Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2002 Solutions

Concours Pascal (9e - Sec. III)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

1. Selon l'ordre prioritaire des opérations, on a :

$$\frac{15+9-6}{3\times 2} = \frac{18}{6} = 3$$

RÉPONSE : (C)

2. 50 % de 2002, c'est $\frac{1}{2}$ de 2002, ce qui est égal à 1001. RÉPONSE : (E)

3. Puisque $x+2=10$, alors $x=8$. Puisque $y-1=6$, alors $y=7$. Donc $x+y=15$.

RÉPONSE : (B)

4. On a :

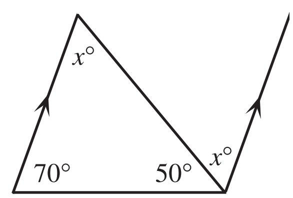
$$\left(3^2-3\right)^2 = (9-3)^2 = 36$$

RÉPONSE : (A)

5. Puisque l'ascenseur a monté 7 étages, qu'il a ensuite descendu 6 étages et remonté 5 étages, le nombre d'étages qu'il a montés est égal à $7-6+5$, ou 6. Puisqu'elle est sortie au 20e étage, elle est entrée dans l'ascenseur au 14e étage. RÉPONSE : (A)

6. À cause des angles alternes-internes, le troisième angle du triangle mesure x°. Puisque la somme des mesures des angles du triangle est égale à 180°, alors :

$$x+70+50=180$$
$$x=60$$



RÉPONSE : (B)

7. Puisque $n=\frac{5}{6}(240)$, alors :

$$\frac{2}{5}n = \frac{2}{5}\left(\frac{5}{6}\right)(240) = \frac{1}{3}(240) = 80$$

RÉPONSE : (B)

8. On a :

$$1-\left(5^{-2}\right) = 1-\frac{1}{5^2} = 1-\frac{1}{25} = \frac{24}{25}$$

RÉPONSE : (A)

9. On peut déterminer la réponse en obtenant, par tâtonnements, les dimensions des divers rectangles. Si on suppose que le petit rectangle, en haut à gauche, a une largeur de 2 et une

hauteur de 3, alors le rectangle à sa droite, qui a lui aussi une hauteur de 3, doit avoir une largeur de 5. On conclut que le rectangle, en bas à droite, a une hauteur de 5, de même que le rectangle ombré. Celui-ci a une largeur de 2, comme le premier rectangle. Le rectangle ombré a donc une largeur de 2 et une hauteur de 5, ce qui donne une aire de 10. On peut aussi résoudre le problème de façon algébrique, mais la stratégie présentée est probablement la plus efficace. RÉPONSE : (E)

10. On remarque qu'il faut toujours ajouter 3 cure-dents à la figure précédente pour obtenir la figure suivante. Pour obtenir la 10e figure, formée de 10 carrés, il faut donc ajouter 9 fois 3 cure-dents aux 4 cure-dents de la première figure. Pour former cette figure, il faut donc $4+9\times 3$, ou 31 cure-dents. RÉPONSE : (C)

11. Puisque $ABCD$ est un carré, alors $AB = BC$. Donc :

$$\begin{aligned} x+16 &= 3x \\ 16 &= 2x \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Chaque côté a donc une longueur de $8+16$, ou 24. Le carré a donc un périmètre de 96.

RÉPONSE : (C)

12. Soit a le premier nombre de la suite. Le deuxième nombre est donc $2a$ et le troisième est $4a$. On a donc $2a+4a=24$, d'où $a=4$. Les quatrième, cinquième et sixième nombres sont respectivement $8a$, $16a$ et $32a$. Le sixième nombre est donc $32(4)$, ou 128.

RÉPONSE : (E)

13. Le côté AC du triangle ABC est parallèle à l'axe des y. Il est donc perpendiculaire à l'axe des x. Il traverse donc l'axe des x au point $(1,0)$. Si on considère que AC est la base du triangle ABC, alors la hauteur du triangle est déterminée par la longueur de l'axe des x à l'intérieur du triangle. Le triangle a donc une hauteur de 3 et une base de 6. Son aire est égale à $\frac{1}{2}(6)(3)$, ou 9. RÉPONSE : (E)

14. On peut supposer que chacun des 25 élèves qui ont une moyenne de 75 % a une note de 75 sur 100, pour un total de 25×75, ou 1875. On peut aussi supposer que chacun des 5 autres élèves qui ont une moyenne de 40 % a une note de 40 sur 100, pour un total de 5×40, ou 200. La moyenne de la classe est donc égale à :

