



Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat (11^e – Sec. V)

Le mercredi 19 février 2003

C.M.C. Sponsors:



**Deloitte
& Touche**
Chartered Accountants

C.M.C. Supporters:



Canadian Institute
of Actuaries

C.M.C. Contributors:

Manulife
Financial

Great-West Life
ASSURANCE COMPANY



Great West Life
and London Life



Sybase
Inc. (Waterloo)



iAnywhere Solutions

Durée : 1 heure

© 2002 Waterloo Mathematics Foundation

L'usage de la calculatrice est permis.

Directives

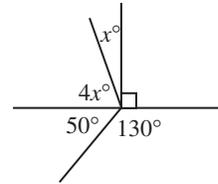
1. Attendez le signal du surveillant avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponse. Au besoin, demandez à l'enseignant-e d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Aussi, il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droit de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école, le nom de la ville et celui de la province.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats officiels.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A, B, C, D et E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation :
 - Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
 - Il *n'y a pas* de pénalité pour une réponse fautive.
 - Chaque question restée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 20 points.
8. Les diagrammes *ne sont pas* dessinés à l'échelle. Ils sont inclus pour aider seulement.
9. Après le signal du surveillant, vous aurez 60 minutes pour terminer.



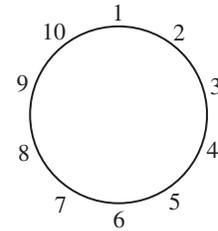
Notation : Une réponse fautive *n'est pas* pénalisée.
On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 20 points.

Partie A (5 points par bonne réponse)

- La valeur de $3^3 - 3^2 + 3^1 - 3^0$ est :
(A) 18 (B) 6 (C) 9 (D) 40 (E) 20
- Si $a = 5$ et $a^2 + ab = 60$, alors b est égal à :
(A) 7 (B) 4 (C) 2 (D) 10 (E) 30
- D'après le diagramme, la valeur de x est :
(A) 22,5 (B) 25 (C) 20
(D) 36 (E) 18



- On a placé les nombres de 1 à 10 autour d'un cercle. Marie-Ève barre le 1, puis le 4, puis le 7. Elle continue de la sorte en barrant chaque troisième nombre parmi ceux qui ne sont pas encore barrés, jusqu'à ce qu'il ne reste que deux nombres. La somme de ces deux nombres est égale à :
(A) 13 (B) 10 (C) 8
(D) 14 (E) 17

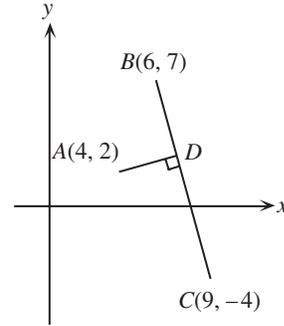


- Pendant sa période d'hibernation, un ours a perdu 20 % de sa masse initiale. À la fin de l'hibernation, il a une masse de 220 kg. Quelle était sa masse initiale, en kilogrammes?
(A) 176 (B) 264 (C) 240 (D) 275 (E) 1100
- Deux filles et six garçons participent à un jeu. Combien faut-il ajouter de filles pour que $\frac{5}{8}$ des participants soient des filles?
(A) 6 (B) 3 (C) 5 (D) 8 (E) 7
- Un aquarium a la forme d'un prisme droit à base rectangulaire. Sa base mesure 20 cm sur 40 cm et il a une hauteur de 30 cm. L'aquarium, qui est à moitié rempli, repose sur une table horizontale. Si on ajoute 4000 cm^3 d'eau à l'aquarium, quelle sera la profondeur de l'eau?
(A) 5 cm (B) 15 cm (C) 20 cm (D) 25 cm (E) 10 cm



8. Dans le diagramme, D est le point sur BC de manière que AD soit perpendiculaire à BC . La pente de AD est égale à :

- (A) $\frac{3}{11}$ (B) 1 (C) $-\frac{15}{11}$
 (D) $\frac{2}{7}$ (E) $\frac{2}{5}$



9. La moyenne de $\frac{1}{5}$ et de $\frac{1}{10}$ est égale à $\frac{1}{x}$. Alors x est égal à :

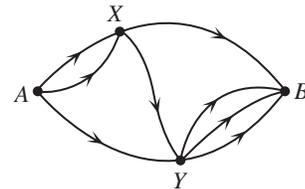
- (A) $\frac{20}{3}$ (B) $\frac{3}{20}$ (C) 30 (D) $\frac{10}{3}$ (E) $\frac{2}{15}$

10. Carla prend trois pas, alors que Jacob en prend quatre, pour parcourir la même distance. À chaque pas, Carla parcourt 0,5 mètre. Combien de mètres Jacob parcourt-il en 24 pas?

