Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2002 Solutions

Concours Gauss

(7e et 8e années – Sec. I et II)

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche
Comptables agréés

Avec la participation de :

Institut canadien des actuaires

Sybase inc (Waterloo)

Avec l'appui de :

London Life, compagnie d'assurance-vie et La Great-West, compagnie d'assurance-vie

Financière Manuvie

L'Équitable, Compagnie d'Assurance-Vie du Canada

Organisation du concours — Solutions Gauss 2002

Comité exécutif	Barry Ferguson (Directeur), Peter Crippin, Ruth Malinowski, Ian VanderBurgh
Le directeur d'operation	Barry Ferguson, University of Waterloo
Ordinatique	Steve Breen, University of Waterloo Don Cowan, University of Waterloo
Compilateurs du rapport du Concours Gauss	Lloyd Auckland, University of Waterloo Barry Ferguson, University of Waterloo
Documentation	Bonnie Findlay, University of Waterloo
Publications	Bonnie Findlay, University of Waterloo
Version française	André Ladouceur, Collège catholique Samuel-Genest, Ottawa Robert Laliberté, École secondaire publique Louis-Riel Gérard Proulx, Collège catholique Franco-Ouest, Ottawa Rodrigue St-Jean, École secondaire Embrun, Embrun
Adjoints à la technique	Joanne Kursikowski, Linda Schmidt, Kim Schanrr
Comité de validation	Ed Anderson, University of Waterloo, Waterloo John Barsby, St. John's-Ravenscourt School, Winnipeg Jean Collins, (retraité), Thornhill Ron Scoins, University of Waterloo, Waterloo

Comité Gauss — Solutions Gauss 2002

Bob McRoberts (Chair)
Dr. G.W. Williams S.S.
Aurora, Ontario

Richard Auckland
Southwood Public School
St. Thomas, Ontario

Mark Bredin (Assoc. Chair)
St. John's-Ravenscourt School
Winnipeg, Manitoba

Sandy Emms Jones
Forest Heights C.I.
Kitchener, Ontario

Joanne Halpern
Toronto, Ontario

David Matthews
University of Waterloo
Waterloo, Ontario

John Grant McLoughlin
Memorial University of Newfoundland
St. John's, Newfoundland

Patricia Tinholt
Valley Park Middle School
Don Mills, Ontario

Sue Trew
Holy Name of Mary S.S.
Mississauga, Ontario

Partie A

1. Si on place les nombres 8, 3, 5, 0 et 1 en ordre, du plus petit au plus grand, le nombre au milieu est :
(**A**) 5 (**B**) 8 (**C**) 3 (**D**) 0 (**E**) 1

Solution
Si on place les nombres en ordre, du plus petit au plus grand, on obtient 0, 1, 3, 5, 8. Le nombre au milieu est 3. RÉPONSE : (C)

2. La valeur de $0{,}9 + 0{,}99$ est :
(**A**) 0,999 (**B**) 1,89 (**C**) 1,08 (**D**) 1,98 (**E**) 0,89

Solution
On additionne :

$$\begin{array}{r} 0{,}9 \\ +\ 0{,}99 \\ \hline 1{,}89 \end{array}$$

RÉPONSE : (B)

3. $\dfrac{2+1}{7+6}$ est égal à :
(**A**) $\frac{3}{13}$ (**B**) $\frac{21}{76}$ (**C**) $\frac{1}{21}$ (**D**) $\frac{2}{13}$ (**E**) $\frac{1}{14}$

Solution
On a $\dfrac{2+1}{7+6} = \dfrac{3}{13}$. RÉPONSE : (A)

4. 20 % de 20 est égal à :
(**A**) 400 (**B**) 100 (**C**) 5 (**D**) 2 (**E**) 4

Solution
20 % de 20 est égal à 0,2¥20, ou 4.
D’une autre façon, on sait que 20 % de 20 est égal à $\frac{1}{5}$ de 20, ou 4. RÉPONSE : (E)

5. Trina gagne 5 $ l’heure à garder des enfants. Cette semaine, elle a gardé pendant 7 heures. Si elle avait 20 $ en banque au début de la semaine et si elle dépose tout ce qu’elle a gagné dans son compte sans retirer d’argent, quelle somme aura-t-elle en banque?
(**A**) 35 $ (**B**) 20 $ (**C**) 45 $ (**D**) 55 $ (**E**) 65 $

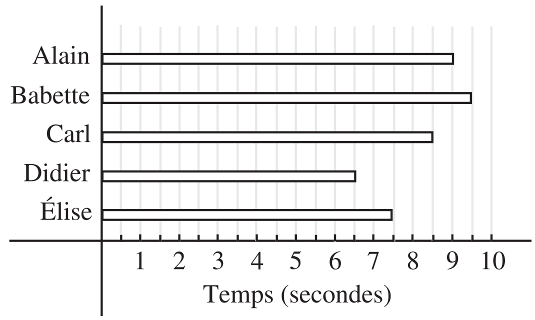
Solution

Puisque Trina gagne 5 $ l’heure pendant 7 heures, elle gagne 7 ¥ 5 $, ou 35 $ en tout. Comme elle avait déjà 20 $ en banque et qu’elle y ajoute 35 $, elle aura 20 $ + 35 $, ou 55 $ en banque.

RÉPONSE : (D)

6. Cinq rats ont participé à une course de 25 mètres. Le diagramme indique le temps que chaque rat a mis pour compléter la course. Quel rat a gagné la course?

(**A**) Alain (**B**) Babette (**C**) Carl (**D**) Didier (**E**) Élise



Solution

Le rat qui a mis le moins de temps à compléter la course a gagné. Il s’agit donc de Didier.

