Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre
en mathématiques et en
Université de Waterloo, Waterloo,

2003 Solutions
Concours Fermat (11e – année)

(Secondaire V au Québec)

pour les prix du

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

1. On calcule :
$3^3 - 3^2 + 3^1 - 3^0$ est égal à $27 - 9 + 3 - 1$, ou 20. RÉPONSE : (E)

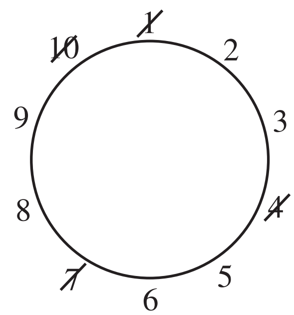
2. On reporte la valeur de *a* dans l'équation :

$$\begin{aligned} a^2 + ab &= 60 \\ 25 + 5b &= 60 \\ 5b &= 35 \\ b &= 7 \end{aligned}$$

RÉPONSE : (A)

3. Puisque deux des mesures d'angles ont une somme de 180°, le diagramme contient une droite (horizontale). On a donc $4x^\circ + x^\circ = 90^\circ$ ou $5x^\circ = 90^\circ$, d'où $x = 18$.
RÉPONSE : (E)

4. En faisant le tour du cercle la première fois, Marie-Ève barre le 1, le 4, le 7 et le 10. Il reste alors le 2, le 3, le 5, le 6, le 8 et le 9.
À partir du 10, le troisième nombre qui n'est pas barré est le 5. Après le 5, le troisième nombre qui n'est pas barré est le 9.
Marie-Ève barre ainsi le 5, le 9, le 6 et le 3.



Il reste alors le 2 et le 8. Leur somme est 10. RÉPONSE : (B)

5. *Solution 1*
Puisque l'ours a perdu 20 % de sa masse initiale, alors 220 kg représentent 80 % de sa masse initiale. Donc 20 % de sa masse initiale correspond à 55 kg (un quart de 220 kg). Sa masse initiale est donc égale à $220 + 55$, ou 275 kg. (On remarquera que cette somme correspond à $\frac{5}{4} \times 220$.)

Solution 2
Soit *x* la masse initiale, en kilogrammes.
Puisque l'ours perd 20 % de sa masse initiale pendant l'hibernation :

$$\begin{aligned} \frac{80}{100}x &= 220 \\ x &= \frac{100}{80}(220) \\ x &= 275 \end{aligned}$$

Sa masse initiale était donc égale à 275 kg. RÉPONSE : (D)

6. *Solution 1*

Lorsque $\frac{5}{8}$ des participants seront des filles, $\frac{3}{8}$ des participants seront des garçons. Puisqu'il y a 6 garçons et que ce nombre ne change pas, il doit y avoir 16 participants en tout de manière que $\frac{6}{16}$, ou $\frac{3}{8}$ des participants soient des garçons. Puisqu'il y avait 8 participants au départ, il faut ajouter 8 filles.

Solution 2
Soit f le nombre de filles qu'il faut ajouter. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{2+f}{8+f} &= \frac{5}{8}\\ 16+8f &= 40+5f\\ 3f &= 24\\ f &= 8\end{aligned}$$

RÉPONSE : (D)

7. Puisque l'aquarium a une hauteur de 30 cm, et qu'il est à moitié rempli, l'eau atteint une profondeur de 15 cm.
L'aire de la base de l'aquarium est égale à 20×40, ou 800 cm^2. La profondeur de l'eau qui est ajoutée est donc égale à $\frac{4000}{800}$, ou 5 cm.
La profondeur de l'eau dans l'aquarium est donc égale à $15+5$, ou 20 cm.

RÉPONSE : (C)

8. Puisque les segments AD et BC sont perpendiculaires, le produit de leur pente est égal à -1. Or la pente de BC est égale à $\frac{7-(-4)}{6-9}$, ou $-\frac{11}{3}$. La pente de AD est donc égale à $\frac{3}{11}$.
(On remarquera que l'on a pas employé les coordonnées de A!)

