Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat (11e – Sec. V)

Le mercredi 20 février 2002

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche Comptables agréés

Avec la participation de :

Institut canadien des actuaires

London Life, compagnie d'assurance-vie et La Great-West, compagnie d'assurance-vie

Sybase Inc. (Waterloo)

*i*Anywhere Solutions

Avec l'appui de :

Financière Manuvie

L'Équitable, Compagnie d'Assurance-Vie du Canada

Durée : 1 heure

L'usage de la calculatrice est permis, pourvu qu'elle ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponse. Au besoin, demandez à l'enseignant-e d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Aussi, il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droit de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école, le nom de la ville et celui de la province.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats officiels.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation :
   Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Il *n'y a pas* de pénalité pour une réponse fautive.
   Chaque question restée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 20 points.
8. Les diagrammes *ne sont pas* dessinés à l'échelle. Ils sont inclus pour aider seulement.
9. Après le signal du surveillant, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Notation :	Une réponse fautive *n'est pas* pénalisée. On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 20 points.

Partie A : 5 points par question

1. Si $x = 3$, la valeur numérique de $5 - 2x^2$ est :

   (**A**) –1 (**B**) 27 (**C**) –13 (**D**) -31 (**E**) 3

2. $\dfrac{3^3 + 3}{2^2 + 2}$ est égal à :

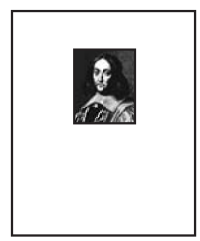
   (**A**) 3 (**B**) 6 (**C**) 2 (**D**) $\frac{3}{2}$ (**E**) 5

3. Il est maintenant 9 h 04. Dans 56 heures, il sera :

   (**A**) 9 h 04 (**B**) 17 h 04 (**C**) 5 h 04 (**D**) 13 h 04 (**E**) 1 h 04

4. Lequel des énoncés suivants n'est **pas** vrai?
   (**A**) 25 est un carré parfait.
   (**B**) 31 est un nombre premier.
   (**C**) 3 est le plus petit nombre premier.
   (**D**) 8 est un cube parfait.
   (**E**) 15 est le produit de deux nombres premiers.

5. Un portrait de Pierre de Fermat est de forme rectangulaire et mesure 20 cm sur 40 cm. Il est placé comme dans le diagramme, sur une affiche rectangulaire mesurant 50 cm sur 100 cm. Quel pourcentage de la surface de l'affiche est recouverte par le portrait?

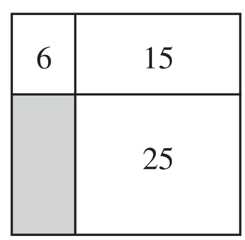
   

   (**A**) 24 % (**B**) 16 % (**C**) 20 %
   (**D**) 25 % (**E**) 40 %

6. Gisa est plus grande que Henri, mais elle est plus courte que Justine. Yvan est plus grand que Catherine, mais plus court que Gisa. La plus grande de ces cinq personnes est :

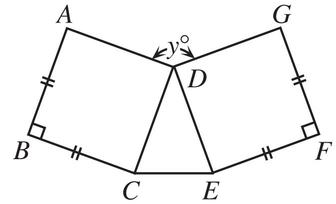
   (**A**) Gisa (**B**) Henri (**C**) Yvan (**D**) Justine (**E**) Catherine

7. Un rectangle a été divisé en quatre petits rectangles. Trois de ces rectangles ont une aire respective de 6, 15 et 25, comme l'indique le diagramme. L'aire du rectangle ombré est égale à :

   (**A**) 7 (**B**) 15 (**C**) 12
   (**D**) 16 (**E**) 10

8. Dans le diagramme, $ABCD$ et $DEFG$ sont des carrés ayant les mêmes longueurs de côtés et $\angle DCE = 70°$. La valeur de y est :

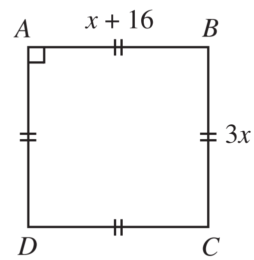


(**A**) 120 (**B**) 160 (**C**) 130
(**D**) 110 (**E**) 140

9. On a écrit les nombres de 1 à 20 sur vingt balles de golf, un numéro par balle. On a ensuite placé les balles dans une boîte. Si on tire une balle au hasard et que chaque balle a une même chance d'être choisie, quelle est la probabilité pour que la balle choisie soit un multiple de 3?

(**A**) $\frac{3}{20}$ (**B**) $\frac{6}{20}$ (**C**) $\frac{10}{20}$ (**D**) $\frac{5}{20}$ (**E**) $\frac{1}{20}$

10. $ABCD$ est un carré. Si $AB = x + 16$ et $BC = 3x$, alors le périmètre de $ABCD$ est égal à :



(**A**) 16 (**B**) 32 (**C**) 96
(**D**) 48 (**E**) 24

Partie B : 6 points par question

11. Une droite qui passe par les points $(0,-2)$ et $(1,0)$ passe aussi par le point $(7,b)$. La valeur numérique de b est :

(**A**) 12 (**B**) $\frac{9}{2}$ (**C**) 10 (**D**) 5 (**E**) 14

12. Combien y a-t-il d'entiers positifs de trois chiffres qui sont des carrés parfaits?

(**A**) 23 (**B**) 22 (**C**) 21 (**D**) 20 (**E**) 19

13. Un nombre « double-singulier » est un entier positif de trois chiffres dont les deux premiers chiffres sont identiques et le troisième chiffre est différent des deux autres. Par exemple, 553 est un nombre double-singulier. Combien y a-t-il de nombres doubles-singuliers entre 100 et 1000?