RÉPONSE : (D)

7. La moyenne des nombres 12, 14, 16 et 18 est égale à :

(**A**) 30 (**B**) 60 (**C**) 17 (**D**) 13 (**E**) 15

Solution

La moyenne des nombres est égale à $\frac{12+14+16+18}{4}$, c’est-à-dire à $\frac{60}{4}$, ou 15.

RÉPONSE : (E)

8. Si $P=1$ et $Q=2$, laquelle des expressions suivantes ne représente **pas** un nombre entier?

(**A**) $P+Q$ (**B**) P ¥ Q (**C**) $\frac{P}{Q}$ (**D**) $\frac{Q}{P}$ (**E**) P^Q

Solution

On évalue les diverses expressions :

(A) $P+Q=3$ **(B)** P ¥ $Q=2$ **(C)** $\frac{P}{Q}=\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{Q}{P}=\frac{2}{1}=2$ **(E)** $P^Q=1^2=1$

RÉPONSE : (C)

9. Quatre amis partagent les $\frac{3}{4}$ d’une pizza qu’il reste après une fête. Si chaque ami reçoit la même quantité, quelle fraction d’une pizza complète chacun reçoit-il?

(**A**) $\frac{3}{8}$ (**B**) $\frac{3}{16}$ (**C**) $\frac{1}{12}$ (**D**) $\frac{1}{16}$ (**E**) $\frac{1}{8}$

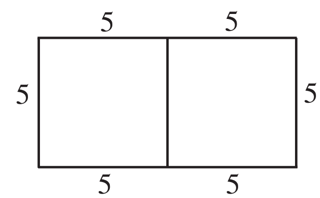
Solution

Si quatre amis partagent $\frac{3}{4}$ d’une pizza, chacun reçoit $\frac{1}{4}$ de $\frac{3}{4}$ de la pizza, c’est-à-dire $\frac{1}{4}$ ¥ $\frac{3}{4}$, ou $\frac{3}{16}$ de la pizza.

RÉPONSE : (B)

10. On place côte à côte deux carrés, ayant chacun une aire de $25\ \text{cm}^2$, de manière à former un rectangle. Quel est le périmètre de ce rectangle?
(**A**) 30 cm (**B**) 25 cm (**C**) 50 cm (**D**) 20 cm (**E**) 15 cm

Solution
On place les deux carrés côte à côte pour obtenir le rectangle ci-contre. Ce rectangle a un périmètre de 30 cm.



RÉPONSE : (A)

Partie B

11. Ginette a couru une distance de 50 mètres, ce qui correspond à 25 % de la course. Quelle est la longueur de la course, en mètres?
(**A**) 100 (**B**) 1250 (**C**) 200 (**D**) 12,5 (**E**) 400

Solution
Puisque 50 mètres correspondent à 25 %, ou $\frac{1}{4}$ de la course, la longueur de la course est égale à 4 ¥ 50, ou 200 mètres. RÉPONSE : (C)

12. Qaddama a 6 ans de plus que Gilles. Gilles a 3 ans de moins que Denis. Si Qaddama est âgée de 19 ans, quel est l'âge de Denis?
(**A**) 17 ans (**B**) 16 ans (**C**) 10 ans (**D**) 18 ans (**E**) 15 ans

Solution
Puisque Qaddama est âgée de 19 ans et qu'elle a 6 ans de plus que Gilles, Gilles a 13 ans. Puisque Gilles a 3 ans de moins que Denis, Denis a 16 ans. RÉPONSE : (B)

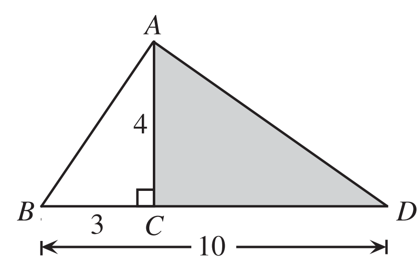
13. Un nombre palindrome est un nombre entier strictement positif qui peut être lu de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple, 2002 est un palindrome. Quel est le plus petit nombre que l'on peut ajouter à 2002 pour obtenir un plus grand palindrome?
(**A**) 11 (**B**) 110 (**C**) 108 (**D**) 18 (**E**) 1001

Solution
On peut résoudre le problème de façon efficace en cherchant le premier palindrome après 2002. Ce palindrome doit avoir la forme $2aa2$ et puisque a doit être supérieur à 0, le palindrome suivant doit être 2112. Le plus petit nombre que l'on peut ajouter à 2002 est donc $2112 - 2002$, ou 110.
RÉPONSE : (B)

14. On attribue aux six premières lettres de l'alphabet les valeurs suivantes : A = 1, B = 2, C = 3, D = 4, E = 5 et F = 6. La valeur d'un mot est égale à la somme des valeurs de ses lettres. Par exemple, la valeur du mot ABBE est $1+2+2+5$, ou 10. Lequel des mots suivants a la plus grande valeur?
(**A**) ABBE (**B**) FACE (**C**) FADE (**D**) DECA (**E**) CAFE

Solution
Les mots ont les valeurs suivantes :
ABBE : $1+2+2+5=10$ FACE : $6+1+3+5=15$ FADE : $6+1+4+5=16$
DECA : $4+5+3+1=13$ CAFE : $3+1+6+5=15$
FADE a la plus grande valeur. RÉPONSE : (C)

15. Dans le diagramme, on a $AC=4$, $BC=3$ et $BD=10$. L'aire du triangle ombré est égale à :
(**A**) 14 (**B**) 20 (**C**) 28
(**D**) 25 (**E**) 12



Solution
Puisque $BD=10$ et $BC=3$, alors $CD=7$. L'aire du triangle ombré est égale à $\frac{1}{2}(7)(4)$, ou 14.
RÉPONSE : (A)

