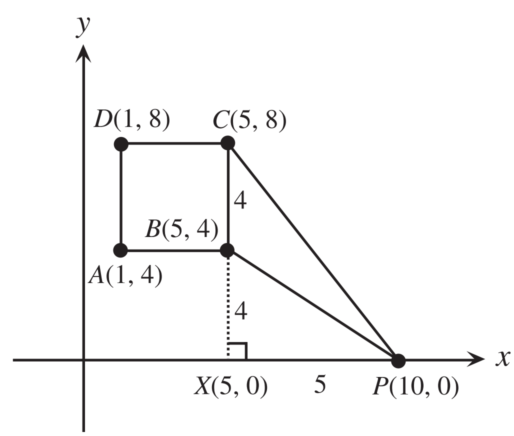
On prolonge le segment CB jusqu'au point X sur l'axe des abscisses. X a pour coordonnées $(5, 0)$.

L'aire du triangle PCB est égale à l'aire du triangle PCX moins celle du triangle PBX.

La base PX du triangle PCB a une longueur de 4 et sa hauteur CX mesure 8 unités.

De même, le triangle PBX a une base PX de 5 unités et une hauteur BX de 4 unités.

L'aire du triangle PCB est donc égale à $\frac{1}{2}(4)(10) - \frac{1}{2}(4)(5)$, ou 10 unités carrées.

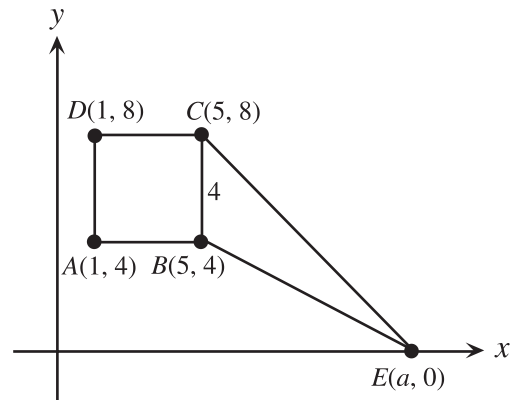


b) *Solution 1*

Puisque le triangle CBE est situé complètement à l'extérieur du carré $ABCD$, le point E doit être situé à la droite du carré et a doit être supérieur ou égal à 5.

On a besoin de l'aire du carré. Puisque les côtés mesurent 4 unités, l'aire est égale à 16.

On considère BC comme base du triangle CBE. Elle a une longueur de 4. La hauteur correspondante mesure $a-5$, puisque E a pour coordonnées $(a, 0)$ et que le segment BC est sur la droite d'équation $x = 5$.



Puisque l'aire du triangle CBE est égale à l'aire du carré, on a :

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(4)(a-5) &= 16\\ 2a-10 &= 16\\ 2a &= 26\\ a &= 13\end{aligned}$$

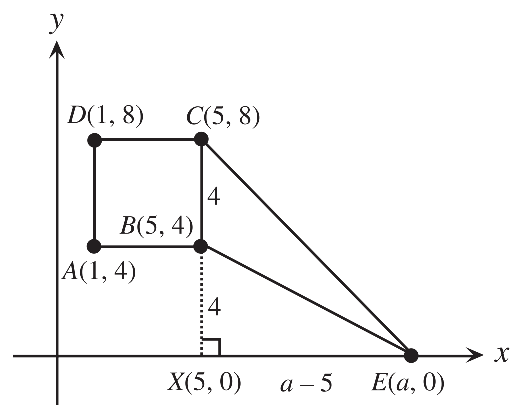
(On peut facilement vérifier que si $a = 13$, le triangle a une base de 4 et une hauteur de 8, ce qui lui donne une aire de 16.)

Solution 2

Puisque le triangle CBE est situé complètement à l'extérieur du carré $ABCD$, le point E doit être situé à la droite du carré et a doit être supérieur ou égal à 5.

On a besoin de l'aire du carré. Puisque les côtés mesurent 4 unités, l'aire est égale à 16.

On prolonge le côté CB jusqu'au point X sur l'axe des abscisses. Le point X a pour coordonnées $(5, 0)$.