- (A) 16 (B) 9 (C) 36 (D) 12 (E) 18

Partie B (6 points par bonne réponse)

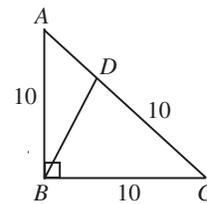
11. Dans ce diagramme, il est permis de parcourir une arête dans le sens indiqué par la flèche seulement. Maya a bien étudié le diagramme et elle a découvert toutes les routes possibles pour se rendre de A à B . Elle choisit une de ces routes au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'elle choisisse une route qui passe par le point X ?



- (A) $\frac{8}{11}$ (B) $\frac{3}{11}$ (C) 1
 (D) $\frac{9}{11}$ (E) $\frac{6}{11}$

12. Dans le diagramme, on a $\angle ABC = 90^\circ$ et $AB = BC = CD = 10$. La longueur de AD , à l'unité près, est égale à :

- (A) 14 (B) 5 (C) 9
 (D) 10 (E) 4



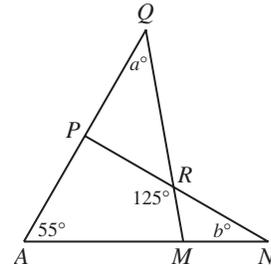
13. Si $x + y = 1$ et $x - y = 3$, quelle est la valeur de $2^{x^2 - y^2}$?

- (A) 4 (B) 8 (C) 2 (D) 16 (E) 32



14. Dans ce diagramme, AMN , APQ , QRM et PRN sont des segments de droites. Donc $a + b$ est égal à :

(A) 70 (B) 55 (C) 80
(D) 90 (E) 75



15. Les longueurs des côtés d'un triangle équilatéral et d'un carré sont des entiers. Si le triangle et le carré ont le même périmètre, lequel des nombres suivants peut représenter la longueur d'un côté du triangle?

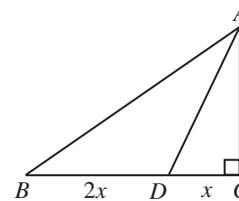
(A) 1 (B) 10 (C) 18 (D) 20 (E) 25

16. Le produit des chiffres d'un nombre de quatre chiffres est égal à 810. Si aucun des chiffres n'est répété, alors la somme des chiffres est égale à :

(A) 18 (B) 19 (C) 23 (D) 25 (E) 22

17. Le triangle ABC est rectangle en C . Si $BD = 2x$, $DC = x$ et $\angle ADC = 2(\angle ABC)$, alors la longueur de AB est égale à :

(A) $2\sqrt{2}x$ (B) $\sqrt{6}x$ (C) $2\sqrt{3}x$
(D) $3x$ (E) $4x$

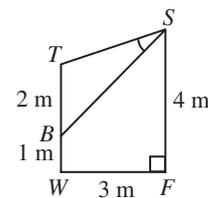


18. Une voiture consomme 8,4 litres d'essence aux 100 km parcourus. Un mécanicien est en mesure de modifier le réglage du moteur, au coût de 400 \$, de manière que la voiture ne consomme que 6,3 litres d'essence aux 100 km. La propriétaire de la voiture calcule la distance minimale qu'elle devra parcourir pour recouvrer le coût de la modification. Si l'essence coûte 0,80 \$ le litre, cette distance, en kilomètres, est entre :

(A) 10 000 et 14 000 (B) 14 000 et 18 000 (C) 18 000 et 22 000
(D) 22 000 et 26 000 (E) 26 000 et 30 000

19. Le segment BT représente une peinture pendue dans une galerie d'art. Elle a une hauteur de 2 m et sa partie inférieure est à 1 m au-dessus du sol. Elle est éclairée par un projecteur placé au point S . Ce point est situé à 4 m au-dessus du point F qui est au sol, à 3 m du mur. La mesure de l'angle TSB , à l'unité près, est égale à :

(A) 27° (B) 63° (C) 34°
(D) 45° (E) 18°



à suivre ...



20. Si a , b et c sont des nombres positifs qui forment trois termes consécutifs d'une suite géométrique (c.-à-d. que $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$), alors la représentation graphique de $y = ax^2 + bx + c$ est :
- (A) une courbe qui coupe l'axe des abscisses en deux points distincts
 - (B) située complètement en dessous de l'axe des abscisses
 - (C) située complètement au-dessus de l'axe des abscisses
 - (D) une droite
 - (E) tangente à l'axe des abscisses

Partie C (8 points par bonne réponse)

