Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2002 Solutions

Concours Fermat (11e - Sec. V)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

1. Si $x = 3$, alors : $5 - 2x^2 = 5 - 2(3)^2$
$= 5 - 18$
$= -13$
RÉPONSE : (C)

2. $\dfrac{3^3 + 3}{2^2 + 2} = \dfrac{27 + 3}{4 + 2}$
$= \dfrac{30}{6}$
$= 5$
RÉPONSE : (E)

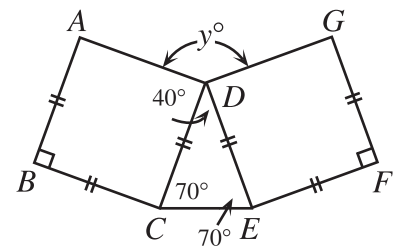
3. On a $56 = 24 + 24 + 8$. Puisqu'il y a 24 heures dans une journée, 56 heures correspondent à deux journées complètes, plus 8 heures. Il faut donc ajouter 8 heures à 9 h 04. On obtient 17 h 04.
RÉPONSE : (B)

4. On examine chacun des cinq énoncés.
25 est un carré parfait, puisque $25 = 5^2$.
31 est un nombre premier, puisque ses seuls diviseurs positifs sont 1 et 31.
3 n'est pas le plus petit nombre premier, car 2 est un nombre premier.
8 est un cube parfait, car $8 = 2^3$.
15 est le produit de deux nombres premiers, car $15 = 3 \times 5$.
RÉPONSE : (C)

5. L'aire de l'affiche est égale à 50×100, ou 5000 cm^2.
L'aire du portrait de Pierre de Fermat est égale à 20×40, ou 800 cm^2.
Le pourcentage de la surface de l'affiche qui est recouverte par le portrait est égal à $\dfrac{800}{5000} \times 100\ \%$, ou 16 %
RÉPONSE : (B)

6. Soit *G*, *H*, *Y*, *J* et *C* l'âge respectif de Gisa, Henri, Yvan, Justine et Catherine. D'après la première phrase, $H < G < J$. D'après la deuxième phrase, $C < Y < G$. On voit que *J* est plus grand que *G*, *H*, *Y* et *C*. Justine est donc la plus grande.
RÉPONSE : (D)

7. On peut déterminer la réponse en obtenant, par tâtonnements, les dimensions des divers rectangles. Si on suppose que le petit rectangle en haut à gauche, a une largeur de 2 et une hauteur de 3, alors le rectangle à sa droite, qui a lui aussi une hauteur de 3, doit avoir une largeur de 5. On conclut que le rectangle, en bas à droite, a une hauteur de 5, de même que le rectangle ombré. Celui-ci a une largeur de 2, comme le premier rectangle. Le rectangle ombré a donc une largeur de 2 et une hauteur de 5, ce qui donne une aire de 10. On peut aussi résoudre le problème de façon algébrique, mais la stratégie présentée est probablement la plus efficace.
RÉPONSE : (E)



8. Puisque les carrés $ABCD$ et $DEFG$ ont les mêmes longueurs de côtés, alors $DC = DE$ et le triangle CDE est donc isocèle. Donc $\angle DEC = \angle DCE = 70^\circ$, d'où :
$\angle CDE = 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ$
et
$y^\circ = 360^\circ - \angle ADC - \angle CDE - \angle GDE$
$y^\circ = 360^\circ - 90^\circ - 40^\circ - 90^\circ$
$y^\circ = 140^\circ$
$y = 140$

RÉPONSE : (E)

9. Il y a 20 choix possibles, dont six sont des multiples de 3, soit 3, 6, 9, 12, 15 et 18.
La probabilité pour que la balle choisie soit un multiple de 3 est égale à $\frac{6}{20}$.

RÉPONSE : (B)

10. Puisque $ABCD$ est un carré, $AB = BC$. Donc :
$x + 16 = 3x$
$16 = 2x$
$x = 8$
Chaque côté a donc une longueur de $8 + 16$, ou 24. Le carré a donc un périmètre de 96.

RÉPONSE : (C)

11. La pente de la droite est égale à $\frac{-2-0}{0-1}$, ou 2.
D'après le premier point, l'ordonnée à l'origine de la droite est égale à –2. La droite a donc pour équation $y = 2x - 2$. Puisque le point $(7, b)$ est sur la droite, il vérifie l'équation. Donc $b = 2 \times 7 - 2$, ou $b = 12$.

RÉPONSE : (A)

12. On détermine d'abord le plus grand et le plus petit carré parfait de trois chiffres.
Le plus petit carré parfait de trois chiffres est 100. En effet, $100 = 10^2$.
Puisque $\sqrt{1000} \approx 31{,}6$ et que $31^2 = 961$, le plus grand carré parfait de trois chiffres est 961.
Les seuls carrés parfaits de 100 à 961 sont les carrés des nombres 10, 11, …, 31.
Il y en a 22.

