



Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide (12^e – Sec. V)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

Le mardi 15 avril 2003

Avec la
contribution de :



**Samson Béclair
Deloitte
& Touche**
Comptables agréés

Avec la
participation de :



Institut canadien
des actuaires



London Life, compagnie
d'assurance-vie et La
Great-West, compagnie
d'assurance-vie



iAnywhere
iAnywhere Solutions

Avec
l'appui de :

Financière
Manuvie

Durée : 2 heures et demie

© 2003 Waterloo Mathematics Foundation

L'utilisation de la calculatrice **est permise**, pourvu que celle-ci ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

N'ouvrez pas ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions valant 10 points chacune. Les parties de chaque question peuvent être de deux types. Les parties à **RÉPONSE COURTE** valent 2 points chacune (questions 1 à 2) ou 3 points chacune (questions 3 à 7). Les parties à **DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points pour la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES :

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci: .
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera accordée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

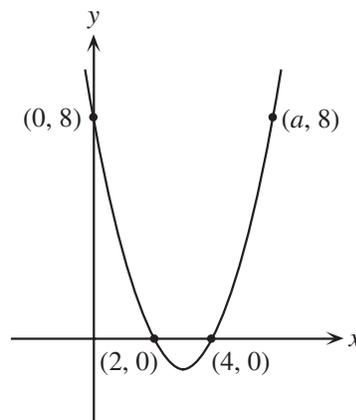
Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT :

1. Les questions À **DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci: .
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse.
3. Des points sont accordés pour des solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

- REMARQUES :
1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
 2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
 3. Pour une question accompagnée de «  », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Une partie des points peut être accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
 4. Sauf indication contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de valeurs exactes, telles que 4π , $2 + \sqrt{7}$, etc.

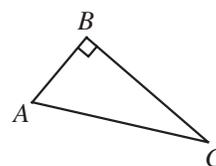
1.  a) Une parabole coupe l'axe des ordonnées au point $(0, 8)$, coupe l'axe des abscisses aux points $(2, 0)$ et $(4, 0)$ et passe au point $(a, 8)$. Quelle est la valeur de a ?



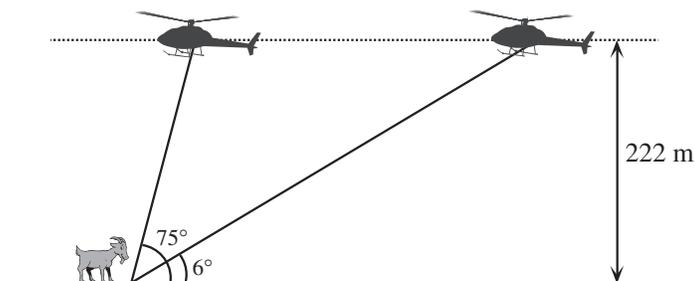
-  b) L'équation du second degré $x^2 + 6x + k = 0$ admet deux racines égales. Quelle est la valeur de k ?
-  c) La droite d'équation $y = 2x + 2$ coupe la parabole définie par $y = x^2 - 3x + c$ en deux points. Un de ces points a pour coordonnées $(1, 4)$. Déterminer les coordonnées du deuxième point d'intersection.

2.  a) Si $0^\circ < x < 90^\circ$ et $3\sin(x) - \cos(15^\circ) = 0$, quelle est la valeur de x au dixième de degré près?

-  b) Le triangle ABC est rectangle en B et $AC = 20$. Si $\sin C = \frac{3}{5}$, quelle est la longueur du côté BC ?



-  c) Un hélicoptère vole en direction ouest à une vitesse constante et à une altitude constante de 222 m au-dessus d'un terrain plat. Une chèvre immobile, de fier tempérament, est placée à l'ouest de l'hélicoptère. Elle prend deux mesures de l'angle entre le sol et l'hélicoptère. La première mesure est de 6° . La deuxième mesure, prise une minute plus tard, est de 75° . Déterminer la vitesse de l'hélicoptère si celui-ci n'a pas encore passé la chèvre, comme dans le diagramme. Exprimer la réponse au kilomètre à l'heure près.



3.  a) La fonction f est telle que $f(2x+3) = 2f(x) + 3$ pour toutes les valeurs de x .
Si $f(0) = 6$, quelle est la valeur de $f(9)$?

-  b) Supposons que les fonctions f et g vérifient le système d'équations suivant pour toutes les valeurs de x :

$$f(x) + 3g(x) = x^2 + x + 6$$

$$2f(x) + 4g(x) = 2x^2 + 4$$

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = g(x)$.

4.  a) Dans l'épreuve finale de patinage de vitesse sur piste courte, il y a cinq finalistes, dont deux Canadiennes. Les trois premières recevront une médaille. Si les cinq finalistes ont la même chance de terminer dans n'importe quelle position, quelle est la probabilité pour qu'aucune des Canadiennes ne remporte une médaille?

