Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre en mathématiques et en
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Solutions du Concours Euclide 2003

pour les prix du
The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

1. a) *Solution 1*

Puisque la parabole a pour abscisses à l'origine 2 et 4, son axe de symétrie a pour équation $x = 3$.
Le point $(0, 8)$ est sur la parabole. Son image, par une réflexion par rapport à la droite d'équation $x = 3$, est le point $(6, 8)$. Donc $a = 6$.

Solution 2

Puisque la parabole a pour abscisses à l'origine 2 et 4, son équation est de la forme $y = A(x-2)(x-4)$.
Puisque le point $(0, 8)$ est sur la parabole, on a $8 = A(-2)(-4)$, d'où $A = 1$.
L'équation est donc $y = (x-2)(x-4)$, ou $y = x^2 - 6x + 8$.
Puisque le point $(0, 8)$ est sur la parabole, on a :

$$8 = a^2 - 6a + 8$$
$$0 = a^2 - 6a$$
$$0 = a(a-6)$$

Puisque $a \neq 0$, alors $a = 6$. RÉPONSE : $a = 6$

b) *Solution 1*

Puisque l'équation admet deux racines égales, l'expression du membre de gauche doit être un carré parfait. Puisque le premier coefficient est 1 et que le deuxième coefficient est 6, l'expression doit être $(x+3)^2$, ou $x^2 + 6x + 9$. En comparant les expressions, on obtient $k = 9$.

Solution 2

Puisque l'équation du second degré admet deux racines égales, son discriminant est nul.
Donc $6^2 - 4(1)(k) = 0$, d'où $4k = 36$, ou $k = 9$. RÉPONSE : $k = 9$

c) Puisque le point $(1, 4)$ est sur la parabole, on a $4 = 1^2 - 3(1) + c$, d'où $c = 6$.
Pour déterminer les points d'intersection de la droite et de la parabole, on pose :

$$2x + 2 = x^2 - 3x + 6$$
$$0 = x^2 - 5x + 4$$
$$0 = (x-1)(x-4)$$

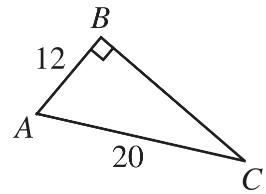
Donc $x - 1 = 0$ ou $x - 4 = 0$. Les points d'intersection ont donc pour abscisse respective $x = 1$ et $x = 4$. On reporte $x = 4$ dans l'équation $y = 2x + 2$ pour obtenir $y = 10$.
Le deuxième point d'intersection est donc $(4, 10)$.

2. a) On écrit l'équation sous la forme :

$$3\sin(x) = \cos(15°)$$
$$\sin(x) = \frac{1}{3}\cos(15°)$$
$$\sin(x) \approx 0,3220$$

Donc $x = 18,8^\circ$. RÉPONSE : $x = 18,8^\circ$

b) *Solution 1*



Puisque $\sin C = \frac{AB}{AC}$, alors $AB = AC\sin C$, d'où $AB = 20\left(\frac{3}{5}\right)$, ou $AB = 12$.

D'après le théorème de Pythagore, on a $BC^2 = AC^2 - AB^2$, d'où $BC^2 = 20^2 - 12^2$, ou $BC^2 = 256$. Donc $BC = 16$.

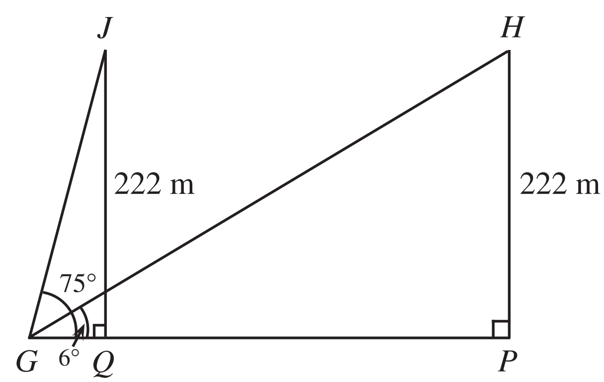
Solution 2

Puisque $\cos C = \frac{BC}{AC}$, alors $BC = AC\cos C$.

Puisque $\sin C = \frac{3}{5}$ et que $\cos^2 C = 1 - \sin^2 C$, alors $\cos^2 C = 1 - \frac{9}{25}$, d'où $\cos^2 C = \frac{16}{25}$, ou $\cos C = \frac{4}{5}$. (On remarque que $\cos C$ est positif puisque l'angle C est aigu.)

Donc $BC = 20\left(\frac{4}{5}\right)$, ou $BC = 16$. RÉPONSE : $BC = 16$

c) Soit G le point où se trouve la chèvre, H la position de l'hélicoptère lors de la première mesure, P le point sur terre directement en dessous de H, J la position de l'hélicoptère une minute plus tard et Q le point sur terre directement en dessous de J.



D'après la première position, on a $\tan(6°) = \frac{HP}{PG}$, d'où $PG = \frac{222}{\tan(6°)}$, ou $PG \approx 2112,19$ m.

D'après la deuxième position, on a $\tan(75°) = \frac{JQ}{QG}$, d'où $QG = \frac{222}{\tan(75°)}$, ou $QG \approx 59,48$ m.