RÉPONSE : (A)

9. *Solution 1*
La moyenne de deux nombres correspond au nombre qui est à mi-chemin entre les deux.
Si on écrit $\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$ et $\frac{1}{10} = \frac{2}{20}$, on voit que le nombre à mi-chemin entre eux est $\frac{3}{20}$.
Or $\frac{3}{20} = \frac{1}{\left(\frac{20}{3}\right)}$. Donc $x = \frac{20}{3}$.

Solution 2
Puisque la moyenne de $\frac{1}{5}$ et de $\frac{1}{10}$ est égale à $\frac{1}{x}$, alors :

$$\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{10}}{2}=\frac{1}{x}$$
$$\frac{\frac{3}{10}}{2}=\frac{1}{x}$$
$$x=\frac{2}{\left(\frac{3}{10}\right)}$$
$$x=\frac{20}{3}$$

RÉPONSE : (A)

10. Puisque Carla prend trois pas, alors que Jacob en prend quatre pour parcourir la même distance, Carla prend 18 pas pour parcourir la distance que Jacob parcourt en 24 pas. Puisqu'elle parcourt 0,5 m par pas, elle parcourt 9 m en 18 pas. Jacob parcourt donc 9 m en 24 pas. RÉPONSE : (B)

11. On détermine toutes les routes possibles :
   De A à X à B, il y a 2 routes, puisqu'il y a 2 arêtes de A à X.
   De A à X à Y à B, il y a 6 routes, puisqu'il y a 2 arêtes de A à X et 3 arêtes de Y à B.
   De A à Y à B, il y a 3 routes, puisqu'il y a 3 arêtes de Y à B.
   Il y a donc 11 routes de A à B, dont 8 passent par le point X.
   La probabilité pour que Maya choisisse une route qui passe par le point X est égale à $\frac{8}{11}$.
   RÉPONSE : (A)

12. Puisque le triangle ABC est rectangle, on utilise le théorème de Pythagore pour obtenir $AC^2=10^2+10^2$, d'où $AC=\sqrt{200}$, ou $AC=10\sqrt{2}$.
   Puisque $AD=AC-DC$, alors $AD=10\sqrt{2}-10$, ou $AD\approx 4{,}1$.
   À l'unité près, $AD\approx 4$. RÉPONSE : (E)

13. *Solution 1*
   Puisque $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$, et que $(x+y)(x-y)=(1)(3)$, alors $x^2-y^2=3$.
   Donc $2^{x^2-y^2}=2^3$, ou $2^{x^2-y^2}=8$.

   Solution 2
   Puisque $x+y=1$ et $x-y=3$, on peut additionner les équations, membre par membre, pour obtenir $2x=4$, ou $x=2$. On reporte cette valeur dans la première équation pour obtenir $y=1$. Donc x^2-y^2 est égal à $4-1$, ou 3 et $2^{x^2-y^2}$ est égal à 2^3, ou 8.
   RÉPONSE : (B)

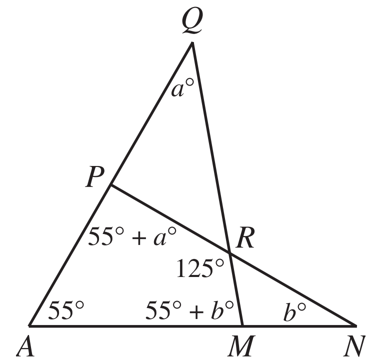
14. Puisque $\angle PRM = 125^\circ$, alors $\angle QRP = \angle NRM = 55^\circ$. Donc :

$$\angle APR = 180^\circ - \angle QPR$$
$$= 180^\circ - \left[180^\circ - a^\circ - 55^\circ\right]$$
$$= 55^\circ + a^\circ$$

De même, $\angle QPR = 55^\circ + b^\circ$. Il s'agit d'un angle extérieur du triangle PQR.

