Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre en mathématiques et en
Université de Waterloo, Waterloo,

2003 Solutions
Concours Cayley (10^e – année)

(Secondaire IV au Québec)

pour les prix du

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

1. On calcule : $\dfrac{3-(-3)}{2-1}$ est égal à $\dfrac{6}{1}$, ou 6 RÉPONSE : (D)

2. $17^2 - 15^2$ est égal à $289 - 225$, ou 64. Donc $17^2 - 15^2 = 8^2$. RÉPONSE : (A)

3. Puisque $42 = 6 \times 7$, le seul choix correct est que 42 est divisible par 7. On peut vérifier que les autres choix sont faux. RÉPONSE : (D)

4. Puisque 25 % du nombre est 5 fois 5 % du nombre, alors 25 % du nombre est égal à 5×8, ou 40. RÉPONSE : (A)

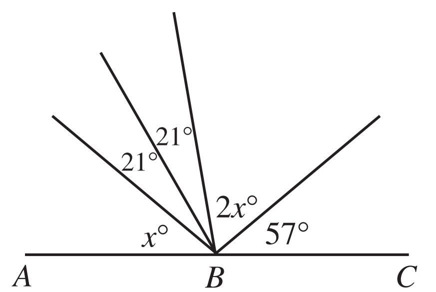
5. On peut évaluer l'expression à l'aide d'une calculatrice et arrondir la réponse. On peut aussi calculer au long :

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\times\frac{4}{9}+\frac{7}{2} &= \frac{2}{3}+\frac{7}{2}\\ &= \frac{4}{6}+\frac{21}{6}\\ &= \frac{25}{6}\\ &= 4+\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Arrondie à l'unité près, la valeur de l'expression est égale à 4. RÉPONSE : (B)

6. Puisque ABC est une droite, la somme des mesures des cinq angles est égale à 180°. Donc :

$$\begin{aligned}x^\circ + 21^\circ + 21^\circ + 2x^\circ + 57^\circ &= 180^\circ\\ 3x + 99 &= 180\\ 3x &= 81\\ x &= 27\end{aligned}$$



RÉPONSE : (A)

7. *Solution 1*

Le quart de cercle supérieur droit ne contient aucune inconnue. On peut donc calculer la somme des trois nombres. On a $13+17+45=75$. Donc la somme des nombres dans chaque quart de cercle est égale à 75. On a donc :

$$\begin{aligned}(z+28+8)+(x+19+50)+(y+3+63) &= 3(75)\\ x+y+z+36+69+66 &= 225\\ x+y+z &= 54\end{aligned}$$

Solution 2

Le quart de cercle supérieur droit ne contient aucune inconnue. On peut donc calculer la somme des trois nombres. On a $13+17+45=75$.
Dans le quart de cercle supérieur gauche, on a donc $z+28+8=75$, d'où $z=39$.
De même, $x=6$ et $y=9$.
Donc $x+y+z=54$. RÉPONSE : (C)

8. Puisque le triangle équilatéral a des côtés de longueur 20, il a un périmètre de 60.
Or un carré qui a un périmètre de 60 a des côtés de longueur 15.
Un carré qui a des côtés de longueur 15 a une aire de 225. RÉPONSE : (C)

9. *Solution 1*

Puisque $\dfrac{1}{x+\frac{1}{5}}=\dfrac{5}{3}$, alors $\dfrac{x+\frac{1}{5}}{1}=\dfrac{3}{5}$, ou $x+\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{5}$, d'où $x=\dfrac{2}{5}$.

Solution 2
On utilise le produit en croix :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+\frac{1}{5}}&=\frac{5}{3}\\ 5\left(x+\frac{1}{5}\right)&=3\\ x+\frac{1}{5}&=\frac{3}{5}\\ x&=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

RÉPONSE : (A)

10. *Solution 1*
Lorsque $\frac{5}{8}$ des participants seront des filles, $\frac{3}{8}$ des participants seront des garçons.
Puisqu'il y a 6 garçons et que ce nombre ne change pas, il doit y avoir 16 participants en tout de manière que $\frac{6}{16}$, ou $\frac{3}{8}$ des participants soient des garçons. Puisqu'il y avait 8 participants au départ, il faut ajouter 8 filles.