Pendant la minute entre les deux mesures, l'hélicoptère a parcouru $2112,19 - 59,48$, ou 2052,71 m, c'est-à-dire 2,0527 km.

Dans une heure, l'hélicoptère parcourt $60(2{,}0527)$, ou 123,162 km.
L'hélicoptère avance donc à une vitesse de 123 km/h.

3. a) Puisqu'on cherche la valeur de $f(9)$, on pose $x = 3$ dans la formule de récurrence pour obtenir $f(9) = 2f(3) + 3$.
On a donc besoin de la valeur de $f(3)$. En posant $x = 0$ dans la formule de récurrence, on obtient $f(3)$ dans le membre de gauche et $f(0)$, dont on connaît la valeur, dans le membre de droite. On a donc $f(3) = 2f(0) + 3$, d'où $f(3) = 2(6) + 3$, ou $f(3) = 15$.
Donc $f(9) = 2(15) + 3$, ou $f(9) = 33$. RÉPONSE : $f(9) = 33$

b) *Solution 1*
On détermine les expressions pour $f(x)$ et $g(x)$ en résolvant le système d'équations.
On divise chaque membre de la deuxième équation par 2 pour obtenir
$f(x) + 2g(x) = x^2 + 2$.
On soustrait cette équation de la première pour obtenir $g(x) = x + 4$.
On reporte $g(x) = x + 4$ dans l'équation précédente pour obtenir $f(x) + 2(x+4) = x^2 + 2$, d'où $f(x) = x^2 - 2x - 6$.
On cherche les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = g(x)$:

$$x^2 - 2x - 6 = x + 4$$
$$x^2 - 3x - 10 = 0$$
$$(x-5)(x+2) = 0$$

Donc $x = 5$ ou $x = -2$.
Les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = g(x)$ sont –2 et 5.

Solution 2
Au lieu de résoudre l'équation $f(x) = g(x)$, on résout l'équation $f(x) - g(x) = 0$. On cherche une expression pour $f(x) - g(x)$ en manipulant les équations données.
Après un peu de manipulations, on découvre que :

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= 2\big(2f(x) + 4g(x)\big) - 3\big(f(x) + 3g(x)\big) \\ &= 2\left(2x^2 + 4\right) - 3\left(x^2 + x + 6\right) \\ &= x^2 - 3x - 10 \end{aligned}$$

Posons $f(x) - g(x) = 0$. Donc $x^2 - 3x - 10 = 0$, ou $(x-5)(x+2) = 0$.
Donc $x = 5$ ou $x = -2$.
Les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = g(x)$ sont –2 et 5.

4. a) *Solution 1*

Soit A, B, C, D et E les cinq patineuses, D et E étant les Canadiennes.
Il y a 5 façons de choisir la gagnante. Pour chaque choix, il y a 4 choix pour la deuxième. Pour chacun de ces choix, il y a 3 choix pour la troisième et ainsi de suite. Il y a donc $5!$, soit $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, ou 120 façons de placer les patineuses en ordre.
Si les Canadiennes ne remportent aucune médaille, A, B et C doivent prendre les trois premières positions, tandis que D et E doivent prendre les deux dernières.
Il y a $3!$, ou 6 façons de placer A, B et C dans les trois premières positions. Pour chacune de ces façons, il y a $2!$, ou 2 façons de placer D et E dans les deux dernières positions. Il y a donc 6×2, ou 12 façons de placer les patineuses de manière que les Canadiennes ne remportent aucune médaille.
La probabilité pour qu'aucune Canadienne ne remporte une médaille est égale à :

$$\frac{\text{nombre de positions où les Canadiennes ne remportent aucune médaille}}{\text{nombre total de façons de placer les patineuses en ordre}},$$

c'est-à-dire à $\frac{12}{120}$, ou $\frac{1}{10}$.

Solution 2

Soit A, B, C, D et E les cinq patineuses, D et E étant les Canadiennes. Dans une course, deux patineuses doivent terminer en 4^{e} et 5^{e} positions. Puisque les cinq patineuses ont la même chance de terminer dans n'importe quelle position, toutes les paires de patineuses ont la même chance de finir dans les 4^{e} et 5^{e} positions. Or on peut former dix paires de patineuses parmi les cinq finalistes, soit {A, B}, {A, C}, {A, D}, {A, E}, {B, C}, {B, D}, {B, E}, {C, D}, {C, E} et {D, E}.
Une seule de ces paires est formée de Canadiennes. La probabilité pour qu'aucune des Canadiennes ne remporte une médaille est donc égale à $\frac{1}{10}$, puisqu'il y a un choix sur dix.

RÉPONSE : $\frac{1}{10}$

b) *Solution 1*

Puisque le plus petit commun multiple de 3, 5, 10 et 15 est 30, on peut compter le nombre d'entiers, de 1 à 30, qui vérifient la condition et multiplier ce nombre par 10 pour obtenir le nombre d'entiers, de 1 à 300, qui vérifient la condition. En effet, si on ajoute un multiple de 30 à un entier qui vérifie la condition, le nouvel entier vérifiera aussi la condition. De plus, si on ajoute un multiple de 30 à un entier qui ne vérifie pas la condition, le nouvel entier ne vérifiera pas la condition.
De 1 à 30, les entiers 3, 5, 6, 9, 12, 18, 21, 24, 25 et 27 sont des multiples de 3 ou de 5, sans être des multiples de 10 ou de 15. Il y a 10 tels entiers.
Il y a donc 100 entiers, de 1 à 300, qui sont des multiples de 3 ou de 5, sans être des multiples de 10 ou de 15.