RÉPONSE : (B)

13. Un nombre « double-singulier » est de la forme aab, a et b étant des chiffres différents. Il y a 9 possibilités pour a (puisque a ne peut égaler 0). Pour chacune de ces possibilités, il y a 9 possibilités pour b (puisque b peut égaler n'importe quel chiffre de 0 à 9, à l'exception de la valeur de a). Il y a donc 9×9, ou 81 nombres doubles-singuliers.

RÉPONSE : (A)

14. On divise 2002 par 7 pour obtenir 286, d'où $2002 = 7 \times 286$. Puisqu'il y a 7 entiers par rangée et que le dernier nombre de chaque rangée est le multiple de 7 qui correspond au numéro de la rangée, alors le nombre 2002 doit être situé dans la 7e colonne et dans la 286e rangée. Donc $m = 7$ et $n = 286$, d'où $m + n = 293$. RÉPONSE : (D)

15. D'après la règle, le troisième terme est égal à $a + 2$ et le quatrième terme est égal à $a + 2 + (a + 2)$, ou $2(a + 2)$. De même, le cinquième terme est égal à $4(a + 2)$ et le sixième terme est égal à $8(a + 2)$. Puisque le sixième est égal à 56, on a $8(a + 2) = 56$, d'où $a + 2 = 7$ et $a = 5$. RÉPONSE : (E)

16. *Solution 1*

Par mise en évidence de facteurs communs, on a :

$$\begin{aligned} ac + ad + bc + bd &= 68 \\ a(c + d) + b(c + d) &= 68 \\ a(4) + b(4) &= 68 \\ 4(a + b) &= 68 \\ a + b &= 17 \end{aligned}$$

Puisque $c + d = 4$, alors :

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= (a + b) + (c + d) \\ &= 17 + 4 \\ &= 21 \end{aligned}$$

Solution 2

Puisque $c + d = 4$, posons $c = d = 2$. On reporte ces valeurs dans l'équation :

$$\begin{aligned} ac + ad + bc + bd &= 68 \\ 2a + 2a + 2b + 2b &= 68 \\ a + b &= 17 \end{aligned}$$

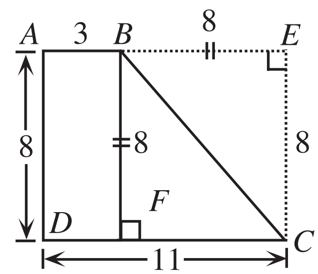
Comme dans la solution précédente, $(a + b) + (c + d) = 21$. RÉPONSE : (D)

17. Soit F le nombre de femmes dans le groupe.
Puisque l'âge moyen des femmes est de 28 ans, l'âge total des femmes est égal à $28F$.
Il y a $140 - F$ hommes dans le groupe. L'âge total des hommes est donc égal à $21(140 - F)$.
Puisque l'âge moyen du groupe est de 24 ans, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\text{Âge total du groupe}}{140} &= 24 \\ \frac{28F + 21(140 - F)}{140} &= 24 \\ 28F + 21(140) - 21F &= 24(140) \\ 7F &= 3(140) \\ F &= 60 \end{aligned}$$

Il y a 60 femmes dans le groupe. RÉPONSE : (D)

18. Puisque E coïncide avec F, Alors $BE = BF$ et $\angle BFC = \angle BEC = 90^\circ$.
Donc $BECF$ est un rectangle. Puisque $EC = 8$ cm, alors $BF = 8$ cm. Donc $BE = FC = 8$ cm. Puisque $AB = AE - BE$, alors $AB = 3$ cm. D'après la relation de Pythagore :



$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{BF^2 + FC^2} \\ &= \sqrt{64+64} \\ &= \sqrt{128} \\ &\approx 11{,}31 \text{ cm} \end{aligned}$$

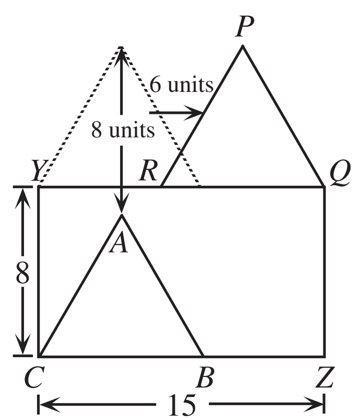
Le périmètre du trapèze $ABCD$ est à peu près égal à $3 + 11{,}31 + 11 + 8$, ou 33,31 cm. Il est donc plus près de 33,3 cm. RÉPONSE : (A)

19. On a :

$$\begin{aligned} 2^a 3^b &= 8(6^{10}) \\ 2^a 3^b &= 2^3([(2)(3)]^{10}) \\ 2^a 3^b &= 2^3(2^{10}3^{10}) \\ 2^a 3^b &= 2^{13}3^{10} \end{aligned}$$