Puisque APQ est une droite :

$$\left(55^\circ + a^\circ\right) + \left(55^\circ + b^\circ\right) = 180^\circ$$
$$a^\circ + b^\circ + 110^\circ = 180^\circ$$
$$a + b = 70$$



RÉPONSE : (A)

15. Soit t la longueur d'un côté du triangle équilatéral. Le périmètre est donc égal à $3t$.
Les cinq choix donnent, pour le périmètre, les valeurs respectives 3, 30, 54, 60 et 75.
Puisque la longueur des côtés du carré est un entier, le périmètre doit être divisible par 4.
Parmi les périmètres possibles du triangle équilatéral, seul 60 est divisible par 4.
Donc $t = 20$. RÉPONSE : (D)

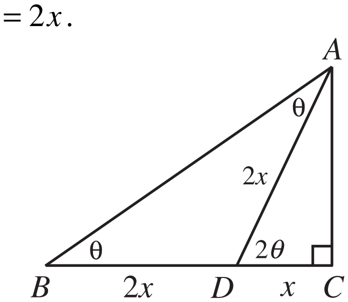
16. Soit a, b, c et d les chiffres du nombre. Donc $abcd = 810$.
On doit déterminer comment exprimer 810 comme produit de quatre chiffres non nuls *différents*. On écrit d'abord 810 en factorisation première. On a $810 = 81 \times 10$, d'où $810 = 2 \times 3^4 \times 5$.
Un des chiffres doit donc être un multiple de 5. Or le seul tel chiffre est 5. Un des chiffres du nombre est donc 5.

On doit donc déterminer trois autres chiffres distincts dont le produit est égal à $3^4 \times 2$.
Seuls les chiffres 3, 6 et 9 sont des multiples de 3. Or le produit de ces nombres est égal à $3^4 \times 2$. Les autres chiffres sont donc 3, 6 et 9.
Les chiffres du nombre sont donc 3, 5, 6 et 9. Leur somme est égale à 23.

RÉPONSE : (C)

17. *Solution 1*

Soit $\angle ABC = \theta$. Donc $\angle ADC = 2\theta$, d'où $\angle ADB = 180^\circ - 2\theta$ et $\angle BAD = \theta$.
Le triangle ADB est donc isocèle et $BD = DA$. Donc $DA = 2x$.
Puisque la longueur de AD est deux fois celle de DC et que le triangle ADC est rectangle, il s'agit d'un triangle 30°-60°-90°. Donc $\angle ADC = 60^\circ$, d'où $\angle ABC = 30^\circ$.
Le triangle ABC est donc lui aussi un triangle 30°-60°-90°. Donc $\angle BAC = 60^\circ$. Or cet angle est opposé au côté BC de longueur $3x$).

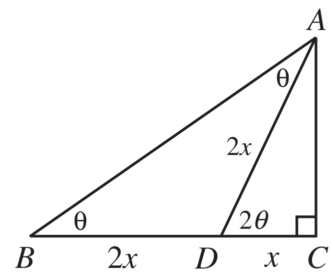


Donc $AB = \frac{2}{\sqrt{3}} BC$, c'est-à-dire que $AB = \frac{2}{\sqrt{3}}(3x)$, ou $AB = 2\sqrt{3}x$.

Solution 2

Soit $\angle ABC = \theta$. Donc $\angle ADC = 2\theta$, d'où $\angle ADB = 180^\circ - 2\theta$ et $\angle BAD = \theta$.
Le triangle ADB est donc isocèle et $BD = DA$. Donc $DA = 2x$.
Puisque les triangles ADC et ABC sont rectangles :

$$\begin{aligned} AB^2 &= BC^2 + AC^2 \\ &= BC^2 + \left(AD^2 - DC^2\right) \\ &= (3x)^2 + \left((2x)^2 - x^2\right) \\ &= 9x^2 + 3x^2 \\ &= 12x^2 \end{aligned}$$



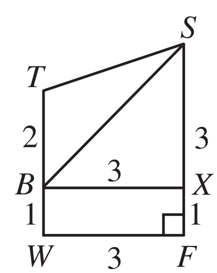
Donc $AB = \sqrt{12}x$, ou $AB = 2\sqrt{3}x$.