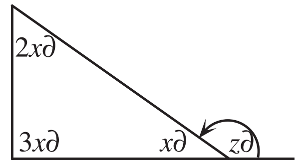
16. Dans les égalités suivantes, les lettres a, b et c représentent des nombres différents.

$$1^3=1$$
$$a^3=1+7$$
$$3^3=1+7+b$$
$$4^3=1+7+c$$

La valeur numérique de $a+b+c$ est :
(**A**) 58 (**B**) 110 (**C**) 75 (**D**) 77 (**E**) 79

Solution
Puisque $a^3=1+7$, alors $a^3=8$, d'où $a=2$.
Puisque $3^3=27$, la troisième égalité devient $27=8+b$, d'où $b=19$.
Puisque $4^3=64$, la quatrième égalité devient $64=8+c$, d'où $c=56$.
Donc $a+b+c=2+19+56$, ou 77. RÉPONSE : (D)

17. Dans le diagramme, la valeur de z est :
(**A**) 150 (**B**) 180 (**C**) 60
(**D**) 90 (**E**) 120



Solution

Puisque la somme des mesures des angles d'un triangle égale 180∂, alors :

$$2x∂ + 3x∂ + x∂ = 180∂$$
$$6x∂ = 180∂$$
$$x = 30$$

Puisque les angles qui mesurent $x∂$ et $z∂$ forment un angle plat et que $x∂ = 30∂$, alors $z∂ = 150∂$.

Réponse : (A)

18. Un nombre parfait est un entier qui est égal à la somme de tous ses diviseurs positifs qui sont plus petits que lui. Par exemple, 28 est un nombre parfait car $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Lequel des nombres suivants est un nombre parfait?
(**A**) 10 (**B**) 13 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 9

Solution

On vérifie chaque choix.

	Nombre	Diviseurs positifs	Somme des diviseurs qui sont plus petits
(A)	10	1, 2, 5, 10	$1 + 2 + 5 = 8$
(B)	13	1, 13	1
(C)	6	1, 2, 3, 6	$1 + 2 + 3 = 6$
(D)	8	1, 2, 4, 8	$1 + 2 + 4 = 7$
(E)	9	1, 3, 9	$1 + 3 = 4$

Le seul nombre parfait est 6. (Les deux nombres parfaits suivants, après 6 et 28, sont 496 et 8128.)

Réponse : (C)

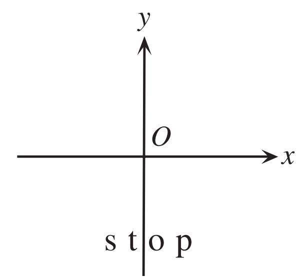
19. Sabine a écrit le numéro de téléphone de Davina dans son cahier de mathématiques. Plus tard, en corrigeant ses devoirs, elle a accidentellement effacé les deux derniers chiffres du numéro de téléphone. Il ne lui restait plus que 893-44_ _. Sabine tente alors de téléphoner à Davina en composant les numéros qui commencent par 893-44. Quel est le plus petit nombre d'appels qu'elle doit faire pour être certaine de rejoindre la maison de Davina?
(**A**) 100 (**B**) 90 (**C**) 10 (**D**) 1000 (**E**) 20

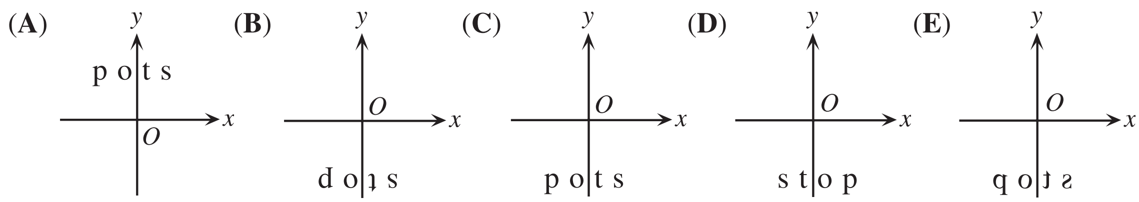
Solution

Le numéro de téléphone de Davina pourrait être n'importe quel numéro de 893-4400 à 893-4499. Il y a 100 tels numéros. Pour être certaine de rejoindre la maison de Davina, le plus petit nombre d'appels que Sabine doit faire est 100. On peut aussi s'y prendre d'une autre façon. Le numéro de Davina est de la forme 8 9 3 - 4 4 $\underline{a}$ $\underline{b}$ et il y a 10 possibilités pour le chiffre a. Pour chacune de ces possibilités, il y a 10 possibilités pour le chiffre b. Le nombre total de possibilités est donc égal à $10 ¥ 10$, ou 100.

Réponse : (A)

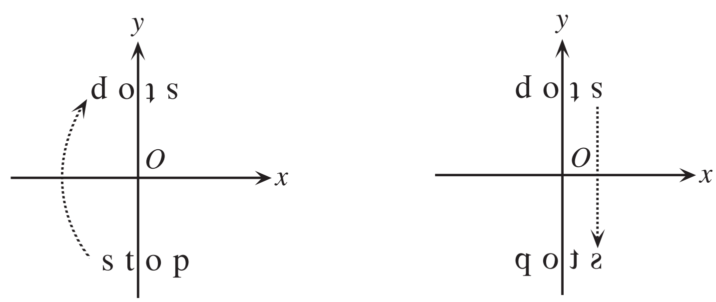
20. On place le mot « stop » dans la position illustrée dans le diagramme ci-contre. On lui fait subir une rotation de centre à l'origine O et de 180∂ dans le sens des aiguilles d'une montre, suivie d'une réflexion par rapport à l'axe des x. Lequel des diagrammes suivants représente l'image finale?





Solution

Le premier diagramme illustre l'image par une rotation de 180°. Le deuxième diagramme illustre l'image de cette image par la réflexion.