Solution 2

On détermine le nombre d'entiers en comptant attentivement.
Il y a 100 entiers, de 1 à 300, qui sont des multiples de 3.
Il y a 60 entiers, de 1 à 300, qui sont des multiples de 5.
On a donc 160 candidats. Or les multiples de 15 ont été comptés deux fois, soit comme multiples de 3 et comme multiples de 5. Il y a 20 entiers, de 1 à 300, qui sont des multiples de 15. Il faudra donc soustraire 40 candidats. Il en reste donc 120.
Les multiples de 10 ont été comptés une fois chacun comme multiples de 5. Il y a 30 entiers, de 1 à 300, qui sont des multiples de 10. Il faudra donc soustraire 30 candidats. Or certains de ces multiples ont déjà été enlevés, par exemple l'entier 30. Parmi les 30 multiples de 10, il y en a 10 qui sont des multiples de 15 et qui ont déjà été enlevés. Il reste donc 20 candidats à enlever.
Il reste donc 100 entiers qui sont des multiples de 3 ou de 5, sans être des multiples de 10 ou de 15.

5. a) Puisque le signe change à tous les trois termes, il semble approprié d'examiner les termes en groupes de six.
La somme des 6 premiers termes est égale à $1+3+5-7-9-11$, ou -18.
La somme des 6 termes suivants est égale à $13+15+17-19-21-23$, ou -18.
On constate que chacun des trois premiers termes du deuxième groupe de 6 termes est 12 de plus que le terme correspondant du premier groupe. De même, chacun des trois derniers termes du deuxième groupe est 12 de moins que le terme correspondant du premier groupe. La somme du deuxième groupe est donc égale à celle du premier. Il en est de même pour les groupes subséquents de six termes.
Dans les 300 termes, il y a 50 groupes de six termes. La somme est donc égale à $50(-18)$, ou -900. RÉPONSE : -900

b) Soit a le chiffre des dizaines et b le chiffre des unités. Selon les renseignements, on a :

$$\begin{aligned} a^2+10b &= b^2+10a \\ a^2-b^2-10a+10b &= 0 \\ (a+b)(a-b)-10(a-b) &= 0 \\ (a-b)(a-b-10) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $a=b$ ou $a+b=10$.
L'entier peut donc être égal à 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82 ou 91. Il suffit maintenant de déterminer les nombres premiers parmi ces nombres.
On rejète d'abord les multiples de 11 supérieurs à 11, ainsi que les nombres pairs. Il reste alors 11, 19, 37, 73 et 91.
Tous ces nombres sont premiers, à l'exception de 91 qui est égal à 13×7.
Les nombres premiers sont donc 11, 19, 37 et 73.

6. a) *Solution 1*

En 24 minutes, le nombre d'atomes initial de l'isotope A est diminué de moitié quatre fois. Le nombre initial d'atomes est donc 2^4, ou 16 fois le nombre d'atomes après 24 minutes.

Au début, il y a deux fois plus d'atomes d'isotope A que d'atomes d'isotope B. Au début, il y avait donc 8 fois plus d'atomes d'isotope B qu'après 24 minutes, ce dernier étant le même que le nombre d'atomes d'isotope A. Le nombre d'atomes d'isotope B a donc diminué de moitié 3 fois en 24 minutes. Les atomes de l'isotope B mettent donc 8 minutes pour diminuer de moitié.

Solution 2

Au début, il y a deux fois plus d'atomes d'isotope A que d'atomes d'isotope B. Soit $2x$ et x les nombres respectifs d'atomes au début.

Puisque les atomes d'isotope A diminuent de moitié à toutes les 6 minutes, après 24 minutes, le nombre d'atomes de cet isotope sera égal à $2x\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

Soit T le nombre de minutes que mettent les atomes d'isotope B pour diminuer de moitié.

Après 24 minutes, le nombre d'atomes sera égal à $x\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24}{T}}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} 2x\left(\frac{1}{2}\right)^4 &= x\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24}{T}} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24}{T}} \\ 3 &= \frac{24}{T} \\ T &= 8 \end{aligned}$$

Les atomes de l'isotope B mettent donc 8 minutes pour diminuer de moitié.