RÉPONSE : (C)

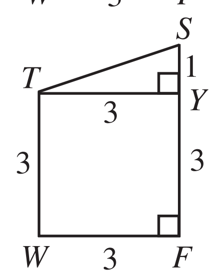
18. Le coût pour modifier le réglage du moteur, 400 \$, est équivalent au coût de $\dfrac{400}{0{,}80}$, ou 500 L d'essence. Pour recouvrer le coût de la modification, la propriétaire doit donc parcourir une distance qui épargnera 500 L d'essence.
Au départ, la voiture consomme 8,4 L d'essence aux 100 km. Après la modification, elle consomme 6,3 L aux 100 km, soit une épargne de 2,1 L aux 100 km.
Pour épargner 500 L d'essence, il faudrait parcourir $\dfrac{500}{2{,}1} \times 100$, ou $23\,809{,}52$ km.

RÉPONSE : (D)

19. Soit X le point sur SF, de manière que BX soit perpendiculaire à SF.
Donc $BX = 3$ m, $XF = 1$ m et $XS = 3$ m.
Le triangle BXS est donc un triangle rectangle isocèle et on a donc $\angle BSX = 45^\circ$.
Soit Y le point sur SF, de manière que TY soit perpendiculaire à SF.
Donc $TY = 3$ m et $SY = 1$ m.



Puisque le triangle STY est rectangle, $\tan(\angle TSY) = \dfrac{3}{1}$,
d'où $\angle TSY \approx 71{,}6^\circ$.
Puisque $\angle TSB = \angle TSY - \angle BSF$, $\angle TSB = 71{,}6^\circ - 45^\circ$,
ou $\angle TSB \approx 27^\circ$.



RÉPONSE : (A)

20. Puisque a, b et c sont les termes consécutifs d'une suite géométrique, on a $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$, d'où $b^2 = ac$.

Soit Δ le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= ac - 4ac \\ &= -3ac \\ &< 0 \qquad \text{puisque } a \text{ et } c \text{ sont positifs} \end{aligned}$$

Puisque le discriminant est négatif, la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses. Puisque le coefficient a est positif, la parabole est située complètement au-dessus de l'axe des abscisses. RÉPONSE : (C)

21. Pour mieux comprendre la suite, il est préférable d'en écrire les premiers termes, tout en espérant y trouver une régularité. Soit t_n le $n$ième terme de la suite. Donc le premier terme est t_1, le deuxième terme est t_2 et ainsi de suite. On a donc :

$$t_1 = 6,\ t_2 = \frac{1}{2}t_1 = 3,\ t_3 = 3t_2 + 1 = 10,\ t_4 = \frac{1}{2}t_3 = 5,\ t_5 = 16,\ t_6 = 8,\ t_7 = 4,\ t_8 = 2,$$
$$t_9 = 1,\ t_{10} = 4,\ t_{11} = 2,\ t_{12} = 1,\ t_{13} = 4,\ \ldots$$

Puisque chaque terme de la suite ne dépend que du terme précédent, alors un terme répété, comme le 4 ici, engendrera un cycle répété, soit 4, 2, 1, 4, 2, 1, etc.

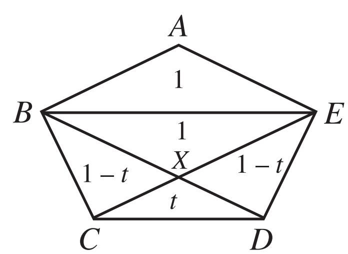
On remarque que le cycle a une longueur de 3 et que $t_9 = 1$. On aura donc $t_9 = 1$, $t_{12} = 1$, $t_{15} = 1$, $t_{18} = 1$, etc. Chaque terme dont l'indice est un multiple de 3 sera donc égal à 1.