Rotation de 180° Réflexion par rapport à l'axe des x

RÉPONSE : (E)

Partie C

21. Cinq personnes participent à une réunion dans une salle. À la fin de la réunion, chaque personne serre la main de chaque autre personne dans la salle, une fois chacune. Combien y a-t-il eu de serrements de mains?

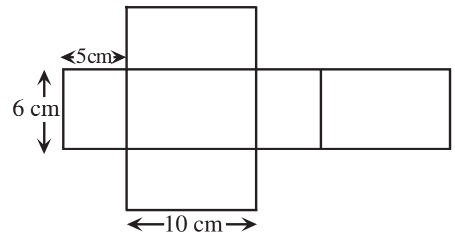
(**A**) 5 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 15 (**E**) 25

Solution

Chacune des cinq personnes serre la main de quatre autres personnes, ce qui fait 20 serrements de mains. Or on a compté chaque serrement de mains deux fois (p. ex., on a compté A qui serre la main de B et B qui serre la main de A). Il faut donc diviser le nombre par 2, ce qui donne 10 serrements de mains en tout. RÉPONSE : (B)

22. On peut plier la figure ci-contre le long des lignes pour former un prisme à base rectangulaire. L'aire totale de la surface du prisme, en centimètres carrés, est égale à :

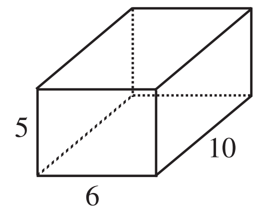
(**A**) 312 (**B**) 300 (**C**) 280
(**D**) 84 (**E**) 600



Solution

L'aire totale de la surface est égale à $2(5 \times 6 + 5 \times 10 + 6 \times 10)$, ou 280 cm^2.

On peut aussi construire le prisme illustré ci-contre. Toutes les faces sont des rectangles. Deux rectangles ont une aire de 30 cm^2, deux rectangles ont une aire de 50 cm^2 et deux rectangles ont une aire de 60 cm^2. L'aire totale est égale à 280 cm^2.



RÉPONSE : (C)

23. Marc tient un sac qui contient 3 billes noires, 6 billes jaunes, 2 billes mauves et 6 billes rouges. Il ajoute ensuite un nombre de billes blanches aux autres billes du sac et il fait savoir à Suzanne que si elle choisit au hasard une bille dans le sac, la probabilité de choisir une bille jaune ou noire est égale à $\frac{3}{7}$. Le nombre de billes blanches que Marc a ajoutées à son sac est égal à :

(**A**) 5 (**B**) 2 (**C**) 6 (**D**) 4 (**E**) 3

Solution

Puisque la probabilité de choisir une bille jaune ou noire est égale à $\frac{3}{7}$, le nombre de billes dans le sac doit être un multiple de 7. Donc il y a peut-être 7, 14, 21, 28, … billes dans le sac. Puisqu'il y a 9 billes qui sont jaunes ou noires et que $\frac{9}{21} = \frac{3}{7}$, il y a 21 billes dans le sac. Puisqu'il y avait 17 billes dans le sac au départ, Marc a ajouté 4 billes blanches à son sac.

On pourrait aussi représenter le nombre de billes blanches que Marc a ajoutées par l'inconnue *b*. On aurait alors l'équation :

$$\frac{\text{Nombre de billes jaunes ou noires}}{\text{Nombre total de billes}} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{9}{17+b} = \frac{3}{7}$$

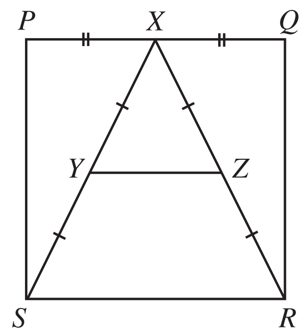
$$\frac{9}{17+b} = \frac{9}{21} \quad \text{(on a choisi le même numérateur 9)}$$

On a donc $17 + b = 21$, d'où $b = 4$.

Le nombre de billes blanches ajoutées est égal à 4. RÉPONSE : (D)

24. *PQRS* est un carré avec des côtés de longueur 8. *X* est le milieu du côté *PQ*, tandis que *Y* et *Z* sont les milieux respectifs de *XS* et de *XR*. L'aire du trapèze *YZRS* est égale à :

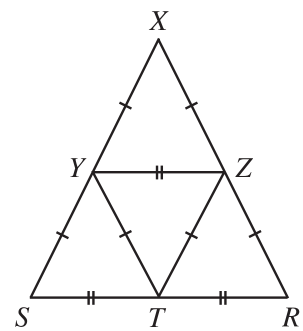
(**A**) 24 (**B**) 16 (**C**) 20
(**D**) 28 (**E**) 32



Solution

Le triangle *XSR* a une aire égale à $\frac{1}{2}(8)(8)$, ou 32. On choisit le milieu *T* du côté *SR* et on trace les segments *TY* et *TZ* pour obtenir le diagramme ci-contre.

Le triangle *XSR* est donc formé de 4 triangles identiques et l'aire de chacun est donc égale à $\frac{1}{4}(32)$, ou 8. Puisque le trapèze *YZRS* est formé de trois de ces triangles, son aire est égale à 3×8, ou 24.



Réponse : (A)

25. Le produit des chiffres de l'entier 226 est égal à 24. Il en est de même pour l'entier 318. Combien y a-t-il d'entiers positifs de trois chiffres dont le produit des chiffres est égal à 24?