RÉPONSE : 8 minutes

b) *Solution 1*

On utilise les lois $\log_{10} A + \log_{10} B = \log_{10} AB$ et $\log_{10} A - \log_{10} B = \log_{10} \frac{A}{B}$ pour écrire les deux équations sous la forme :

$$\begin{aligned} \log_{10}\left(x^3y^2\right) &= 11 \\ \log_{10}\left(\frac{x^2}{y^3}\right) &= 3 \end{aligned}$$

On écrit ces équations sous forme exponentielle :

$$x^3y^2 = 10^{11}$$
$$\frac{x^2}{y^3} = 10^3$$

Selon la première équation, x est positif et selon la deuxième, y est positif.
Pour éliminer les y, on élève les deux membres de la première équation au cube et on élève les deux membres de la deuxième équation au carré :

$$x^9y^6 = 10^{33}$$
$$\frac{x^4}{y^6} = 10^6$$

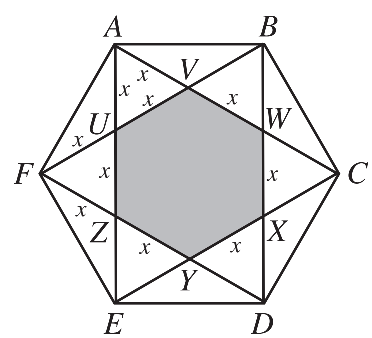
On multiplie les deux équations, membre par membre, pour obtenir $x^{13} = 10^{39}$, d'où $x = 10^3$. On reporte $x = 10^3$ dans l'équation $x^3y^2 = 10^{11}$ pour obtenir $y^2 = 10^2$, d'où $y = \pm 10$. Or puisque y est positif, on a $y = 10$.
La solution du système est $x = 10^3$ et $y = 10$.

Solution 2
Puisque le domaine du logarithme est l'ensemble des nombres positifs, les expressions $\log_{10}\left(x^3\right)$ et $\log_{10}\left(y^3\right)$ indiquent que les valeurs de x et de y sont positives.
On utilise la loi $\log_{10}\left(a^b\right) = b\log_{10} a$ pour écrire les équations sous forme :

$$3\log_{10} x + 2\log_{10} y = 11$$
$$2\log_{10} x - 3\log_{10} y = 3$$

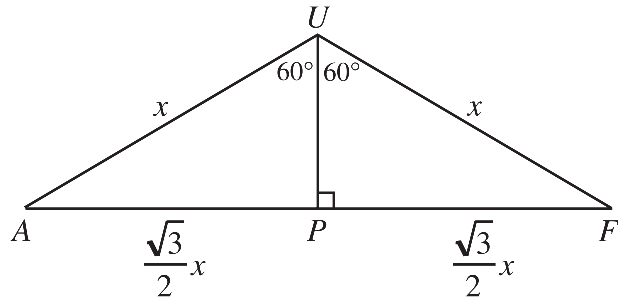
On multiplie chaque membre de la première équation par 3 et chaque membre de la deuxième équation par 2. On additionne les équations, membre par membre, pour obtenir $13\log_{10} x = 39$, ou $\log_{10} x = 3$. On reporte $\log_{10} x = 3$ dans la première équation pour obtenir $\log_{10} y = 1$.
Donc $x = 10^3$ et $y = 10$.

7. a) *Solution 1*
Soit U, V, W, X, Y et Z les sommets de l'hexagone ombré indiqués dans le diagramme.
Par symétrie, les triangles UVA, VWB, WXC, XYD, YZE et ZUF sont des triangles équilatéraux congruents.
Pour déterminer le rapport de l'aire des hexagones, on détermine d'abord le rapport de la longueur de leurs côtés.
Soit x la longueur des côtés de l'hexagone ombré. Donc $AU = UF = x$.



L'angle AUF est le supplément de l'angle AUV du triangle équilatéral UVA. Donc $\angle AUF = 120°$.

On abaisse une perpendiculaire UP du sommet U au côté AB. UP divise le triangle en deux triangles 30°-60°-90°. On a donc $AP = PF = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, d'où $AF = \sqrt{3}x$. Le rapport de la longueur des côtés des hexagones est égal à $\sqrt{3}x : x$, ou $\sqrt{3}:1$.



Le rapport de l'aire des hexagones est donc égal à $\left(\sqrt{3}\right)^2 : 1^2$, ou $3:1$.

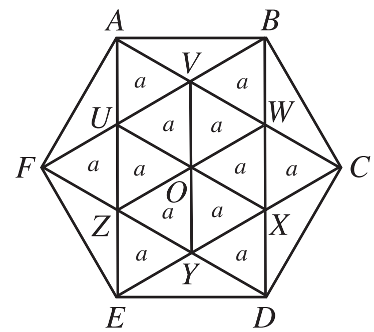
Puisque le grand hexagone a une aire de 36, l'hexagone ombré a une aire de 12.

Solution 2

Soit U, V, W, X, Y et Z les sommets de l'hexagone ombré indiqués dans le diagramme.

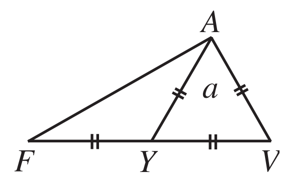
Par symétrie, les triangles UVA, VWB, WXC, XYD, YZE et ZUF sont des triangles équilatéraux congruents.

On trace les diagonales UX, VY et WZ de l'hexagone ombré. Ces diagonales sont concourantes en O. Ces diagonales divisent l'hexagone ombré en six triangles équilatéraux congruents aux triangles équilatéraux précédents.



Soit a l'aire de chacun de ces triangles. Le triangle AUF a aussi une aire de a.

En effet, puisque $FU = AU = UV$ (ce sont des longueurs des côtés de deux triangles équilatéraux congruents), AU est donc une médiane du triangle AFV et elle divise l'aire de ce triangle en deux aires égales.