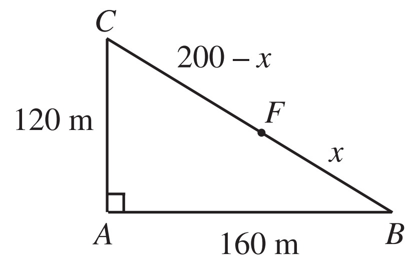
$$\begin{aligned} \frac{\text{Total des notes}}{\text{Nombre d'élèves}} &= \frac{1875+200}{30} \\ &= \frac{2075}{30} \\ &= 69{,}2 \end{aligned}$$

Le choix de réponse le plus près est 69 %. RÉPONSE : (B)

15. D'après la relation de Pythagore :

$$BC^2 = 120^2 + 160^2$$
$$BC^2 = 40\,000$$
$$BC = 200$$

Soit $FB = x$. Donc $FC = 200 - x$.



La distance parcourue par Jean est égale à $AB + BF$, ou $160 + x$. La distance parcourue par Julie est égale à $AC + CF$, ou $120 + 200 - x$. Puisque chacun parcourt la même distance, alors :

$$160 + x = 120 + 200 - x$$
$$2x = 160$$
$$x = 80$$

La distance de F à B est égale à 80 m. RÉPONSE : (D)

16. Puisque 5^3 et 7^{52} sont des entiers impairs, leur produit est un entier impair. Puisque 5^3 est un multiple de 5, $\left(5^3\right)\left(7^{52}\right)$ est un multiple impair de 5. Or tous les multiples impairs de 5 ont 5 comme chiffre des unités. Le chiffre des unités du nombre $\left(5^3\right)\left(7^{52}\right)$ est donc 5.

RÉPONSE : (A)

17. On sait que $1000 = 10 \times 10 \times 10 = 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$. Pour exprimer le nombre 1000 sous la forme du produit de deux entiers positifs de manière que ni l'un, ni l'autre de ces entiers ne contienne le chiffre zéro, il faut séparer les facteurs 2 des facteurs 5. On a donc $1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 8 \times 125$ et $8 + 125 = 133$. RÉPONSE : (C)

18. Puisque Akira et Louis, ensemble, pèsent 101 kg et que Akira et Rabia, ensemble, pèsent 91 kg, Louis pèse 10 kg de plus que Rabia. Si Rabia pèse x kg, alors Louis pèse $(10 + x)$ kg. D'après le troisième renseignement donné, on a :

$$x + x + 10 = 88$$
$$2x = 78$$
$$x = 39$$

Ensemble, Akira et Rabia pèsent 91 kg. Puisque Rabia pèse 39 kg, alors Akira pèse 52 kg.

RÉPONSE : (D)

19. On divise 2002 par 7 pour obtenir 286, d'où $2002 = 7 \times 286$. Puisqu'il y a 7 entiers par rangée et que le dernier nombre de chaque rangée est le multiple de 7 qui correspond au numéro de la rangée, alors le nombre 2002 doit être situé dans la 7e colonne et dans la 286e rangée. Donc $m = 7$ et $n = 286$, d'où $m + n = 293$. RÉPONSE : (D)

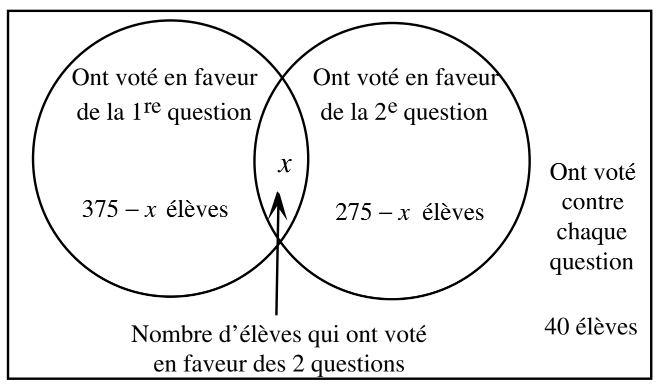
20. L'expression $\sqrt{25-x^2}$ est définie si $25-x^2 \geq 0$, c'est-à-dire si $-5 \leq x \leq 5$. À l'aide d'un tableau, on vérifie les valeurs de x pour lesquelles $\sqrt{25-x^2}$ est un entier, c'est-à-dire pour lesquelles $25-x^2$ est un carré parfait.

x	$25-x^2$	Carré parfait?
0	25	Oui
±1	24	Non
±2	21	Non
±3	16	Oui
±4	9	Oui
±5	0	Oui

Il y a donc 7 valeurs entières de x (les nombres 0, 3, –3, 4, –4, 5 et –5) pour lesquelles $\sqrt{25-x^2}$ est égal à un entier. RÉPONSE : (A)