(**A**) 4 (**B**) 18 (**C**) 24 (**D**) 12 (**E**) 21

Solution

On détermine les façons de multiplier trois nombres d'un chiffre pour obtenir 24.

i) $24 = 1 \times 4 \times 6$
ii) $24 = 1 \times 3 \times 8$
iii) $24 = 2 \times 3 \times 4$
iv) $24 = 2 \times 2 \times 6$

Dans le cas i), on peut former 6 nombres avec ces chiffres, soit 146, 164, 416, 461, 614 et 641.
Il en est de même dans les cas ii) et iii).
Dans le cas iv), on peut former 3 nombres avec ces chiffres, soit 226, 262 et 622.
En tout, il y a $6 + 6 + 6 + 3$, ou 21 nombres possibles. Réponse : (E)

* * * * *

Partie A

1. La valeur de $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ est :

(**A**) 1 (**B**) $\frac{1}{8}$ (**C**) $\frac{1}{6}$ (**D**) $\frac{2}{6}$ (**E**) $\frac{3}{4}$

Solution

On sait que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. On peut aussi utiliser un dénominateur commun : $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$, ou $\frac{3}{4}$.

Réponse : (E)

2. L'expression $6\times1000+5\times100+6\times1$ est équivalente au nombre :

(**A**) 656 (**B**) 6506 (**C**) 6056 (**D**) 60 506 (**E**) 6560

Solution

$$\begin{aligned}6\times1000+5\times100+6\times1 &= 6000+500+6\\ &= 6506\end{aligned}$$

Réponse : (B)

3. La valeur de $3^2-(4\times2)$ est :

(**A**) 4 (**B**) 17 (**C**) 1 (**D**) –2 (**E**) 0

Solution

On calcule en tenant compte de l'ordre des opérations :

$$\begin{aligned}3^2-(4\times2) &= 9-(4\times2)\\ &= 9-8\\ &= 1\end{aligned}$$

Réponse : (C)

4. On divise un nombre entier par 7 et on obtient un reste de 4. Le nombre entier pourrait être :

(**A**) 14 (**B**) 15 (**C**) 16 (**D**) 17 (**E**) 18

Solution

On remarque, parmi les choix de réponses, que 14 est un multiple de 7. Donc le nombre 18, qui est 4 de plus que 14, donnera un reste de 4 si on le divise par 7.

Réponse : (E)

5. Laquelle des expressions suivantes est égale à un nombre impair?

(**A**) $3(5)+1$ (**B**) $2(3+5)$ (**C**) $3(3+5)$ (**D**) $3+5+1$ (**E**) $\frac{3+5}{2}$

Solution

On évalue les diverses expressions :

(**A**) $3(5)+1=16$ (**B**) $2(3+5)=16$ (**C**) $3(3+5)=24$ (**D**) $3+5+1=9$ (**E**) $\frac{3+5}{2}=4$

Seul le choix **(D)** donne un nombre impair.

Réponse : (D)

6. Qaddama a 6 ans de plus que Gilles. Gilles a 3 ans de moins que Denis. Si Qaddama est âgée de 19 ans, quel est l'âge de Denis?

(**A**) 17 ans (**B**) 16 ans (**C**) 10 ans (**D**) 18 ans (**E**) 15 ans

Solution

Puisque Qaddama est âgée de 19 ans et qu'elle a 6 ans de plus que Gilles, Gilles a 13 ans. Puisque Gilles a 3 ans de moins que Denis, Denis a 16 ans. Réponse : (B)

7. Une boîte de forme rectangulaire a un volume de 144 cm^3. Si la boîte a une longueur de 12 cm et une largeur de 6 cm, quelle est sa hauteur?

(**A**) 126 cm (**B**) 72 cm (**C**) 4 cm (**D**) 8 cm (**E**) 2 cm

Solution

La base de la boîte a une aire de $(12\times 6)\text{ cm}^2$, ou 72 cm^2. Puisque le volume est égal à (l'aire de la base) $\times$ (la hauteur) et que $72\times 2=144$, la boîte a une hauteur de 2 cm.

Réponse : (E)

8. Dans un pot, le rapport du nombre de biscuits à l'avoine au nombre de biscuits au chocolat est égal à 5:2. S'il y a 20 biscuits à l'avoine dans le pot, le nombre de biscuits au chocolat est égal à :

(**A**) 28 (**B**) 50 (**C**) 8 (**D**) 12 (**E**) 18

Solution

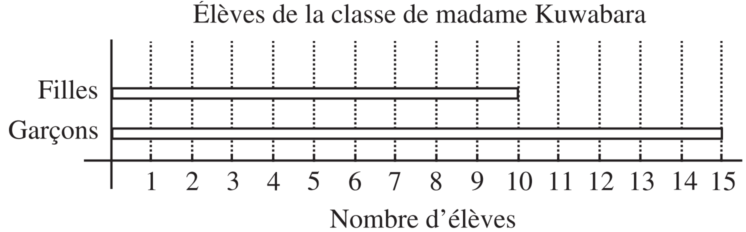
Le rapport $5:2$ indique qu'il y a 5 groupes de biscuits à l'avoine pour 2 groupes de biscuits au chocolat. Puisqu'il y a 20 biscuits à l'avoine, il y a 4 biscuits par groupe. Il y a donc 8 biscuits au chocolat.

De façon algébrique, on peut représenter le nombre de biscuits au chocolat par x. On a donc $5:2=20:x$, ou $\frac{5}{2}=\frac{20}{x}$. On peut comparer les fractions en choisissant le même numérateur. Puisque $\frac{5}{2}=\frac{20}{8}$, l'équation devient $\frac{20}{8}=\frac{20}{x}$. Donc $x=8$. Réponse : (C)

9. Le diagramme ci-dessous indique le nombre de garçons et de filles dans la classe de madame Kuwabara. Le pourcentage des élèves de la classe qui sont des filles est égal à :

(**A**) 40 % (**B**) 15 % (**C**) 25 % (**D**) 10 % (**E**) 60 %

Élèves de la classe de madame Kuwabara



Solution

D'après le diagramme, il y a 10 filles et 15 garçons, c'est-à-dire 25 élèves dans la classe. Le rapport du nombre de filles au nombre d'élèves est égal à $\frac{10}{25}$, ou $\frac{40}{100}$. Le pourcentage des élèves de la classe qui sont des filles est égal à 40 %. On peut aussi calculer $\frac{10}{25} \times 100\,\%$ pour obtenir 40 %.