-  b) Déterminer le nombre d'entiers, de 1 à 300, qui sont des multiples de 3 ou de 5, mais qui ne sont pas des multiples de 10 ou de 15.

5.  a) Dans la série $1 + 3 + 5 - 7 - 9 - 11 + 13 + 15 + 17 - 19 - 21 - 23 \dots$, formée d'entiers impairs, le signe change à tous les trois termes. Quelle est la somme des 300 premiers termes de la série?

-  b) Un nombre de deux chiffres est tel que le carré du chiffre des dizaines plus dix fois le chiffre des unités est égal au carré du chiffre des unités plus dix fois le chiffre des dizaines. Déterminer tous les nombres premiers de deux chiffres qui vérifient cette propriété.

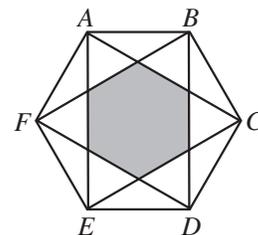
6.  a) Une boîte de plomb contient deux isotopes radioactifs de fer. L'isotope A se désintègre de manière qu'à toutes les 6 minutes, le nombre d'atomes qui restent est diminué de moitié. Au début, il y a deux fois plus d'atomes d'isotope A que d'atomes d'isotope B. Après 24 minutes, il y a autant d'atomes de chaque isotope. Combien de temps les atomes de l'isotope B mettent-ils pour diminuer de moitié?

-  b) Résoudre le système d'équations :

$$\log_{10}(x^3) + \log_{10}(y^2) = 11$$

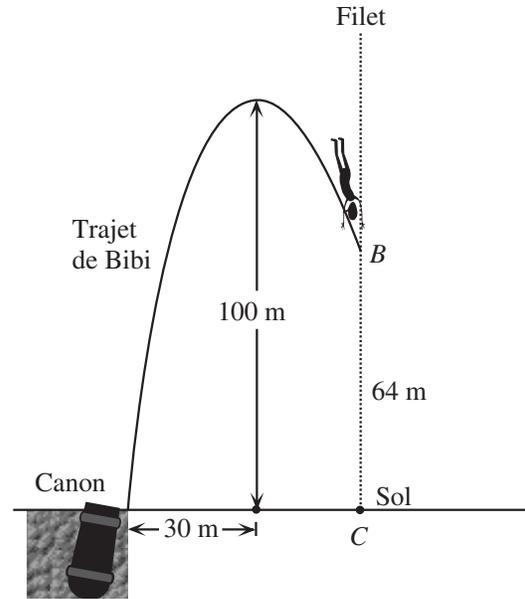
$$\log_{10}(x^2) - \log_{10}(y^3) = 3$$

7.  a) Un hexagone régulier est un polygone de six côtés dont tous les côtés sont congrus et tous les angles sont congrus. L'hexagone $ABCDEF$ est régulier et son aire est égale à 36. La région ombrée, qui est commune aux triangles équilatéraux ACE et BDF , est un hexagone. Quelle est l'aire de cet hexagone ombré?

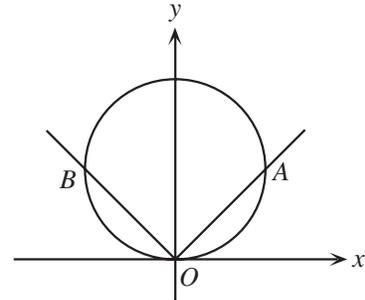




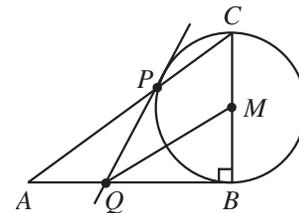
- b) Dans un numéro du Cirque de la Lune, Bibi est projetée d'un canon à partir du sol. (Pour des raisons de sécurité, le canon est partiellement enseveli sous le sol.) Le trajet de Bibi est une parabole. Pendant sa descente, elle s'accroche à un filet vertical, au point B . Ce point est situé à 64 m directement au-dessus d'un point C au sol. Bibi atteint une hauteur maximale de 100 m à un endroit directement au-dessus d'un point situé au sol à 30 m du canon. Déterminer la distance horizontale du canon jusqu'au filet.



- a) Un cercle de centre sur l'axe des ordonnées coupe la représentation graphique de $y = |x|$ à l'origine O et à deux autres points distincts, A et B , comme dans le diagramme. Démontrer que le rapport de l'aire du triangle ABO à l'aire du cercle est toujours égal à $1 : \pi$.