21. Le premier terme d'une suite de nombres est 6. Chaque autre terme est défini comme suit. Si un terme, t , est pair, le terme suivant est $\frac{1}{2}t$. Si un terme, s , est impair, le terme suivant est $3s + 1$. Les quatre premiers termes de la suite sont donc 6, 3, 10 et 5. Le 100e terme de la suite est :
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6
22. Un pentagone $ABCDE$ est tel que chacune des cinq diagonales AC , BD , CE , DA et EB est complètement à l'intérieur du pentagone. Si chacun des triangles ABC , BCD , CDE , DEA et EAB a une aire de 1, alors l'aire du pentagone $ABCDE$, au centième près, est égale à :
- (A) 3,62 (B) 3,64 (C) 3,66 (D) 3,68 (E) 3,70
23. Un coin d'une boîte de forme rectangulaire est le point de rencontre de trois faces de la boîte. Les centres de ces faces sont les sommets d'un triangle dont les côtés ont des longueurs de 4 cm, 5 cm et 6 cm. Le volume de cette boîte, en centimètres cubes, est égal à :
- (A) $45\sqrt{3}$ (B) $45\sqrt{6}$ (C) $90\sqrt{6}$ (D) 125 (E) $120\sqrt{2}$
24. Lorsque l'expression $\left[(1+x)(1+2x^3)(1+4x^9)(1+8x^{27})(1+16x^{81})(1+32x^{243})(1+64x^{729}) \right]^2$ est développée et réduite, le coefficient de x^{2003} est égal à :
- (A) 0 (B) 2^{28} (C) 2^{30} (D) 2^{29} (E) 2^{31}
25. L'ensemble $\{1, 4, n\}$ a une propriété intéressante. Si on choisit deux éléments distincts de cet ensemble et que l'on ajoute 2112 à leur produit, la réponse est toujours un carré parfait. Si n est un entier strictement positif, le nombre de valeurs possibles de n est :
- (A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5 (E) 4





PUBLICATIONS

Les étudiants et les parents qui estiment que la résolution de problèmes constitue un divertissement et un loisir se réjouiront de pouvoir consulter les publications suivantes. Il s'agit d'excellentes ressources documentaires axées sur l'enrichissement, le développement des capacités à résoudre des problèmes et la préparation en vue des concours de mathématiques.

Exemplaires des Concours canadiens de mathématiques des années antérieures

Des exemplaires des concours antérieurs et des solutions, aussi bien en français qu'en anglais, sont disponibles gratuitement sur notre site web <http://www.cemc.uwaterloo.ca>

Livres «Problems Problems Problems»

Chaque volume est une ensemble de problèmes à choix multiple ou à solution complète. Les problèmes sont regroupés selon les sujets, avec 9 sujets ou plus par volume. Les problèmes sont choisis à partir des concours des années précédentes offerts par le Concours canadien de mathématiques et des solutions complètes sont fournies pour chaque problème. Chaque volume coûte 15,00 \$. **Le Volume 1 est disponible en français et en anglais. Les Volumes 2-8 sont disponibles en anglais seulement.**

Volume 1

- (Disponible en français)
- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets
- pour les élèves de 9^e, 10^e et 11^e année (Sec. III, IV et V)

Volume 3

- plus de 235 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)

Volume 5

- plus de 200 problèmes avec solutions complètes
- 9 sujets (différents de ceux du volume 3)
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)

Volume 7

- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves de 9^e et 10^e année (Sec. III et IV)

Volume 2

- plus de 325 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets (différents de ceux du volume 1)
- pour les élèves de 9^e, 10^e et 11^e année (Sec. III, IV et V)

Volume 4

- plus de 325 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves de 7^e, 8^e et 9^e année (Sec. I, II et III)

Volume 6

- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 11 sujets (différents de ceux du vol. 4)
- pour les élèves de 7^e, 8^e et 9^e année (Sec. I, II et III)

Volume 8

- plus de 200 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)

Les Problèmes et Leurs Solutions - Volume 1

Cette brochure fait suite à la collection de problèmes d'enrichissement offerte aux étudiants de 9^e, 10^e et 11^e années. Chacun des huit chapitres comprend un examen des solutions et des démarches suggérées. Ils comptent plus de 225 nouveaux problèmes, presque tous tirés des concours canadiens de mathématiques, accompagnés de solutions complètes. Le prix est de 20 \$. **(Disponible en anglais seulement.)**

Faire passer les commandes au : Concours canadien de mathématiques
Faculté de mathématiques, pièce MC 5181
Université de Waterloo
Waterloo (Ontario) N2L 3G1

Veuillez inscrire votre nom, votre adresse (et votre code postal) ainsi que votre numéro de téléphone.

Établir les chèques ou les mandats à l'ordre du «Centre for Education in Mathematics and Computing». Pour les commandes effectuées au Canada, veuillez ajouter 3 \$ pour le premier article afin d'acquitter les frais de port et de manutention et 1 \$ pour chaque article additionnel. Aucune taxe de vente provinciale ne s'applique, mais il faut ajouter la TPS de 7 p. 100. Pour les commandes *de l'extérieur du Canada SEULEMENT*, veuillez ajouter 10 \$ pour le premier article afin d'acquitter les frais de port et de manutention et 2 \$ pour chaque article additionnel. **Les prix de ces publications demeureront en vigueur jusqu'en 1 septembre 2003.**

REMARQUE : Tous droits réservés. Les publications sont protégées par Copyright. Il est interdit de copier le matériel sans la permission de la Fondation Waterloo de mathématiques.