RÉPONSE : (A)

10. Lequel des énoncés suivants **n'est pas** vrai?
(**A**) Un quadrilatère a quatre côtés.
(**B**) Les mesures des angles d'un triangle ont une somme de $180°$.
(**C**) Un rectangle a quatre angles de $90°$.
(**D**) Un triangle peut avoir deux angles de $90°$.
(**E**) Un rectangle est un quadrilatère.

Solution

Un quadrilatère a quatre côtés par définition.
Les mesures des angles d'un triangle ont une somme de $180°$.
Un rectangle a quatre angles de $90°$.
Un rectangle est un quadrilatère puisqu'il a quatre côtés.
Un triangle ne peut avoir deux angles de 90°, puisque la somme des mesures des angles est égale à 180° et que le troisième angle ne peut mesurer 0°.

RÉPONSE : (D)

Partie B

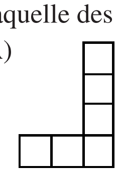
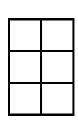
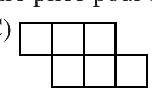
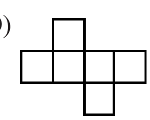
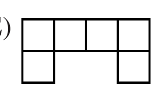
11. Un nombre palindrome est un nombre entier strictement positif qui peut être lu de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple, 2002 est un palindrome. Quel est le plus petit nombre que l'on peut ajouter à 2002 pour obtenir un plus grand palindrome?
(**A**) 11 (**B**) 110 (**C**) 108 (**D**) 18 (**E**) 1001

Solution

On peut résoudre le problème de façon efficace en cherchant le premier palindrome après 2002. Ce palindrome doit avoir la forme $2aa2$ et puisque a doit être supérieur à 0, le palindrome suivant doit être 2112. Le plus petit nombre que l'on peut ajouter à 2002 est donc $2112 - 2002$, ou 110.

RÉPONSE : (B)

12. Laquelle des figures suivantes peut être pliée pour former un cube?

(**A**) 
(**B**) 
(**C**) 
(**D**) 
(**E**) 

Solution

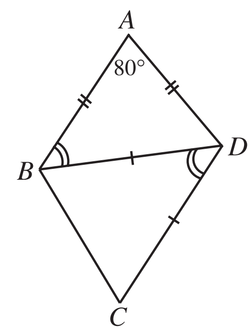
Seule la figure (**D**) peut être pliée pour former cube. On peut vérifier en découpant les figures et en essayant de les plier.

RÉPONSE : (D)

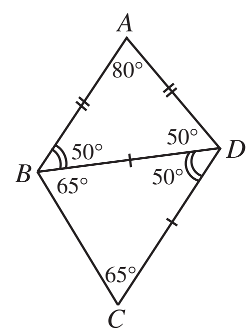
13. Si $a+b=12$, $b+c=16$ et $c=7$, quelle est la valeur de a?
(**A**) 1 (**B**) 5 (**C**) 9 (**D**) 7 (**E**) 3

Solution
Puisque $c=7$ et que $b+c=16$, alors $b+7=16$, d'où $b=9$.
Puisque $b=9$ et que $a+b=12$, alors $a+9=12$, d'où $a=3$. RÉPONSE : (E)

14. Dans le diagramme, $\angle ABD = \angle BDC$ et $\angle DAB = 80°$.
De plus, $AB = AD$ et $DB = DC$.
La mesure de l'angle BCD est égale à :
(**A**) 65° (**B**) 50° (**C**) 80°
(**D**) 60° (**E**) 70°



Solution
Puisque le triangle ABD est isocèle, $\angle ABD = \angle ADB$.
Puisque la somme des mesures des angles de ce triangle est égale à 180 et que $\angle A = 80°$, alors $\angle ABD = 50°$ et $\angle ADB = 50°$. Donc $\angle BDC = 50°$.
Puisque le triangle BDC est isocèle, on utilise le même argument pour démontrer que $\angle BCD = 65^{\circ}$.



RÉPONSE : (A)

15. Un nombre parfait est un entier qui est égal à la somme de tous ses diviseurs positifs qui sont plus petits que lui. Par exemple, 28 est un nombre parfait car $28 = 1+2+4+7+14$. Lequel des nombres suivants est un nombre parfait?
(**A**) 10 (**B**) 13 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 9

Solution
On vérifie chaque choix.

	Nombre	Diviseurs positifs	Somme des diviseurs qui sont plus petits
(A)	10	1, 2, 5, 10	$1+2+5=8$
(B)	13	1, 13	1
(C)	6	1, 2, 3, 6	$1+2+3=6$
(D)	8	1, 2, 4, 8	$1+2+4=7$
(E)	9	1, 3, 9	$1+3=4$

Le seul nombre parfait est 6. (Les deux nombres parfaits suivants, après 6 et 28, sont 496 et 8128.)
RÉPONSE : (C)

16. On lance trois pièces de monnaie. Quelle est la probabilité pour qu'elles tombent FACE toutes les trois?

(**A**) $\frac{1}{8}$ (**B**) $\frac{1}{6}$ (**C**) $\frac{1}{4}$ (**D**) $\frac{1}{3}$ (**E**) $\frac{1}{2}$

Solution

On peut utiliser un arbre pour obtenir tous les résultats possibles :

PPP	PPF	PFP	PFF
FPP	FPF	FFP	FFF

Il y a donc 8 résultats possibles et ils ont tous la même probabilité. Un seul de ces résultats est favorable. La probabilité pour que les pièces tombent FACE toutes les trois est égale à $\frac{1}{8}$.