21. Le premier prisme à base rectangulaire a pour dimensions 4 cm, 5 cm et 6 cm. Il est donc composé de $4 \times 5 \times 6$, ou 120 petits cubes. Le plus grand cube que l'on puisse former en enlevant des petits cubes mesure 4 cm sur 4 cm sur 4 cm. Il est formé de 64 petits cubes. Il faut donc enlever 56 des 120 petits cubes pour le former. RÉPONSE : (E)

22. Soit x le nombre d'élèves qui ont voté en faveur de chaque question. On peut représenter les résultats du vote au moyen d'un diagramme de Venn. Puisque 500 élèves ont voté, on a :

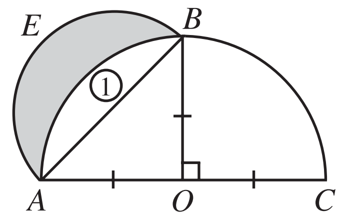


$$375 - x + x + 275 - x + 40 = 500$$
$$690 - x = 500$$
$$x = 190$$

Donc 190 élèves ont voté en faveur de chaque question. RÉPONSE : (C)

23. On cherche le nombre de couples (a, b) d'entiers qui vérifient l'équation $a^b = 64$, ou $a^b = 2^6$. Si a et b sont positifs, alors les seules possibilités sont $64 = 64^1 = 8^2 = 4^3 = 2^6$, puisque a doit être une puissance de 2. Si a est négatif, b doit être un nombre positif pair. On a alors les possibilités suivantes : $64 = (-8)^2 = (-2)^6$. On sait que b ne peut être négatif, car a^b est un entier. Il y a donc 6 couples (a,b) qui vérifient l'équation. RÉPONSE : (D)

24. L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du demi-cercle AEB moins celle de la région 1. Or l'aire de la région 1 est égale à l'aire du quart de cercle ABO moins celle du triangle ABO. On calcule donc l'aire de ces régions.



Puisque $AO = BO = 1$, alors l'aire du triangle ABO est égale à $\frac{1}{2}(1)(1)$, ou $\frac{1}{2}$.
Puisque $AO = BO = 1$, le quart de cercle ABO a un rayon de 1 et une aire de $\frac{1}{4}\pi(1)^2$, ou $\frac{\pi}{4}$.
Puisque $AO = BO = 1$, alors $AB = \sqrt{2}$, selon la relation de Pythagore, et le rayon du demi-cercle AEB est donc égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$. L'aire du demi-cercle AEB est donc égale à $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$, ou $\frac{\pi}{4}$.

L'aire de la région ombrée est égale à :

(Aire du demi-cercle AEB) – (Aire de la région 1)

$$= (\text{Aire du demi-cercle } AEB) - [(\text{Aire du quart de cercle } AOB) - (\text{Aire du triangle } AOB)]$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}$$

RÉPONSE : (B)

25. On calcule d'abord le volume de chaque contenant de forme cylindrique :

$$V_{\text{grand}} = \pi(6)^2(20) = 720\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{petit}} = \pi(5)^2(18) = 450\pi \text{ cm}^3$$

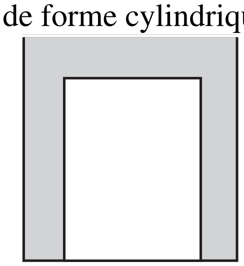


Figure 3

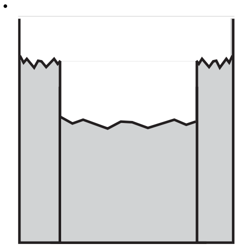


Figure 4

Le volume initial d'eau dans le grand cylindre est égal à :

$$V_{\text{initial d'eau}} = \pi(6)^2(17) = 612\pi \text{ cm}^3$$

Si le petit contenant était fermé à l'aide d'un couvercle et qu'on le baissait jusqu'au fond du grand contenant, comme dans la Figure 3, il serait complètement recouvert d'eau et une partie de l'eau aurait été versée à l'extérieur du grand contenant. De plus, le niveau de l'eau irait jusqu'au haut du grand contenant, puisque le volume initial d'eau et le volume du petit contenant dépassent le volume du grand contenant.

Si on enlevait le couvercle, toute l'eau qui est au-dessus du petit contenant s'écoulerait dans le petit contenant. Cette eau est au départ dans une région de forme cylindrique de rayon 6 cm et de hauteur 2 cm. Son volume est égal à $\pi(6)^2(2)$, ou 72π cm^3. Il s'agit donc du volume d'eau dans le petit contenant à la toute fin, lorsque celui-ci repose au fond du grand. On a donc $72\pi = \pi(5)^2 h$, où h représente la profondeur d'eau dans le petit contenant. Donc $h = \frac{72\pi}{25\pi}$, ou $h = 2{,}88$ cm. RÉPONSE : (D)