Solution 2
Soit f le nombre de filles qu'il faut ajouter. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{2+f}{8+f}&=\frac{5}{8}\\ 16+8f&=40+5f\\ 3f&=24\\ f&=8\end{aligned}$$

RÉPONSE : (D)

11. Puisque N est la somme de puissances de 10, on voit que N est égal à $1\,111\,111\,000$.
La somme de ses chiffres est égale à 7. RÉPONSE : (E)

12. *Solution 1*
Pour se rendre du point B au point C, on doit aller 12 unités vers la gauche et monter de 4 unités. Sur la droite qui contient ces points, on monte toujours de 1 à chaque fois que l'on fait 3 unités vers la gauche.

Pour se rendre du point B au point A, il faut monter de 1 unité. Puisque le point A est sur la même droite que les points B et C, il faut donc que l'on fasse 3 unités vers la gauche à partir de 9. Donc $a = 9 - 3$, d'où $a = 6$.

Solution 2

Puisque les points sont alignés, alors :

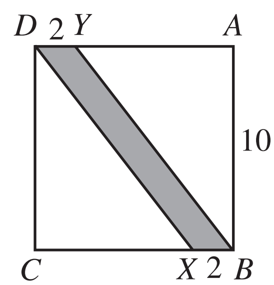
$$\begin{aligned} \text{Pente de } BA &= \text{Pente de } CB \\ \frac{1-0}{a-9} &= \frac{0-4}{9-(-3)} \\ \frac{1}{a-9} &= \frac{-4}{12} \\ 12 &= -4a + 36 \\ 4a &= 24 \\ a &= 6 \end{aligned}$$

RÉPONSE : (D)

13. *Solution 1*

Puisque $AY = CX = 8$, alors $DY = BX = 2$ et $DYBX$ est donc un parallélogramme.

Si on fait tourner le diagramme sur 90°, dans le sens des aiguilles d'une montre, on voit que $DYBX$ est un parallélogramme ayant une base de 2 et une hauteur de 10. Il a donc une aire de 2×10, ou 20.



Solution 2

L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du carré, moins l'aire des triangles ABY et DCX. Or chacun de ces rectangles est rectangle avec une base de 10 unités et une hauteur de 8 unités. On a donc :

$$\begin{aligned} \text{Aire de la région ombrée} &= \text{Aire du carré} - \text{Aire des triangles} \\ &= (10)^2 - 2\left[\tfrac{1}{2}(8)(10)\right] \\ &= 100 - 2[40] \\ &= 20 \end{aligned}$$

RÉPONSE : (B)

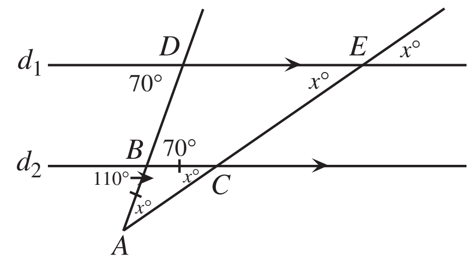
14. Carla parcourt $3 \times 0{,}5$, ou 1,5 m en 3 pas. Puisque Jacob parcourt la même distance en 4 pas, il parcourt 6 fois cette distance en 24 pas. Il parcourt donc $6 \times 1{,}5$, ou 9 m en 24 pas.

RÉPONSE : (B)

15. Soit D et E les points indiqués sur le diagramme.

À cause des angles opposés par le sommet, $\angle DEC = x^\circ$.

Puisque les droites d_1 et d_2 sont parallèles et que AD et AE sont des sécantes, alors $\angle DBC = 70^\circ$ et $\angle BCA = x^\circ$.