D'autre part, on sait que si on lance une pièce de monnaie, la probabilité pour qu'elle tombe FACE est égale à $\frac{1}{2}$. Donc la probabilité pour que les pièces de monnaie tombent FACE toutes les trois est égale à $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{8}$.

RÉPONSE : (A)

17. Si P est un entier strictement négatif, laquelle des expressions suivantes est positive?

(**A**) P^2 (**B**) $\frac{1}{P}$ (**C**) $2P$ (**D**) $P-1$ (**E**) P^3

Solution

On peut évaluer chaque expression en utilisant $P=-1$.

(**A**) $P^2=1$ (**B**) $\frac{1}{P}=-1$ (**C**) $2P=-2$ (**D**) $P-1=-2$ (**E**) $P^3=-1$

La seule réponse positive est (**A**). De fait, l'expression P^2 est toujours positive ou nulle, peu importe la valeur de P.

RÉPONSE : (A)

18. Lorsqu'on développe le nombre 1000^{10}, le nombre de zéros qu'il faut écrire est :

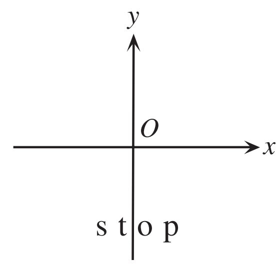
(**A**) 13 (**B**) 30 (**C**) 4 (**D**) 10 (**E**) 1000

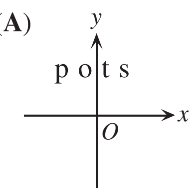
Solution

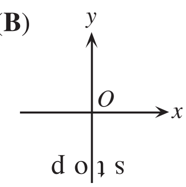
Chaque facteur 1000 fournit trois zéros. Or 1000 paraît 10 fois comme facteur.
Il faut donc écrire 30 zéros.

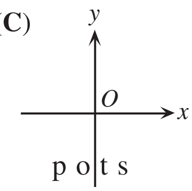
RÉPONSE : (B)

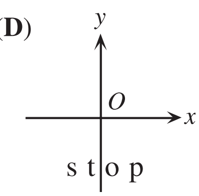
19. On place le mot « stop » dans la position illustrée dans le diagramme ci-contre. On lui fait subir une rotation de centre à l'origine O et de 180° dans le sens des aiguilles d'une montre, suivie d'une réflexion par rapport à l'axe des x. Lequel des diagrammes suivants représente l'image finale?

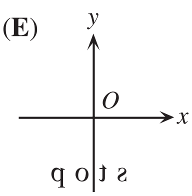


(**A**)


(**B**)


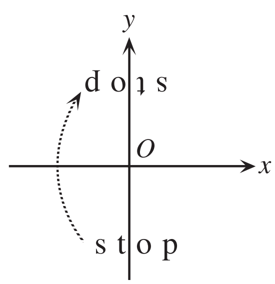
(**C**)


(**D**)


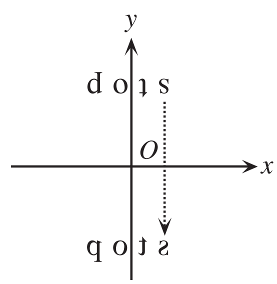
(**E**)


Solution

Le premier diagramme illustre l'image par une rotation de 180°. Le deuxième diagramme illustre l'image de cette image par la réflexion.



Rotation de 180°



Réflexion par rapport à l'axe des x

RÉPONSE : (E)

20. Lorsqu'on développe le nombre 7^{62}, le chiffre des unités (c.-à-d. le dernier chiffre) est égal à :
(**A**) 7 (**B**) 1 (**C**) 3 (**D**) 9 (**E**) 5

Solution

On développe les premières puissances de 7 pour chercher une régularité.

$7^1 = 7,\ 7^2 = 49,\ 7^3 = 343,\ 7^4 = 2401,\ 7^5 = 16\,807,\ \ldots$

On voit que le chiffre des unités des puissances obéit à la régularité 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, 7, …
(De fait, le chiffre des unités du produit dépend seulement du chiffre des unités des nombres multipliés.)

Le motif 7, 9, 3, 1 se répète à tous les quatre résultats. Puisque 60 est un multiple de 4, le chiffre des unités de 7^{60} est 1. Donc celui de 7^{61} est 7 et celui de 7^{62} est 9.

RÉPONSE : (D)

Partie C

21. Les longueurs des côtés d'un rectangle, en centimètres, sont des entiers. Le rectangle a une aire de 36 cm^2. Quel est le plus grand périmètre que ce rectangle pourrait avoir?

(**A**) 72 cm (**B**) 80 cm (**C**) 26 cm (**D**) 74 cm (**E**) 48 cm

Solution

Puisque les longueurs des côtés du rectangle sont des entiers et que l'aire est égale à 36 cm^2, on considère les possibilités :

Longueurs des côtés	Périmètre
1, 36	$2(1+36)=74$
2, 18	$2(2+18)=40$
3, 12	$2(3+12)=30$
4, 9	$2(4+9)=26$
6, 6	$2(6+6)=24$

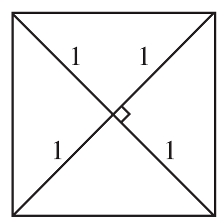
Le plus grand périmètre est 74 cm. Réponse : (D)

22. Si chaque diagonale d'un carré a une longueur de 2, alors le carré a une aire de :

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Solution

On trace le carré et ses diagonales.