Donc $t_{99} = 1$ et $t_{100} = 4$. RÉPONSE : (D)

22. *Solution 1*

On considère un pentagone qui vérifie la condition donnée. On démontrera que chaque diagonale est parallèle au côté opposé.

Puisque les triangles BCD et CDE ont la même base et la même aire, ils ont la même hauteur. Les points B et E sont donc à la même distance du côté CD.

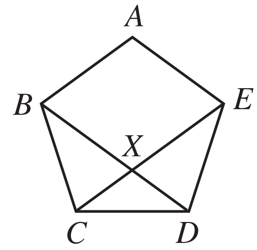


La diagonale BE est donc parallèle au côté CD. De même, les autres diagonales sont parallèles aux côtés opposés.

On trace BD, CE et BE. Puisque BD est parallèle à AE et que CE est parallèle à AB, alors $BAEX$ est un parallélogramme. L'aire du triangle BEX est donc égale à l'aire du triangle EAB, c'est-à-dire à 1.

Soit t l'aire du triangle CXD. L'aire du triangle CXB est donc égale à $1 - t$, de même que celle du triangle EXD.

Puisque les triangles CXD et CXB ont une même hauteur, le rapport de l'aire de l'un à l'aire de l'autre est égal au rapport des longueurs des côtés correspondants.



Donc $\dfrac{DX}{BX} = \dfrac{t}{1-t}$. De même, $\dfrac{CX}{EX} = \dfrac{t}{1-t}$.

Or puisque BE est parallèle à CD, le triangle CXD est semblable au triangle EXB et le rapport de l'aire du premier à l'aire du second est égal au carré du rapport des longueurs des côtés. Donc :

$$\frac{\text{Aire du triangle } EXB}{\text{Aire du triangle } CXD} = \frac{1}{t} = \left(\frac{1-t}{t}\right)^2$$

On développe et on réduit pour obtenir $t^2 - 3t + 1 = 0$, d'où $t = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, car t est inférieur à 1.

L'aire du pentagone est donc égale à $1 + 1 + t + (1-t) + (1-t)$, ou $4 - t$. Elle est donc égale à $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$, ou environ 3,62.

Solution 2

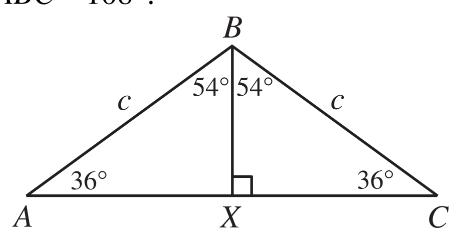
Le problème laisse croire que le pentagone n'a pas une forme particulière. On supposera donc que le pentagone est régulier.

Soit c la longueur de ses côtés. On déterminera d'abord la valeur de c.

On considère le triangle ABC. Puisque les angles intérieurs d'un pentagone régulier mesurent chacun 108°, le triangle ABC est isocèle et $\angle ABC = 108°$.

Soit X le milieu de AC. On trace BX, qui est perpendiculaire à AC, puisque le triangle ABC est isocèle. De plus, BX est une bissectrice, d'où $\angle ABX = \angle CBX = 54°$.

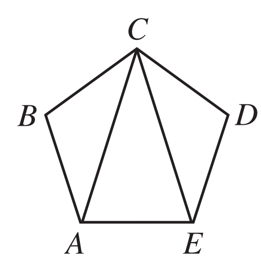
Donc $BX = c(\cos 54°)$ et $AX = CX = c(\sin 54°)$.

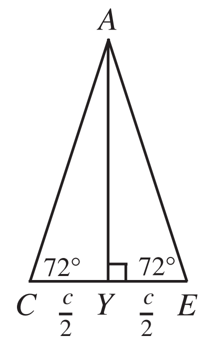


Puisque l'aire du triangle ABC est égale à 1, on a $1 = \frac{1}{2}[c(\cos 54°)][2c(\sin 54°)]$, d'où

$$c^2 = \frac{1}{\sin 54° \cos 54°}.$$

L'aire du pentagone est égale à la somme de l'aire des triangles ABC, ACE et CDE. Or deux de ces triangles ont une aire de 1. Il reste à déterminer l'aire du triangle ACE.