Puisque les angles ABC et DBC sont supplémentaires et que $\angle DBC = 70^\circ$, alors $\angle ABC = 110^\circ$.
Puisque le triangle ABC est isocèle, $\angle BAC = \angle BCA = x^\circ$. D'après la somme des mesures des angles du triangle ABC :

$$\begin{aligned} x^\circ + 110^\circ + x^\circ &= 180^\circ \\ 2x &= 70 \\ x &= 35 \end{aligned}$$

RÉPONSE : (A)

16. On utilise 2 et 3 pour bases et on fait appel aux lois des exposants :

$$\frac{\left(4^{2003}\right)\left(3^{2002}\right)}{\left(6^{2002}\right)\left(2^{2003}\right)} = \frac{\left(\left(2^2\right)^{2003}\right)\left(3^{2002}\right)}{\left((2\cdot 3)^{2002}\right)\left(2^{2003}\right)} = \frac{\left(2^{4006}\right)\left(3^{2002}\right)}{\left(2^{2002}\right)\left(3^{2002}\right)\left(2^{2003}\right)} = \frac{\left(2^{4006}\right)\left(3^{2002}\right)}{\left(2^{4005}\right)\left(3^{2002}\right)} = 2^{4006-4005} = 2$$

RÉPONSE : (B)

17. Puisque le grand cercle a un rayon de 4, son aire est égale à $\pi \times 4^2$, ou 16π.
Le petit cercle ombré a un rayon de 1. Son aire est égale à $\pi \times 1^2$, ou π.
L'aire de l'anneau ombré est égale à l'aire d'un cercle de rayon 3, moins l'aire d'un cercle de rayon 2. Elle est donc égale à $\pi \times 3^2 - \pi \times 2^2$, ou 5π.
L'aire totale des régions ombrées est égale à $\pi + 5\pi$, ou 6π.
Le rapport de l'aire des régions ombrées à l'aire du grand cercle est égal à $6\pi{:}16\pi$, ou $3{:}8$.

RÉPONSE : (E)

18. Puisque 496 est inférieur à 2^m, on peut chercher une puissance de 2 qui est supérieure à 496, sans être trop grande. Or 2^9, qui est égal à 512, est une telle puissance. De plus, on constate que $496 = 512 - 16$, ou $496 = 2^9 - 2^4$. Donc $m + n = 9 + 4$, ou $m + n = 13$.
(On peut aussi utiliser une approche algébrique.)

RÉPONSE : (A)

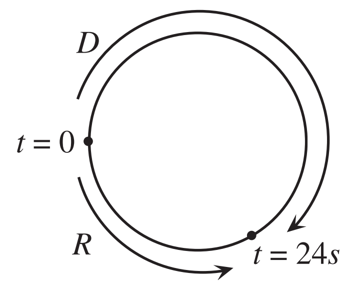
19. Soit a, b, c et d les chiffres du nombre. On a donc le produit $abcd = 810$.
On doit déterminer comment écrire le nombre 810 comme produit de 4 entiers positifs différents, chacun inférieur à 10 et supérieur à 0. On écrit d'abord 810 en factorisation première. On a $810 = 81 \times 10$, d'où $810 = 2 \times 3^4 \times 5$.
Un des chiffres doit donc être un multiple de 5. Or le seul tel chiffre est 5. Un des chiffres du nombre est donc 5.
On doit donc déterminer trois autres chiffres distincts dont le produit est égal à $3^4 \times 2$.
Seuls les chiffres 3, 6 et 9 sont des multiples de 3. Or le produit de ces nombres est égal à $3^4 \times 2$. En effet, $3 \times 6 \times 9 = 3 \times (2 \times 3) \times (3 \times 3)$. Les autres chiffres sont donc 3, 6 et 9.
Les chiffres du nombre sont donc 3, 5, 6 et 9. Leur somme est égale à 23.