L'aire du triangle AFU est donc égale à a. Il en est de même pour les triangles AVB, BWC, CXD, DYE et EZF.

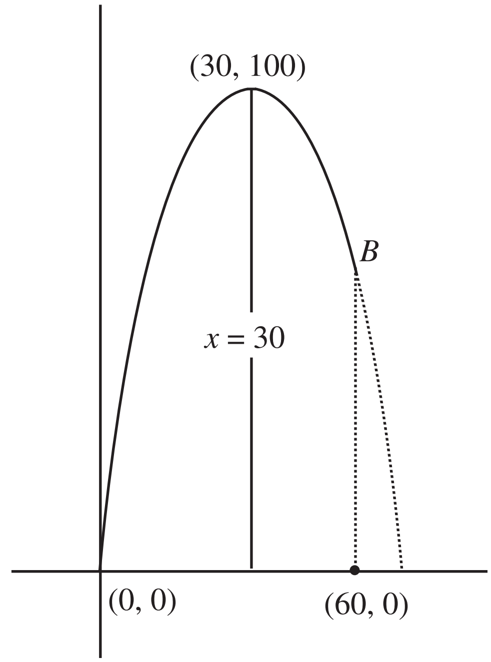
Le grand hexagone est donc divisé en 18 triangles ayant la même aire, a. Donc $a = 2$.

L'hexagone ombré est divisé en six triangles ayant une aire de 2. Son aire est donc égale à 12.

RÉPONSE : 12

b) On place un repère cartésien sur la trajectoire comme dans le diagramme. La bouche du canon est au point $(0,0)$. Puisque la hauteur maximale de 100 m est atteinte au-dessus d'un point au sol à 30 m du canon, l'axe de symétrie de la parabole a pour équation $x = 30$ et la parabole a pour abscisse à l'origine 60. L'équation de la parabole a donc la forme $y = ax(x-60)$. Puisque la parabole passe par le point $(30,100)$, on a $100 = a(30)(30-60)$, ou $100 = -900a$, d'où $a = -\frac{1}{9}$.

L'équation de la parabole est donc $y = -\frac{1}{9}x(x-60)$.



(On pourrait aussi dire que puisque la parabole a pour sommet $(30,100)$, elle a une équation de la forme $y = a(x-30)^2 + 100$. Puisqu'elle passe par le point $(0,0)$, on a $0 = a(0-30)^2 + 100$, ou $0 = 900a + 100$, d'où $a = -\frac{1}{9}$. L'équation de la parabole est donc $y = -\frac{1}{9}(x-30)^2 + 100$.)

Pour déterminer la distance horizontale du canon jusqu'au filet, posons $y = 64$, puisque Bibi s'accroche au filet à une hauteur de 64 m. On a donc :

$$64 = -\frac{1}{9}x(x-60)$$
$$0 = x^2 - 60x + 576$$
$$0 = (x-12)(x-48)$$

Donc $x = 12$ ou $x = 48$.

Puisque Bibi s'est accrochée au filet après avoir atteint une hauteur maximale, on a $x = 48$. La distance horizontale du canon jusqu'au filet est égale à 48 m.

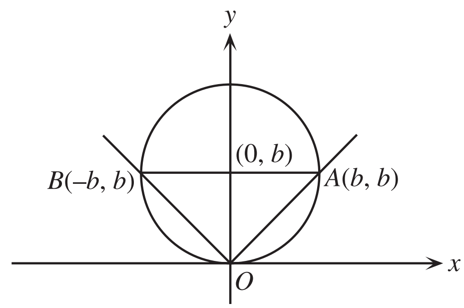
8. a) Puisque le cercle et la représentation graphique de $y = |x|$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, chaque point d'intersection est le symétrique d'un autre point d'intersection par rapport à l'axe des ordonnées. Puisque l'origine est un point d'intersection, il doit y avoir trois points d'intersection.

Soit $(0,b)$ le centre du cercle. Puisque le cercle passe par l'origine, son rayon est égal à b et b est positif. L'équation du cercle est donc $x^2 + (y-b)^2 = b^2$.

Pour déterminer un autre point d'intersection, on considère le premier quadrant. Dans ce quadrant, l'équation $y = |x|$ devient $y = x$. Au point d'intersection, on a :

$$x^2 + (x-b)^2 = b^2$$
$$2x^2 - 2bx = 0$$
$$2x(x-b) = 0$$

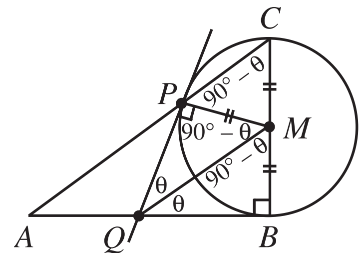
Donc $x = 0$ ou $x = b$. On a donc un point d'intersection en $(0, 0)$ et un autre en (b, b).
Par symétrie, il y a aussi un point d'intersection en $(-b, b)$.