L'aire du triangle CBE est égale à l'aire du triangle CXE moins celle du triangle BXE.

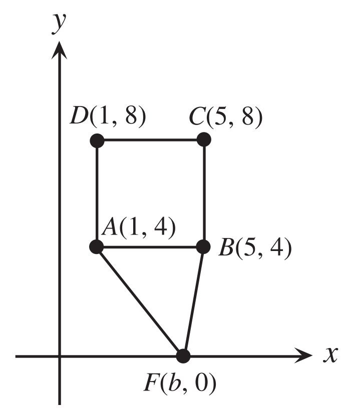
La base EX du triangle CXE mesure $a-5$ et la hauteur CX mesure 8 unités.

La base EX du triangle BXE mesure $a-5$ et la hauteur BX mesure 4 unités.

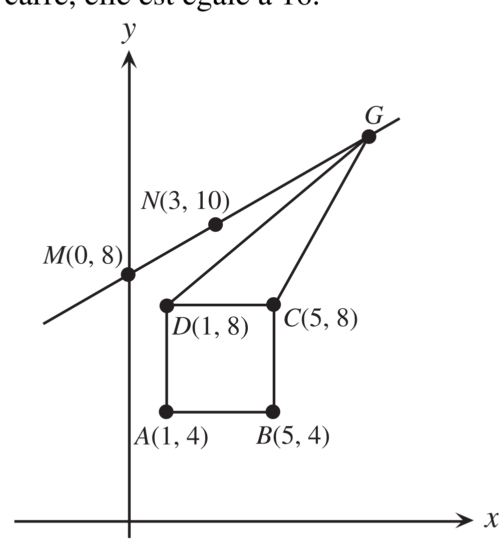
Puisque l'aire du triangle CBE est égale à l'aire du carré, on a :

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(a-5)(8)-\tfrac{1}{2}(a-5)(4) &= 16\\ 4(a-5)-2(a-5) &= 16\\ a-5 &= 8\\ a &= 13\end{aligned}$$

c) Soit $(b, 0)$ les coordonnées d'un point F.
Le triangle ABF a une base AB de longueur 4.
La hauteur correspondante du triangle ABF est égale à 4, peu importe la position de F sur l'axe des abscisses.
L'aire du triangle ABF est donc toujours égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(4)$, ou 8. Elle n'est pas égale à l'aire du carré.
Il n'existe donc aucun point F, sur l'axe des abscisses pour lequel l'aire du triangle est égale à l'aire du carré.



Prolongement
Puisque le triangle DCG est situé complètement à l'extérieur du carré, G doit être situé au-dessus de la droite qui passe par D et C. L'ordonnée de G est donc supérieure ou égale à 8.
Puisque l'aire du triangle DCG est égale à l'aire du carré, elle est égale à 16.
La base DC du triangle DCG a une longueur de 4. Soit h la hauteur correspondante. On a donc $\frac{1}{2}bh = 16$, ou $\frac{1}{2}(4)h = 16$, d'où $h = 8$.
Puisque la hauteur du du triangle DCG est égale à 8 et que les points C et D ont une ordonnée de 8, l'ordonnée du point G est égale à 16.
On cherche donc, sur la droite qui passe par $M(0, 8)$ et $N(3, 10)$, le point dont l'ordonnée est 16.
Pour se déplacer de M à N, il faut se déplacer de 3 unités vers la droite et de 2 unités vers le haut.
Pour se déplacer de N à G, il faut se déplacer de 6 unités vers le haut. Il faut donc se déplacer de 9 unités vers la droite.
Les coordonnées de G sont donc $G(12, 16)$.



4. a) Il est sans doute plus efficace de calculer les totaux. Voici les totaux, en ordre croissant.
1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111
Il y a 15 totaux. Leur somme, qui est égale à la somme-puissance, est 8888.

b) *Solution 1*
On considère d'abord les totaux distincts obtenus en additionnant un nombre ou plus de l'ensemble $\{1, 10, 100, 1000\}$. Dans la partie a), on a vu que la somme de ces totaux est égale à 8888.