RÉPONSE : (C)

20. Le coût pour modifier le réglage du moteur, 400 \$, est équivalent au coût de $\frac{400}{0,80}$, ou 500 L d'essence. Pour recouvrer le coût de la modification, la propriétaire doit donc parcourir une distance qui épargnera 500 L d'essence.
Au départ, la voiture consomme 8,4 L d'essence aux 100 km. Après la modification, elle consomme 6,3 L aux 100 km, soit une épargne de 2,1 L aux 100 km.
Pour épargner 500 L d'essence, il faudrait parcourir $\frac{500}{2,1}\times 100$, ou $23\,809{,}52$ km.

RÉPONSE : (D)

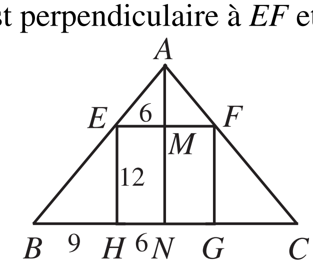
21. Soit $t = 0$ s le temps où Robert et Danielle se croisent la première fois. Ils se croiseront donc de nouveau à $t = 24$ s.
Quelle distance Robert parcourt-il en 24 secondes?
Puisqu'il fait un tour de piste à toutes les 56 secondes, il fait $\frac{24}{56}$, ou $\frac{3}{7}$ d'un tour de piste en 24 secondes.



Puisque Danielle court en sens opposé, elle parcourt $\frac{4}{7}$ d'un tour de piste en 24 secondes.
Elle met donc $\frac{7}{4}\times 24$, ou 42 secondes pour faire un tour de piste.

RÉPONSE : (E)

22. Soit M le milieu de EF et N le milieu de HG. Par symétrie, N est aussi le milieu de BC.
De plus, le segment de droite AM passe au point N et il est perpendiculaire à EF et à BC.
Puisque les côtés du carré mesurent 12 cm, $EM = HN = 6$ cm et $EH = 12$ cm.
Puisque $BC = 30$ cm, alors $BN = 15$ cm et $BH = 9$ cm.
Puisque $EFGH$ est un carré, EF est parallèle à HG. Donc $\angle AEM = \angle EBH$. Les triangles AME et EHB sont donc semblables. Donc $\frac{AM}{6} = \frac{12}{9}$, d'où $AM = 8$ cm.

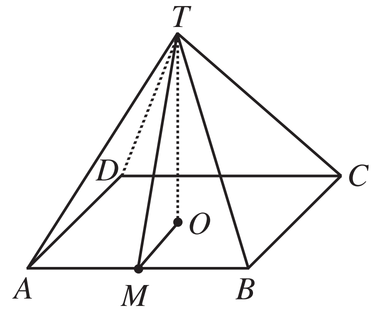


L'aire du triangle AEF est égale à $\frac{1}{2}(12)(8)$, ou 48 cm^2.

RÉPONSE : (D)

23. Soit A, B, C et D les sommets à la base de la pyramide et T l'apex. Soit M le milieu de l'arête AB et O le centre de la base.
Puisque la base de la pyramide est un carré et que les faces latérales ont la même aire, ces faces sont des triangles isocèles congruents et la pyramide est droite.

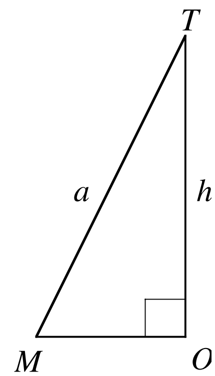
On trace les segments TO, TM et MO.
Puisque la pyramide est droite, TO est perpendiculaire à MO. Le triangle TOM est donc rectangle en O.
Soit h la hauteur de la pyramide, c'est-à-dire que $h = TO$.
Puisque la base de la pyramide a une aire de 1440 cm^2, alors $BC = \sqrt{1440}$ cm, ou $BC = 12\sqrt{10}$ cm. Puisque M est le milieu de AB, que O est le centre de la pyramide et que celle-ci est droite, alors $MO = 6\sqrt{10}$ cm.