On obtient 4 triangles rectangles ayant chacun une aire de $\frac{1}{2}$, car chaque triangle est la moitié d'un carré dont les côtés mesurent 1. Le carré a donc une aire de $4\times\frac{1}{2}$, ou 2.

Réponse : (B)

23. Une carte est dessinée à l'échelle de $1:10\,000$. Sur cette carte, la forêt Gauss occupe un rectangle de dimensions 10 cm sur 100 cm. Quelle est l'aire réelle de la forêt Gauss, en kilomètres carrés?

(**A**) 100 (**B**) 1 000 000 (**C**) 1000 (**D**) 1 (**E**) 10

Solution

Chaque côté du rectangle formé par la forêt mesure 10 000 fois la longueur du côté correspondant sur la carte. Un côté mesure donc :

$$10\ 000\times 10 \text{ cm} = 100\ 000 \text{ cm} = 1000 \text{ m} = 1 \text{ km}$$

L'autre côté mesure :

$$10\ 000\times 100 \text{ cm} = 1\ 000\ 000 \text{ cm} = 10\ 000 \text{ m} = 10 \text{ km}$$

L'aire réelle de la forêt Gauss est donc égale à $(1\times 10) \text{ km}^2$, ou 10 km^2.

Réponse : (E)

24. Il y a 6 notes sur le bulletin de Véronique.
La moyenne des 6 notes est 74.
Le mode des 6 notes est 76.
La médiane des 6 notes est 76.
La note la plus basse est 50.
La note la plus haute est 94.
Une seule note paraît deux fois et aucune note ne paraît plus de deux fois.
Si toutes les notes sont des entiers, le nombre de possibilités pour la deuxième note la plus basse est :
(**A**) 17 (**B**) 16 (**C**) 25 (**D**) 18 (**E**) 24

Solution

Puisqu'une seule note paraît deux fois et qu'aucune ne paraît plus de deux fois, le mode de 76 nous dit que 76 paraît deux fois. On connaît donc quatre des notes, soit 50, 76, 76 et 94.
Puisqu'il y a 6 notes en tout (un nombre pair de notes) et que la médiane est 76, les deux notes de 76 doivent paraître au milieu lorsqu'on place les notes en ordre croissant. La 3e note et la 4e note doivent donc être 76.
Soit M la deuxième note la plus basse et soit N la deuxième note la plus élevée.
En ordre, les notes sont donc 50, M, 76, 76, N, 94. De plus, M doit être plus grande que 50 et plus petite que 76. De même, N doit être plus grande que 76 et plus petite que 94.
D'après les restrictions précédentes, M peut égaler n'importe quel entier de 51 à 75, tandis que N peut égaler n'importe quel entier de 77 à 93.
Puisque la moyenne est égale à 74, on a :

$$\frac{50+M+76+76+N+94}{6}=74$$
$$M+N+296=444$$
$$M+N=148 \qquad (*)$$

Puisque M, jusqu'ici, peut prendre n'importe quelle des 25 valeurs de 51 à 75, on vérifie les 25 solutions possibles de l'équation (*) :

$51+97=148$, $52+96=148$, $53+95=148$, $54+94=148$, $55+93=148$, $\ldots$, $71+77=148$, $72+76=148$, $73+75=148$, $74+74=148$, $75+73=148$

Or les valeurs de N peuvent être un entier de 77 à 93. On doit donc éliminer les 4 premières et les 4 dernières solutions. M peut donc prendre n'importe quelle valeur de 55 à 71, soit 17 valeurs.
Il y a donc 17 possibilités pour la deuxième note la plus basse. RÉPONSE : (A)

25. Émilie a créé un jeu en employant une rangée de carreaux du plancher qu'elle a numérotés 1, 2, 3, 4, … Elle se place sur le carreau numéro 2 et se met à bondir le long de la rangée, en atterrissant à tous les deux carreaux, pour s'arrêter sur l'avant dernier carreau. En partant de ce carreau, elle bondit de nouveau vers l'avant de la rangée, en atterrissant à tous les trois carreaux et en s'arrêtant sur le carreau numéro 1. Elle se retourne et bondit de nouveau le long de la rangée, en atterrissant à tous les cinq carreaux et en s'arrêtant de nouveau sur l'avant-dernier carreau. Le nombre de carreaux qu'il pourrait y avoir dans la rangée est égal à :
(**A**) 39 (**B**) 40 (**C**) 47 (**D**) 49 (**E**) 53

Solution
Puisqu'Émilie commence sur le carreau numéro 2 et qu'elle atterrit à tous les deux carreaux, elle ne touche que les carreaux ayant un numéro pair. Puisqu'elle s'arrête sur l'avant-dernier carreau, il y a un nombre impair de carreaux. Cela élimine le choix (B), 40.
Ensuite elle atterrit à tous les trois carreaux pour s'arrêter sur le carreau numéro 1. Elle a donc touché les carreaux numéros 1, 4, 7, … (soit les carreaux dont le numéro est 1 de plus qu'un multiple de 3). L'avant-dernier carreau a donc un numéro qui est 1 de plus qu'un multiple de 3. Le nombre total de carreaux est donc 2 de plus qu'un multiple de 3. Cela élimine les choix 39 et 49.
La troisième fois, elle part du carreau numéro 1 et atterrit à tous les 5 carreaux. Les carreaux qu'elle touche ont un numéro qui est 1 de plus qu'un multiple de 5. Puisqu'elle s'arrête sur l'avant-dernier carreau, le nombre de carreaux doit être 2 de plus qu'un multiple de 5. Cela élimine le choix 53.
Le choix 47 est le seul qui vérifie toutes les conditions.
(Pour vérifier la réponse, on suggère de refaire les bonds d'Émilie, sachant qu'il y a 47 carreaux.)

RÉPONSE : (C)

✿✿✿✿✿✿✿✿✿✿