On trace la médiane AY. Puisque le triangle ACE est isocèle, $CY = YE = \frac{1}{2}c$ et $\angle ACE = \angle AEC = 72°$.

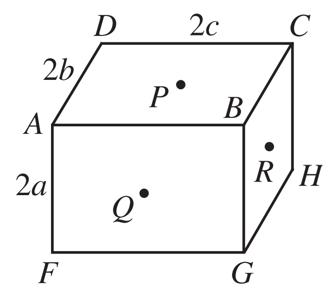
Donc $AY = \frac{1}{2}c(\tan 72°)$. On a donc :

$$\begin{aligned}\text{Aire du triangle } ACE &= \frac{1}{2}c\left[\frac{1}{2}c(\tan 72°)\right]\\ &= \frac{1}{4}c^2(\tan 72°)\\ &= \frac{\tan 72°}{4\sin 54° \cos 54°}\\ &\approx 1{,}618\end{aligned}$$

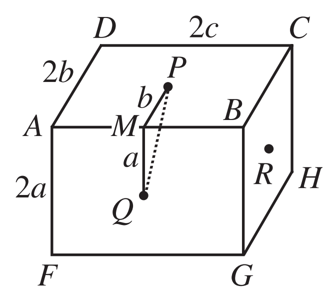
Selon le diagramme précédent, l'aire du pentagone est environ égale à 1,618 + 2, ou 3,62.

RÉPONSE : (A)

23. Soit $2a$, $2b$ et $2c$ les longueurs respectives des arêtes de la boîte. Soit A, B, C, D, E, F, G et H les sommets. Soit P, Q et R les centres respectifs de trois faces qui ont un sommet commun.



On a donc $PQ = 4$, $QR = 5$ et $PR = 6$.
On tentera d'exprimer chacune de ces distances en fonction de la longueur des arêtes de la boîte.
Soit M le milieu de l'arête AB. On joint P à M, Q à M et P à Q.
Puisque P est le centre de la face $ABCD$ et que PM est perpendiculaire à AB, alors $PM = \frac{1}{2}AD = b$. De même, $MQ = a$.
Puisque MP et MQ sont perpendiculaires à AB et qu'ils sont situés dans les plans perpendiculaires $ABCD$ et $ABGF$, alors MP est perpendiculaire à MQ et le triangle QMP est donc rectangle.



D'après le théorème de Pythagore, $PQ^2 = MP^2 + MQ^2$ ou $16 = a^2 + b^2$.
De même, en utilisant PR, on a $36 = a^2 + c^2$; en utilisant QR, on a $25 = b^2 + c^2$.
On a donc $16 = a^2 + b^2$, $36 = a^2 + c^2$ et $25 = b^2 + c^2$.
On veut déterminer le volume de la boîte, qui est égal à $(2a)(2b)(2c)$, ou $8abc$.
On additionne les trois équations, membre par membre, pour obtenir $77 = 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$, ou $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{77}{2}$.
On soustrait chacune des trois premières équations de cette dernière équation pour obtenir $c^2 = \frac{45}{2}$, $b^2 = \frac{5}{2}$ et $a^2 = \frac{27}{2}$.
Donc $a^2b^2c^2 = \frac{(27)(5)(45)}{8}$, d'où $abc = \sqrt{\frac{6075}{8}}$, ou $abc = \frac{45\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

On a donc $V = 8\left(\frac{45\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$, ou $V = \left(2\sqrt{2}\right)\left(45\sqrt{3}\right)$, d'où $V = 90\sqrt{6}$ cm^3.