Donc $a = 13$ et $b = 10$, d'où $b - a = -3$. RÉPONSE : (E)

20. Puisque les triangles ABC et PQR sont équilatéraux avec des côtés de longueur 9, ils sont congruents.
On peut faire subir au triangle ABC une translation de 8 unités vers le haut, pour que le côté CB soit sur YQ, et de $15 - 9$, ou 6 unités vers la droite, pour que B coïncide avec Q. Le triangle ABC coïncide alors avec le triangle PQR.
Pour se rendre de A à P, on doit bouger de 8 unités vers le haut et de 6 unités vers la droite. Selon la relation de Pythagore, la distance de A à P est donc égale à $\sqrt{6^2 + 8^2}$, ou 10 unités.



RÉPONSE : (A)

21. Puisque $\sqrt{\frac{3}{1} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{5} \cdot \ \dots \ \cdot \frac{2n+1}{2n-1}} = 9$, alors $\frac{3}{1} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{5} \cdot \ \dots \ \cdot \frac{2n+1}{2n-1} = 81$.
Dans le membre de gauche, chaque numérateur, à l'exception du dernier, est annulé par le dénominateur de la fraction suivante. Il s'agit d'un produit téléscopé. L'équation devient donc $\frac{2n+1}{1} = 81$, ou $2n + 1 = 81$, d'où $n = 40$. RÉPONSE : (C)

22. On n'a guère de choix que de calculer la valeur de $f(2)$ à l'aide des renseignements donnés.

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1+1) \\ &= f(1) + f(1) + 2(1)(1) \\ &= 4 + 4 + 2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} f(4) &= f(2+2) \\ &= f(2) + f(2) + 2(2)(2) \\ &= 10 + 10 + 8 \\ &= 28 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(8) &= f(4+4) \\ &= f(4) + f(4) + 2(4)(4) \\ &= 28 + 28 + 32 \\ &= 88 \end{aligned}$$

On aurait aussi pu utiliser $f(2) = f(1+1)$, $f(3) = f(2+1)$, $f(4) = f(3+1)$, … jusqu'à $f(8)$.

RÉPONSE : (C)

23. Lorsqu'on a ajouté m autres 8 et k autres 9 au tableau, on a un total de $9 + m + k$ nombres et leur somme est égale à $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 8m + 9k$, ou $45 + 8m + 9k$.
Puisque leur moyenne est égale à 7,3, on a :

$$\frac{\text{Somme des nombres au tableau}}{\text{Nombre de nombres au tableau}} = 7{,}3$$

$$\frac{45 + 8m + 9k}{9 + m + k} = \frac{73}{10}$$

$$450 + 80m + 90k = 657 + 73m + 73k$$

$$7m + 17k = 207$$

Puisque m et k sont des entiers strictement positifs et que $17(13) = 221 > 207$, alors $k < 13$.
Par tâtonnements, on accorde à k les valeurs entières de 1 à 12 et on vérifie si m prend des valeurs entières selon l'équation. La seule possibilité est $k = 6$, ce qui donne $m = 15$.
Donc $k + m = 21$.

RÉPONSE : (B)

24. On calcule d'abord le volume de chaque contenant de forme cylindrique :

$$\begin{aligned} V_{\text{grand}} &= \pi(6)^2(20) \\ &= 720\pi \ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\text{petit}} &= \pi(5)^2(18) \\ &= 450\pi \ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

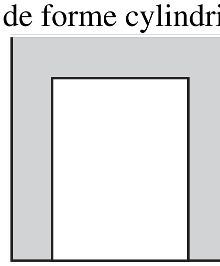


Figure 3

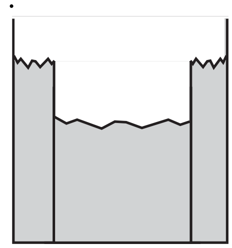


Figure 4

Le volume initial d'eau dans le grand cylindre est égal à :

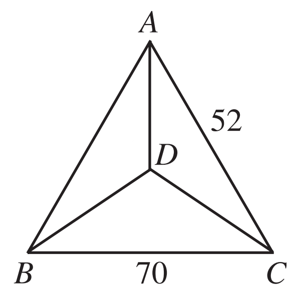
$$\begin{aligned} V_{\text{initial d'eau}} &= \pi(6)^2(17) \\ &= 612\pi \ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Si le petit contenant était fermé à l'aide d'un couvercle et qu'on le baissait jusqu'au fond du grand contenant, comme dans la Figure 3, il serait complètement recouvert d'eau et une partie de l'eau aurait été versée à l'extérieur du grand contenant. De plus, le niveau de l'eau irait jusqu'au haut du grand contenant, puisque le volume initial d'eau et le volume du petit contenant dépassent le volume du grand contenant.