Soit a la longueur de l'apothème de la pyramide, c'est-à-dire que $a = TM$. Puisque le triangle ABT est isocèle, TM est la hauteur du triangle.
Puisque l'aire du triangle ABT est égale à 840 cm^2, alors $\frac{1}{2}AB \times TM = 840$ cm^2, d'où $\left(12\sqrt{10}\right)a = 1680$ cm. Donc $a = \dfrac{140}{\sqrt{10}}$ cm, ou $a = 14\sqrt{10}$ cm.
Puisque le triangle TOM est rectangle, alors :

$$\begin{aligned} TO^2 &= TM^2 - MO^2 \\ h^2 &= a^2 - MO^2 \\ &= \left(14\sqrt{10}\right)^2 - \left(6\sqrt{10}\right)^2 \\ &= 1960 - 360 \\ &= 1600 \\ h &= 40 \end{aligned}$$

La pyramide a une hauteur de 40 cm.



RÉPONSE : (B)

24. Lorsqu'on choisit quatre nombres de l'ensemble $\{0, 1, 2, ..., 9\}$, il n'y a qu'une façon de les écrire en ordre croissant. Il suffit donc de choisir quatre nombres dont la somme est un multiple de 3, sans égard à l'ordre des nombres.
Si la somme de quatre nombres est divisible (ou n'est pas divisible) par 3, elle est divisible par 3 (ou ne l'est pas) si on soustrait un multiple de 3 d'un de ces nombres, car la différence de deux multiples de 3 est aussi un multiple de 3.
On utilisera aussi le fait qu'un nombre est soit un multiple de 3, soit un de plus ou un de moins qu'un multiple de 3, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire sous forme $3n$, $3n+1$ ou $3n-1$.
On utilise ces deux propriétés pour transformer l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ de manière à obtenir la collection $\{0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 0\}$, en soustrayant des multiples de 3, p. ex., 6 de 5 pour obtenir –1. (Puisqu'un ensemble ne peut contenir le même élément plus d'une fois, on a utilisé le mot « collection ».)
On veut choisir quatre nombres de la collection $\{0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 0\}$, de manière que la somme soit un multiple de 3, y compris 0. Comment s'y prend-on?
Si on choisit quatre zéros, leur somme est $0+0+0+0$, ou 0, qui est un multiple de 3.
Si on choisit trois zéros, le quatrième nombre doit être un 1 ou un –1 et la somme n'est pas un multiple de 3.

Si on choisit deux zéros, on peut ensuite choisir deux 1, deux –1 ou un 1 et un –1. Seul le dernier choix donne une somme qui est un multiple de 3.
Si on choisit un zéro, il faut choisir trois 1 ou trois –1 pour que la somme soit un multiple de 3. (On peut vérifier qu'aucun autre choix ne donnera un multiple de 3.)
Si on ne choisit aucun zéro, alors il faut choisir deux 1 et deux –1 pour que la somme soit un multiple de 3 (autrement on choisit trois d'une sorte et un de l'autre sorte, ou quatre d'une même sorte, ce qui ne donne pas une somme qui est un multiple de 3).
On compte maintenant le nombre de chois dans chaque cas :

1^er^ cas : 0, 0, 0, 0

Il y a une seule façon de choisir quatre zéros. (Ce choix correspond au choix de 0, 3, 6 et 9, dont la somme est un multiple de 3.)

2^e^ cas : 0, 0, 1, –1

On doit choisir deux zéros parmi quatre, un 1 parmi trois et un –1 parmi trois. Étant donné quatre objets, A, B, C et D, il y a 6 façons de choisir deux des objets (AB, AC, AD, BC, BD, CD). Étant donné trois objets, il y a 3 façons de choisir un des objets. Il y a donc 6 façons de choisir deux zéros. Pour chacune d'elles, il y a 3 façons de choisir un 1. Pour chacun des choix précédents, il y a 3 façons de choisir un –1. En tout, le nombre de choix est égal à $6\times3\times3$, ou 54.

3^e^ cas : 0, 1, 1, 1

Il y a 4 façons de choisir un zéro parmi quatre. Pour chaque choix, il y a 1 façon de choisir trois 1 parmi trois. En tout, le nombre de choix est égal à 4.