RÉPONSE : (C)

24. On récrit l'expression comme suit :

$$\left[(1+x)\left(1+2x^3\right)\left(1+4x^9\right)\left(1+8x^{27}\right)\left(1+16x^{81}\right)\left(1+32x^{243}\right)\left(1+64x^{729}\right)\right]^2$$
$$=\left(1+2^0x^{3^0}\right)^2\left(1+2^1x^{3^1}\right)^2\left(1+2^2x^{3^2}\right)^2\left(1+2^3x^{3^3}\right)^2\left(1+2^4x^{3^4}\right)^2\left(1+2^5x^{3^5}\right)^2\left(1+2^6x^{3^6}\right)^2$$

Or le développement de $\left(1+2^rx^{3^r}\right)^2$ est $1+2^rx^{3^r}+2^rx^{3^r}+2^{2r}x^{2\cdot 3^r}$. On remarque que chacun de ces termes a la forme $2^{mr}x^{m3^r}$, où m égale 0, 1 ou 2.

Lorsqu'on multiplie le développement des sept parenthèses, chacun des quatre termes de chaque parenthèse est multiplié par chacun des quatre termes de chaque autre parenthèse. Chaque terme du produit aura donc la forme

$2^{0a+1b+2c+3d+4e+5f+6g}x^{a3^0+b3^1+c3^2+d3^3+e3^4+f3^5+g3^6}$, où a, b, c, d, e, f et g auront chacun une valeur de 0, 1 ou 2.

Pour déterminer le coefficient de x^{2003}, posons

$a3^0+b3^1+c3^2+d3^3+e3^4+f3^5+g3^6=2003$.

On rappelle que chaque coefficient est égal à 0, 1 ou 2.

On considère d'abord g. Supposons que g est égal à 0 ou à 1. La plus grande valeur possible du membre de gauche, $a3^0+b3^1+c3^2+d3^3+e3^4+f3^5+g3^6$, est donc $2\cdot3^0+2\cdot3^1+2\cdot3^2+2\cdot3^3+2\cdot3^4+2\cdot3^5+3^6$, ou 1457. Puisque cette valeur est inférieure à 2003, on doit avoir $g=2$.

On reporte cette valeur dans l'équation et on simplifie. L'équation devient

$$a3^0+b3^1+c3^2+d3^3+e3^4+f3^5=545.$$

On considère ensuite f. Supposons que f est égal à 0 ou à 1. La plus grande valeur possible du membre de gauche est donc $2\cdot3^0+2\cdot3^1+2\cdot3^2+2\cdot3^3+2\cdot3^4+3^5$, ou 485. Puisque cette valeur est inférieure à 545, on doit avoir $f=2$.

De la même façon, on détermine que $e=0$, $d=2$, $c=0$, $b=1$ et $a=2$.

[On aurait pu considérer l'égalité $a3^0+b3^1+c3^2+d3^3+e3^4+f3^5+g3^6=2003$ comme l'expression du nombre 2003 à la base 3. Un calcul simple nous permet d'écrire $2003_{\text{dix}}=2202012_{\text{trois}}$, ce qui donne la même solution.]

Chaque terme qui contient x^{2003} est donc de la forme

$$2^{0(2)+1(1)+2(0)+3(2)+4(0)+5(2)+6(2)}x^{2003}, \text{ ou } 2^{29}x^{2003}.$$

Pour déterminer le coefficient de x^{2003}, on doit déterminer le nombre de termes $2^{29}x^{2003}$ avant la simplification du produit. Or chacune des sept parenthèses de la forme $(1+2^rx^{3^r}+2^rx^{3^r}+2^{2r}x^{2\cdot3^r})$ a contribué au moins un terme pour former le produit $2^{29}x^{2003}$.

Puisque $a = 2$, le développement $1 + x + x + x^2$ de $(1 + x)^2$ a contribué le terme x^2 au produit. De la même manière, puisque $d = 2$, $f = 2$ et $g = 2$, les développements de $\left(1 + 2^3 x^{3^3}\right)^2$, de $\left(1 + 2^5 x^{3^5}\right)^2$ et de $\left(1 + 2^6 x^{3^6}\right)^2$ ont chacun contribué leur dernier terme.