Si on enlevait le couvercle, toute l'eau qui est au-dessus du petit contenant s'écoulerait dans le petit contenant. Cette eau est au départ dans une région de forme cylindrique de rayon 6 cm et de hauteur 2 cm. Son volume est égal à $\pi(6)^2(2)$, ou 72π cm^3. Il s'agit donc du volume d'eau dans le petit contenant à la toute fin, lorsque celui-ci repose au fond du grand. On a donc $72\pi = \pi(5)^2 h$, où h représente la profondeur d'eau dans le petit contenant. Donc $h = \frac{72\pi}{25\pi}$, ou $h = 2{,}88$ cm. RÉPONSE : (D)

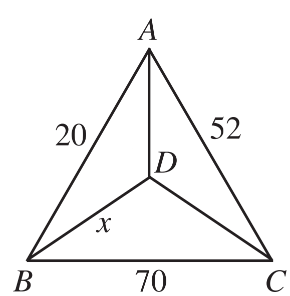
25. Pour résoudre ce problème, il faut bien comprendre que si a, b et c représentent les longueurs des côtés d'un triangle, alors $a+b>c$, $a+c>b$ et $b+c>a$. Cette relation est appelée l'*inégalité du triangle*. On peut l'énoncer d'une autre façon : Si a, b et c représentent les longueurs des côtés d'un triangle et si $a \le b \le c$, alors il faut que $a+b>c$ soit vrai, sinon les côtés de longueurs a et b ne seraient pas assez longs pour former un triangle. Les deux autres inégalités doivent être vraies, puisque c représente la plus grande longueur.

Soit x la longueur de la sixième arête.
Le diagramme représente le tétraèdre. Le triangle ABC représente la base du tétraèdre et le sommet D représente l'apex. Le diagramme indique aussi que le tétraèdre est formé de quatre triangles, ABC, ABD, ADC et BDC.

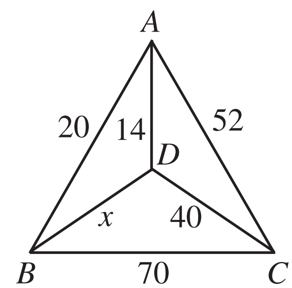


Soit $BC = 70$. Puisque l'arête BC est un côté de deux triangles, ABC et BDC, un de ces triangles est formé de côtés de longueurs données. Selon l'inégalité du triangle, les seules possibilités pour les longueurs des deux autres côtés de ce triangle sont 40 et 52, ou 20 et 52. Soit $AC = 52$.

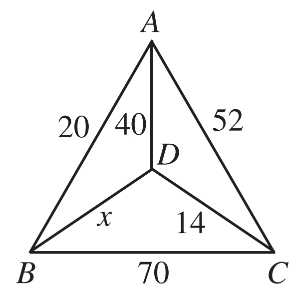
Si $AB = 40$, les longueurs 14, 20 et x n'ont pas encore été utilisées. Or des côtés de longueurs 14 et 20 ne peuvent former un triangle avec un troisième côté de longueur 40, 52 ou 70. Donc AB ne peut égaler 40.
Si $AB = 20$, les longueurs 14, 40 et x n'ont pas encore été utilisées. Or des côtés de longueurs 14 et 40 ne peuvent former un triangle avec un troisième côté de longueur 70. On a donc $BD = x$ ou $DC = x$.
Si $DC = x$, le triangle ABD doit avoir des côtés de longueurs 20, 14 et 40, ce qui est impossible. Donc $BD = x$.



1er cas : $AD = 14$ et $DC = 40$
Dans le triangle ABD, on a $20 + 14 > x$ et $14 + x > 20$.
Puisque x est un entier, alors $7 \leq x \leq 33$.
Dans le triangle BDC, $40 + 70 > x$ et $x + 40 > 70$.
Puisque x est un entier, alors $31 \leq x \leq 109$.
Ces deux inéquations donnent $31 \leq x \leq 33$.



2^{e} cas : $DC = 14$ et $AD = 40$
Dans le triangle ABD, on a $20 + 40 > x$ et $20 + x > 40$.
Puisque x est un entier, alors $21 \leq x \leq 59$.
Dans le triangle BDC, $14 + 70 > x$ et $x + 14 > 70$.
Puisque x est un entier, alors $57 \leq x \leq 83$.
Ces deux inéquations donnent $57 \leq x \leq 59$.



Il y a donc 6 valeurs possibles de x, soit 31, 32, 33, 57, 58 et 59.
[Remarque : Chacune des six possibilités permet de former un tétraèdre. En composant ce problème, nous avons découvert qu'il est possible de trouver des longueurs de côtés qui permettent de former 4 triangles sans qu'il soit possible de les assembler pour former un tétraèdre. Cela mérite une exploration.]

RÉPONSE : (E)