- b) Le triangle ABC est rectangle en B . M est le milieu du côté BC . On a tracé un cercle de diamètre BC . Soit P le point d'intersection du cercle et du côté AC . La tangente au cercle, au point P , coupe AB en Q . Démontrer que QM est parallèle à AC .



- Soit un quadrilatère inscriptible $ABCD$, tel que $AB = AD = 1$, $CD = \cos \angle ABC$ et $\cos \angle BAD = -\frac{1}{3}$. Démontrer que BC est le diamètre du cercle circonscrit au quadrilatère.

10.  On dit qu'un entier strictement positif n est « sauvage » si les entiers de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ peuvent être partagés en trois ensembles, A , B et C , de manière que :
- i) la somme des éléments est la même pour A , B , et C ;
 - ii) l'ensemble A ne contient que des nombres impairs;
 - iii) l'ensemble B ne contient que des nombres pairs;
 - iv) l'ensemble C contient tous les multiples de 3 (et possiblement d'autres nombres).
- a) Démontrer que 8 est un entier sauvage.
 - b) Démontrer que si n est un entier sauvage, alors $\frac{n+4}{12}$ est un entier.
 - c) Déterminer tous les entiers sauvages pairs inférieurs à 100.

PUBLICATIONS

Les étudiants et les parents qui estiment que la résolution de problèmes constitue un divertissement et un loisir se réjouiront de pouvoir consulter les publications suivantes. Il s'agit d'excellentes ressources documentaires axées sur l'enrichissement, le développement des capacités à résoudre des problèmes et la préparation en vue des concours de mathématiques.

Exemplaires des Concours canadiens de mathématiques des années antérieures

Des exemplaires des concours antérieurs et des solutions, aussi bien en français qu'en anglais, sont disponibles gratuitement sur notre site web <http://www.cemc.uwaterloo.ca>

Livres «Problems Problems Problems»

Chaque volume est une ensemble de problèmes à choix multiple ou à solution complète. Les problèmes sont regroupés selon les sujets, avec 9 sujets ou plus par volume. Les problèmes sont choisis à partir des concours des années précédentes offerts par le Concours canadien de mathématiques et des solutions complètes sont fournies pour chaque problème. Chaque volume coûte 15,00 \$. **Le Volume 1 est disponible en français et en anglais. Les Volumes 2-8 sont disponibles en anglais seulement.**

Volume 1

- (Disponible en français)
- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets
- pour les élèves de 9^e, 10^e et 11^e année (Sec. III, IV et V)

Volume 2

- plus de 325 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets (différents de ceux du volume 1)
- pour les élèves de 9^e, 10^e et 11^e année (Sec. III, IV et V)

Volume 3

- plus de 235 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)

Volume 4

- plus de 325 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves de 7^e, 8^e et 9^e année (Sec. I, II et III)

Volume 5

- plus de 200 problèmes avec solutions complètes
- 9 sujets (différents de ceux du volume 3)
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)

Volume 6

- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 11 sujets (différents de ceux du vol. 4)
- pour les élèves de 7^e, 8^e et 9^e année (Sec. I, II et III)

Volume 7

- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves de 9^e et 10^e année (Sec. III et IV)



Volume 8

- plus de 200 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)



Les Problèmes et Leurs Solutions - Volume 1

Cette brochure fait suite à la collection de problèmes d'enrichissement offerte aux étudiants de 9^e, 10^e et 11^e années. Chacun des huit chapitres comprend un examen des solutions et des démarches suggérées. Ils comptent plus de 225 nouveaux problèmes, presque tous tirés des concours canadiens de mathématiques, accompagnés de solutions complètes. Le prix est de 20 \$. **(Disponible en anglais seulement.)**

Faire passer les commandes au : Concours canadien de mathématiques
Faculté de mathématiques, pièce MC 5181
Université de Waterloo
Waterloo (Ontario) N2L 3G1

Veuillez inscrire votre nom, votre adresse (et votre code postal) ainsi que votre numéro de téléphone.

Établir les chèques ou les mandats à l'ordre du «Centre for Education in Mathematics and Computing». Pour les commandes effectuées au Canada, veuillez ajouter 3 \$ pour le premier article afin d'acquitter les frais de port et de manutention et 1 \$ pour chaque article additionnel. Aucune taxe de vente provinciale ne s'applique, mais il faut ajouter la TPS de 7 p. 100. Pour les commandes *de l'extérieur du Canada SEULEMENT*, veuillez ajouter 10 \$ pour le premier article afin d'acquitter les frais de port et de manutention et 2 \$ pour chaque article additionnel. **Les prix de ces publications demeureront en vigueur jusqu'en 1 septembre 2003.**

REMARQUE : Tous droits réservés. Les publications sont protégées par Copyright. Il est interdit de copier le matériel sans la permission de la Fondation Waterloo de mathématiques.