Puisque le rayon du cercle est égal à b, l'aire du cercle est égale à πb^2.
Le triangle OAB a une base AB de longueur $2b$. Sa hauteur correspondante est la distance entre l'origine et le point $(0, b)$. Elle est égale à b. L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}b(2b)$, ou b^2.
Le rapport de l'aire du triangle à l'aire du cercle est égal à $b^2 : \pi b^2$, ou $1 : \pi$.

b) *Solution 1*

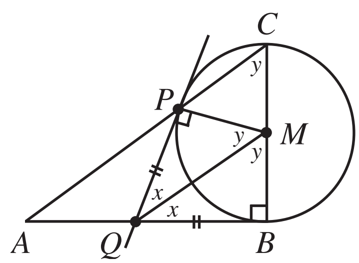
Puisque M est le milieu du côté BC et que le cercle a pour diamètre BC, son centre est M.
On joint P et M. Puisque PQ est tangent au cercle, PM est perpendiculaire à PQ.
Puisque PM et BM sont des rayons du cercle, $PM = MB$.
Puisque les triangles QPM et QBM sont rectangles et qu'ils ont deux paires de côtés congrus deux à deux, ils sont congruents.



Soit $\angle MQB = \angle MQP = \theta$. Donc $\angle QMB = \angle QMP = 90° - \theta$.
Donc $\angle PMC = 180° - \angle PMQ - \angle BMQ$, d'où $\angle PMC = 180° - (90° - \theta) - (90° - \theta)$, ou $\angle PMC = 2\theta$.
Or le triangle PMC est isocèle, car les côtés PM et CM sont des rayons.
Donc $\angle CPM = \frac{1}{2}(180° - \angle PMC)$, d'où $\angle CPM = 90° - \theta$.
Donc $\angle CPM = \angle PMQ$. Puisque les droites AC et QM sont coupées par la sécante PM et que $\angle CPM = \angle PMQ$, les segments AC et QM sont parallèles.

Solution 2

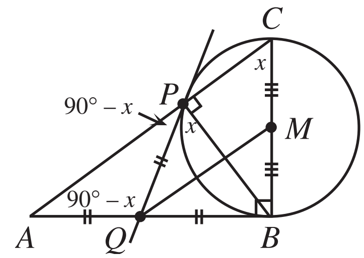
On trace le segment PM.
Puisque les tangentes QP et QB se coupent en Q, alors $QP = QB$.
Puisque le segment QM joint le point d'intersection des tangentes et le centre du cercle, alors par symétrie, $\angle PQM = \angle BQM$ et $\angle PMQ = \angle BMQ$.



Soit $\angle PQM = \angle BQM = x$ et $\angle PMQ = \angle BMQ = y$.
Puisque le triangle QMB est rectangle, $x + y = 90°$.

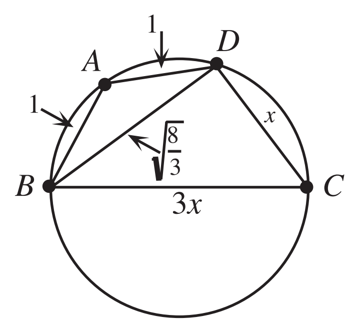
Puisque l'angle au centre PMB, de mesure $2y$, intercepte la corde PB, l'angle inscrit PCB mesure y.
Donc $\angle ACB = \angle QMB$ et QM est donc parallèle à AC.

Solution 3



On trace le segment PB.
L'angle QPB, formé par la tangente QP et la corde PB, et l'angle inscrit PCB, qui intercepte la corde, sont congrus. Soit $\angle QPB = \angle PCB = x$.
Puisque BC est un diamètre, $\angle CPB = 90°$. Donc $\angle APB = 90°$. Donc $\angle APQ = 90° - x$.
D'après le triangle ABC, $\angle BAC = 90° - x$. Dans le triangle APQ, on a donc $\angle APQ = \angle PAQ = 90° - x$. Le triangle est donc isocèle et $AQ = PQ$.
Puisque QP et QB sont des tangentes, alors $QP = QB$. Donc $AQ = QB$ et Q est le milieu du segment AB.
Le segment QM joint les milieux de deux côtés du triangle ABC. Il est donc parallèle au côté AC. (Ce résultat est bien connu. On peut le démontrer facilement en démontrant que les triangles ABC et QBM sont semblables, d'où $\angle CAB = \angle MQB$.)

9. *Solution 1*



On considère le triangle ABD. Puisqu'on connaît la longueur de deux de ses côtés et le cosinus de l'angle qu'ils forment, on peut déterminer la longueur du côté BD au moyen de la loi du cosinus.

$$\begin{aligned} BD &= \sqrt{BA^2 + AD^2 - 2(BA)(AD)\cos\angle BAD} \\ &= \sqrt{2 - 2\left(-\tfrac{1}{3}\right)} \\ &= \sqrt{\tfrac{8}{3}} \end{aligned}$$

Soit $x = \cos\angle ABC$. Donc $CD = x$.
Puisque le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible, $\angle ADC = 180° - \angle ABC$.
Donc $\cos\angle ADC = -\cos\angle ABC$, d'où $\cos\angle ADC = -x$.
De même, $\cos\angle BCD = -\cos\angle BAD$, d'où $\cos\angle BCD = \frac{1}{3}$.
On utilise simultanément la loi des cosinus dans les triangles ADC et ABC, puisque le côté AC est commun au deux triangles.