4^e^ cas : 0, –1, –1, –1

Comme dans le cas précédent, il y a 4 choix possibles.

5^e^ cas : 1, 1, –1, –1

Il y a 3 façons de choisir deux 1 parmi trois. Pour chaque choix, il y a trois façons de choisir deux –1 parmi trois. En tout, le nombre de choix est égal à 3×3, ou 9.

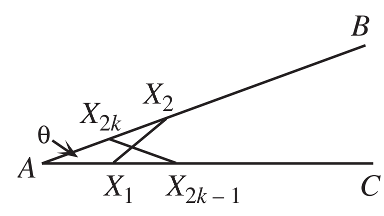
Il y a donc $1+54+4+4+9$, ou 72 façons de choisir quatre nombres dont la somme est un multiple de 3.
RÉPONSE : (E)

25. Soit un angle aigu θ, qui peut être lacé avec $2k$ points. On veut déterminer les valeurs possibles de θ.
On remarque que le diagramme doit être symétrique, puisque

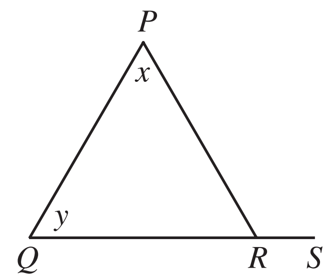
$$AX_1 = X_1X_2 = X_{2k-1}X_{2k} = X_{2k}A.$$

Les triangles AX_1X_2 et $AX_{2k}X_{2k-1}$ ont donc deux paires de côtés congrus deux à deux et ils sont isocèles. Puisqu'ils partagent un même angle à la base, ils sont congruents. Donc $AX_2 = AX_{2k-1}$.

De la même manière, on peut démontrer que deux points correspondants, sur les demi-droites AB et AC, sont équidistants du point A.
On a donc $AX_k = AX_{k+1}$. Le triangle AX_kX_{k+1} est donc isocèle et on a $\angle AX_kX_{k+1} = \angle AX_{k+1}X_k = \frac{1}{2}(180° - \theta)$.



On développera maintenant une autre expression pour la mesure de ces angles. Pour le faire, on fera appel à l'angle extérieur d'un triangle. Dans le triangle ci-contre, $\angle PRQ + x + y = 180°$ et $\angle PRQ + \angle PRS = 180°$, d'où $\angle PRS = x + y$.



Puisque le triangle AX_1X_2 est isocèle, alors $\angle X_1AX_2 = \angle AX_2X_1 = \theta$. On connaît donc la mesure de l'angle extérieur correspondant : $\angle X_2X_1C = 2\theta$.
Puisque le triangle $X_1X_2X_3$ est isocèle, alors $\angle X_2X_1X_3 = \angle X_2X_3X_1 = 2\theta$. On connaît donc la mesure de l'angle extérieur X_3X_2C du triangle AX_2X_3 : $\angle X_3X_2C = 3\theta$.
De la même manière, $\angle X_3X_2X_4 = \angle X_3X_4X_2 = 3\theta$, et ainsi de suite, jusqu'à

$$\angle X_kX_{k-1}X_{k+1} = \angle X_kX_{k+1}X_{k-1} = k\theta.$$

(On peut le vérifier avec le diagramme de l'énoncé du problème.) On peut comparer les deux expressions pour la mesure des angles congrus, $AX_{k+1}X_k$ et $X_{k-1}X_{k+1}X_k$, pour obtenir :

$$\frac{1}{2}\left(180^\circ - \theta\right) = k\theta$$

$$180^\circ = 2k\theta + \theta$$

$$\theta = \frac{180^\circ}{2k+1}$$

Puisque θ doit être un entier, $2k+1$ doit être un diviseur impair (supérieur à 1) de 180.
Les diviseurs de 180 sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90 et 180.
Les diviseurs impairs et supérieurs à 1 sont 3, 5, 9, 15 et 45.

Il y a donc cinq angles aigus θ qui peuvent être lacés : 60°, 36°, 20°, 12° et 4°.

RÉPONSE : (C)