Qu'arrive-t-il si on considère les totaux distincts obtenus en additionnant un nombre ou plus de l'ensemble $\{1,10,100,1000,10\,000\}$? On obtient d'abord les 15 totaux de la partie a). On obtient 15 totaux différents lorsqu'on additionne $10\,000$ à chacun des totaux de la partie a). De plus, le terme $10\,000$ est un total. On a donc $15+15+1$, ou 31 totaux en tout. Leur somme est égale à $8888+\left[8888+15(10\,000)\right]+10\,000$, c'est-à-dire à $2(8888)+160\,000$, ou $177\,776$.

Qu'arrive-t-il si on considère les totaux distincts obtenus en additionnant un nombre ou plus de l'ensemble $\{1,10,100,1000,10\,000,100\,000\}$? On obtient d'abord les 31 totaux du paragraphe précédent. On obtient 31 totaux différents lorsqu'on additionne $100\,000$ à chacun des totaux du paragraphe précédent. Le nombre $100\,000$ est aussi un total différent. On a donc $31+31+1$, ou 63 totaux en tout. Leur somme est égale à :

$$\begin{aligned}177\,776+\left[177\,776+31(100\,000)\right]+100\,000&=2(177\,776)+3\,200\,000\\&=3\,555\,552\end{aligned}$$

Qu'arrive-t-il si on ajoute le nombre $1\,000\,000$ à l'ensemble? Par un argument semblable, on obtient $63+63+1$ ou 127 totaux en tout. Leur somme est égale à :

$$\begin{aligned}3\,555\,552+\left[3\,555\,552+63(1\,000\,000)\right]+1\,000\,000&=2(3\,555\,552)+64\,000\,000\\&=71111104\end{aligned}$$

La somme-puissance est égale à 71111104.

Solution 2

Il y a sept nombres dans l'ensemble. Pour obtenir un total, on doit considérer chaque nombre et choisir de le prendre ou de le refuser dans l'addition.

Il y a 2 choix pour le 1, soit le prendre ou le refuser. Pour chacun de ces choix, il y a 2 choix pour le 10, soit le prendre ou le refuser. De même, pour chacun de ces choix, il y a 2 choix pour le 100, et ainsi de suite. En tout, il y a $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$, c'est-à-dire 2^7, ou 128 choix. Ceci inclut le choix de ne prendre aucun élément. Chacun de ces choix correspond à un total, y compris le total nul qui correspond au choix d'aucun élément.

Combien de ces choix comprennent l'élément 1? Si le 1 est choisi, il y a 2 choix pour le 10, 2 choix pour le 100 et ainsi de suite, pour un total de 2^6, ou 64 choix. Le 1 est donc choisi pour 64 totaux. Il contribue donc 64 à la somme-puissance.
Combien des 128 choix comprennent l'élément 10? On utilise le même argument pour démontrer que 64 choix comprennent l'élément 10. Le 10 contribue donc 64×10, ou 640 à la somme-puissance.
On utilise le même argument pour démontrer que chacun des 7 éléments de l'ensemble est choisi 64 fois.

La somme-puissance est donc égale à :

$$64(1+10+100+1000+10\,000+100\,000+1\,000\,000)$$
$$=64(1111111)$$
$$=71111104$$

Prolongement
On utilise les petits nombres pour chercher une régularité.
Avec les nombres 1, 2 et 3, on obtient les totaux suivants :

$$1,\ 2,\ 3,\ 1+3=4,\ 1+3=4,\ 2+3=5,\ 1+2+3=6$$

Avec les nombres 1, 2, 3 et 6, on obtient les totaux précédents, plus les totaux obtenus lorsqu'on ajoute 6 à chacun des totaux précédents. Les totaux sont donc les entiers de 1 à 12.

Si on inclut le nombre 12, on ajoute les totaux de 13 à 24. On a donc, comme totaux, les entiers de 1 à 24.
Si on inclut le nombre 24, les totaux sont les entiers de 1 à 48.
Si on inclut le nombre 48, les totaux sont les entiers de 1 à 96.
Si on inclut le nombre 96, les totaux sont les entiers de 1 à 192.
Il y a donc 192 totaux distincts.
(On peut vérifier que la somme des nombres de l'ensemble est égale à 192.)