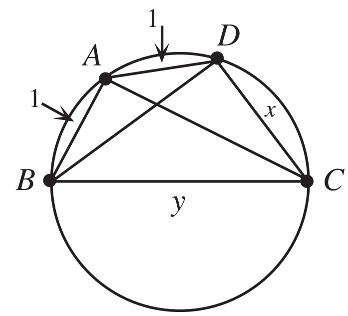
$$1^2 + x^2 - 2(1)(x)\cos\angle ADC = 1^2 + BC^2 - 2(1)(BC)\cos\angle ABC$$
$$1^2 + x^2 - 2(1)(x)(-x) = 1^2 + BC^2 - 2(1)(BC)(x)$$

On tentera d'exprimer BC en fonction de x.

$$0 = BC^2 - 2(BC)x - 3x^2$$
$$0 = (BC - 3x)(BC + x)$$

Donc $BC = 3x$ ou $BC = -x$. Ce dernier résultat est rejeté car x et BC sont positifs.
Puisque les longueurs des côtés CD et BC sont dans un rapport $1:3$ et que $\cos\angle BCD = \frac{1}{3}$, le triangle BCD doit être rectangle. (On pourrait aussi utiliser la loi du cosinus pour démontrer que $BD^2 = 8x^2$, d'où $CD^2 + BD^2 = BC^2$.)
Puisque le triangle BCD est rectangle en D, le côté BC est un diamètre du cercle circonscrit.

Solution 2
Soit $x = CD = \cos\angle ABC$ et $y = BC$.



Puisque les angles opposés d'un quadrilatère inscriptible sont supplémentaires, leurs cosinus sont l'opposé l'un de l'autre. Donc $\cos\angle ADC = -x$ et $\cos\angle BCD = \frac{1}{3}$.
On utilise simultanément la loi des cosinus dans les triangles ADC et ABC, puisque le côté AC est commun au deux triangles. On fait de même dans les triangles ADB et CDB, puisque le côté BD est commun aux deux triangles.
On a donc :

$$\begin{aligned}1^2 + x^2 - 2(1)(x)\cos\angle ADC &= 1^2 + y^2 - 2(1)(y)\cos\angle ABC \\ 1 + x^2 - 2x(-x) &= 1 + y^2 - 2y(x) \\ 0 &= y^2 - 2xy - 3x^2 \\ 0 &= (y-3x)(y+x)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}1^2 + 1^2 - 2(1)(1)\cos\angle BAD &= x^2 + y^2 - 2xy\cos\angle BCD \\ 2 - 2\left(-\frac{1}{3}\right) &= x^2 + y^2 - 2xy\left(\frac{1}{3}\right) \\ \frac{8}{3} &= x^2 + y^2 - \frac{2}{3}xy\end{aligned}$$

D'après la première équation, on a $y = 3x$ ou $y = -x$. Cette dernière est rejetée puisque x et y représentent des longueurs et leurs valeurs doivent alors être positives. On reporte $y = 3x$ dans la deuxième équation :

$$\begin{aligned}\frac{8}{3} &= x^2 + (3x)^2 - \frac{2}{3}x(3x) \\ \frac{8}{3} &= 8x^2 \\ x^2 &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Puisque x est positif, on a $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Donc $y = \frac{3}{\sqrt{3}}$, ou $y = \sqrt{3}$.

Selon la loi du cosinus, employée ci-haut dans le triangle ABD, on a $BD = \sqrt{\frac{8}{3}}$.

Dans le triangle BCD, on a donc $BC = \sqrt{3}$, $CD = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $BD = \sqrt{\frac{8}{3}}$. Donc $BC^2 = CD^2 + BD^2$ et le triangle est donc rectangle en D. BC est donc le diamètre du cercle.

10. a) Pour démontrer que 8 est un entier sauvage, on doit partager les entiers de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ en trois ensembles qui vérifient les critères.

Puisque la somme des entiers de 1 à 8 est égale à 36, la somme des éléments des ensembles A, B et C doit être égale à 12 selon le premier critère.

Selon le quatrième critère, l'ensemble C doit contenir les nombres 3 et 6.

Selon le deuxième critère, l'ensemble A ne peut contenir que 1, 3, 5 et 7. Puisque la somme de ses éléments est égale à 12 et puisque 3 appartient à C, on a $A = \{5, 7\}$.

Pour que C contienne 3 et 6 et que la somme de ses éléments soit égale à 12, on doit avoir $C = \{1, 2, 3, 6\}$. On a alors $B = \{4, 8\}$ et les trois ensembles satisfont aux quatre critères.

Donc 8 est un entier sauvage.

b) On adopte la stratégie suivante : On place d'abord les multiples de 3 dans l'ensemble C, on place ensuite les autres nombres pairs dans l'ensemble B et on place tous les autres nombres, de 1 à n, dans l'ensemble A. La somme des éléments des ensembles ne sera pas la même, mais on pourra probablement faire bouger certains nombres d'un ensemble à un autre de manière que les sommes soient égales. (On remarquera qu'il est impossible d'ajouter des éléments à A ou à B et qu'il est impossible d'en enlever de C.) On utilisera le symbole $|C|$ pour représenter la somme des éléments de l'ensemble C.