Puisque $c = 0$ et $e = 0$, les développements de $\left(1 + 2^2 x^{3^2}\right)^2$ et de $\left(1 + 2^4 x^{3^4}\right)^2$ ont chacun contribué leur premier terme, 1.

Puisque $b = 1$, le développement de $\left(1 + 2^1 x^{3^1}\right)^2$ a contribué les deux termes du milieu, $2^1 x^{3^1}$ et $2^1 x^{3^1}$. Il y aura donc 2 termes $2^{29} x^{2003}$ dans le produit. Leur somme est égale à $2 \cdot 2^{29} x^{2003}$, ou $2^{30} x^{2003}$.

Le coefficient de x^{2003} est 2^{30}. RÉPONSE : (C)

25. D'après l'énoncé, les nombres $4 + 2112$ (c.-à-d. 2116), $n + 2112$ et $4n + 2112$ doivent être des carrés parfaits.

On vérifie que $2116 = 46^2$. On cherche donc des entiers positifs, *x* et *y*, tels que $n + 2112 = x^2$ et $4n + 2112 = y^2$. Puisque *n* est un entier positif, *x* et *y* doivent être supérieurs à 46.

On a trois inconnues, mais on peut éliminer le *n* en manipulant les équations pour obtenir $4n + 4(2112) = 4x^2$ et $4n + 2112 = y^2$. On soustrait, membre par membre, pour obtenir $4x^2 - y^2 = 3(2112)$.

On factorise le membre de gauche et on écrit le membre de droite en factorisation première pour obtenir $(2x + y)(2x - y) = 2^6 3^2 11$.

On doit donc déterminer les valeurs possibles de *x* et de *y*, qui donneront les valeurs possibles de *n*. On peut procéder par tâtonnements, ce qui risque d'être long. On peut réduire le travail en procédant par analyse.

Soit $2x + y = A$ et $2x - y = B$, où $AB = 2^6 3^2 11$. On résout ce système pour obtenir $x = \dfrac{A + B}{4}$ et $y = \dfrac{A - B}{2}$.

Puisque *AB* est pair, *A* ou *B* doit être pair.

Puisque $y = \dfrac{A - B}{2}$ est un entier et que *A* ou *B* est pair, *A* et *B* doivent être pairs.

Puisque le produit de *A* et de *B*, $2^6 3^2 11$, admet six facteurs 2, alors *A* ou *B* doit admettre au moins trois diviseurs 2. Donc *A* ou *B* doit être divisible par 8 et de ce fait, par 4.

Puisque $x = \dfrac{A + B}{4}$ est un entier et que *A* ou *B* est divisible par 4, alors *A* et *B* sont divisibles par 4.

Soit $A = 4a$ et $B = 4b$. Donc $x = a + b$ et $y = 2a - 2b$ et $ab = 2^2 3^2 11$.

[On peut supposer que *y* est positif, car si *y* était négatif, les rôles de *a* et de *b* seraient renversés.]

Puisque *y* est positif, alors $a > b$. Combien y a-t-il de possibilités pour *a* et *b*, de sorte que $ab = 2^2 3^2 11$? L'entier $2^2 3^2 11$ admet $(2 + 1)(2 + 1)(1 + 1)$, ou 18 facteurs.

Il y a donc 9 couples (a, b) possibles, soit

$$(396,1),\ (198,2),\ (132,3),\ (99,4),\ (66,6),\ (44,9),\ (36,11),\ (33,12),\ (22,18).$$

Seuls les sept premiers couples donnent des valeurs de x et de y supérieures à 46, c'est-à-dire des valeurs positives de n.
Il y a donc 7 valeurs possibles de n.
[Pour compléter la démonstration, il est préférable de déterminer ces valeurs.
On a $n = x^2 - 2112$, d'où $n = (a+b)^2 - 2112$. Les valeurs correspondantes de n sont 155 497, 37 888, 16 113, 8497, 3072, 697 et 97.] RÉPONSE : (B)