Puisqu'on considère les entiers n pairs et que l'on veut examiner les multiples de 3 , de 1 à n, il semble utile de considérer n comme un nombre de la forme $6k$, $6k+2$ ou $6k+4$, k étant un entier strictement positif. Cela nous permettra de déterminer rapidement le plus grand multiple de 3 dans l'ensemble.

1^er^ cas : $n = 6k$

Dans ce cas, C contient au départ tous les entiers 3, 6, 9, …, $6k$. On voit que la somme des éléments de C est supérieure à un tiers de la somme des entiers de 1 à $6k$. Puisqu'il est impossible d'enlever des éléments de C, il est impossible de faire en sorte que la somme des éléments soit la même pour A, B et C. Dans ce cas, n ne peut être un entier sauvage.

2^e^ cas : $n = 6k+4$

La somme des entiers de 1 à n, c'est-à-dire de 1 à $6k+4$, est égale à $\dfrac{(6k+4)(1+6k+4)}{2}$, c'est-à-dire à $18k^2+27k+10$, ou $3\left(6k^2+9k+3\right)+1$. Cette somme n'est pas divisible par 3 et le premier critère ne peut être respecté. Dans ce cas, n ne peut être un entier sauvage.

3^e^ cas : $n = 6k+2$

La somme des entiers de 1 à n, c'est-à-dire de 1 à $6k+2$, est égale à $\dfrac{(6k+2)(6k+3)}{2}$, ou $18k^2+15k+3$. Pour que la somme des éléments soit la même pour A, B et C, elle devra être égale à $6k^2+5k+1$.

Puisque C contient au moins les entiers 3, 6, 9, …, $6k$, $|C|$ est supérieure ou égale à $3(1+2+3+\ldots+2k)$, c'est-à-dire à $3\frac{(2k)(2k+1)}{2}$, ou $6k^2+3k$.

Puisque A contient au plus les entiers 1, 3, 5, 7, …, $6k+1$, mais qu'il ne contient pas les multiples impairs de 3, soit les entiers 3, 9, 15, …, $6k-3$, alors :

$$\begin{aligned}|A| &\le (1+3+5+\ldots+6k+1)-(3+9+\ldots+6k-3)\\ &= \frac{(3k+1)[1+(6k+1)]}{2}-\frac{k[3+(6k-3)]}{2}\\ &= (3k+1)(3k+1)-k(3k)\\ &= 6k^2+6k+1\end{aligned}$$

Puisque B contient au plus les entiers 2, 4, 6, …, $6k+2$, mais qu'il ne contient pas les multiples pairs de 3, soit les entiers 6, 12, 18, …, $6k$, alors :

$$\begin{aligned}|B| &\le (2+4+6+\ldots+6k+2)-(6+12+18+\ldots+6k)\\ &= \frac{(3k+1)[2+(6k+2)]}{2}-\frac{k(6+6k)}{2}\\ &= (3k+1)(3k+2)-k(3+3k)\\ &= 6k^2+6k+2\end{aligned}$$

Pour que la somme des éléments soit la même pour A, B et C, il manque $2k+1$ à $|C|$. De plus, il faudra enlever k à $|A|$ et il faudra enlever $k+1$ à $|B|$. Puisqu'on suppose que n est un entier sauvage, il est possible de le faire. Puisque B ne contient que des entiers pairs, $k+1$ doit être pair et k doit donc être impair. On peut donc écrire $k=2l+1$, pour un entier l quelconque. On a donc :

$$\begin{aligned}\frac{n+4}{12} &= \frac{(6k+2)+4}{12}\\ &= \frac{6(2l+1)+6}{12}\\ &= l+1\end{aligned}$$

Donc, $\frac{n+4}{12}$ est un entier.

On a donc démontré que si n est un entier sauvage pair, alors $\frac{n+4}{12}$ est un entier.

c) D'après b), pour que n soit un entier sauvage pair il faut que $\frac{n+4}{12}$ soit un entier. Les seuls entiers pairs, inférieurs à 100, qui vérifient cette condition sont 8, 20, 32, 44, 56, 68, 80 et 92. On sait déjà que 8 est un entier sauvage. On vérifie les autres possibilités en se référant à la solution de b). Après une première distribution, il fallait enlever k à $|A|$ et enlever $k+1$ à $|B|$. On utilise le tableau suivant.

n	k	Somme k qu'il faut soustraire de $\lvert A \rvert$	Somme $k+1$ qu'il faut soustraire de $\lvert B \rvert$	Est-il possible de le faire?
20	3	3	4	Non. On ne peut retirer de A des éléments dont la somme est 3.
32	5	5	6	Oui. On retire 5 de A et on retire 2 et 4 de B.
44	7	7	8	Oui. On retire 7 de A et 8 de B.
56	9	9	10	Non. On ne peut retirer de A des éléments dont la somme est 9.
68	11	11	12	Oui. On retire 11 de A et on retire 4 et 8 de B.
80	13	13	14	Oui. On retire 13 de A et 14 de B.
92	15	15	16	Non. On ne peut retirer de A des éléments dont la somme est 15.

Les seuls éléments sauvages inférieurs à 100 sont 8, 32, 44, 68 et 80.