(**A**) 81 (**B**) 18 (**C**) 72 (**D**) 64 (**E**) 90

14. On écrit les entiers de 1 à 2100, dans l'ordre, dans un tableau de 7 colonnes. Les 3 premières rangées du tableau sont indiquées. Le nombre 2002 est placé dans la colonne m, rangée n. La valeur de $m + n$ est :

	Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3	Colonne 4	Colonne 5	Colonne 6	Colonne 7
Rangée 1	1	2	3	4	5	6	7
Rangée 2	8	9	10	11	12	13	14
Rangée 3	15	16	17	18	19	20	21
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(**A**) 290 (**B**) 291 (**C**) 292 (**D**) 293 (**E**) 294

15. Dans une suite de nombres positifs, chaque terme, après les deux premiers, est la somme de *tous les termes précédents*. Si le premier terme est a, le deuxième terme est 2 et le sixième terme est 56, alors la valeur de a est :

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

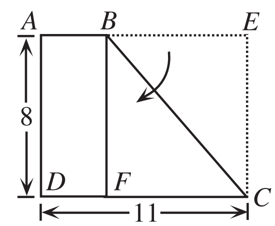
16. Si $ac+ad+bc+bd=68$ et $c+d=4$, quelle est la valeur de $a+b+c+d$?

(**A**) 17 (**B**) 85 (**C**) 4 (**D**) 21 (**E**) 64

17. L'âge moyen d'un groupe de 140 personnes est de 24 ans. L'âge moyen des hommes du groupe est de 21 ans et l'âge moyen des femmes du groupe est de 28 ans. Combien y a-t-il de femmes dans le groupe?

(**A**) 90 (**B**) 80 (**C**) 70 (**D**) 60 (**E**) 50

18. Une feuille de papier a la forme d'un rectangle $AECD$ et mesure 8 cm sur 11 cm. On replie la feuille de manière que le coin E coïncide avec le point F, situé sur DC, comme dans le diagramme. Le périmètre du trapèze $ABCD$ est plus près de :

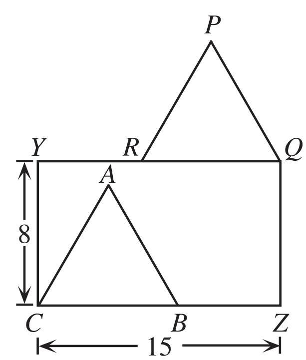


(**A**) 33,3 cm (**B**) 30,3 cm (**C**) 30,0 cm
(**D**) 41,3 cm (**E**) 35,6 cm

19. Si $2^a 3^b = 8\left(6^{10}\right)$, a et b étant des entiers, alors $b-a$ est égal à :

(**A**) 0 (**B**) 23 (**C**) -13 (**D**) -7 (**E**) -3

20. Dans le diagramme, $YQZC$ est un rectangle, $YC=8$ et $CZ=15$. Deux triangles équilatéraux, ABC et PQR, ayant chacun des côtés de longueur 9, sont placés comme il est indiqué, avec R sur le côté YQ et B sur le côté CZ. La longueur de AP est égale à :



(**A**) 10 (**B**) $\sqrt{117}$ (**C**) 9
(**D**) 8 (**E**) $\sqrt{72}$

Partie C : 8 points par question

21. Si $\sqrt{\frac{3}{1}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{5}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{2n+1}{2n-1}}=9$, alors la valeur de n est :

(**A**) 38 (**B**) 1 (**C**) 40 (**D**) 4 (**E**) 39

22. La fonction f est telle que $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$, pour tous les entiers strictement positifs x et y. Si $f(1)=4$, alors la valeur numérique de $f(8)$ est :

(**A**) 72 (**B**) 84 (**C**) 88 (**D**) 64 (**E**) 80

à suivre ...

23. On a écrit les entiers de 1 à 9 au tableau. Si on ajoute m autres 8 et k autres 9 au tableau, la moyenne de tous les nombres sera égale à 7,3. La valeur de $k+m$ est :

(**A**) 24 (**B**) 21 (**C**) 11 (**D**) 31 (**E**) 89

24. Une élève a deux contenants ouverts, de forme cylindrique. (Les parois des contenants sont minces et leur épaisseur est négligeable.) Le plus grand des contenants a une hauteur de 20 cm, un rayon de 6 cm et il contient de l'eau jusqu'à une profondeur de 17 cm. Le plus petit a une hauteur de 18 cm, un rayon de 5 cm et il est vide. Comme l'illustre la Figure 1, l'élève fait descendre le petit contenant dans le plus grand. Comme on peut le constater dans la Figure 2, lorsque le petit contenant descend dans le grand, l'eau se met à déborder vers l'extérieur, mais lorsque le petit contenant est baissé plus bas, l'eau se met à déborder dans le petit contenant. Lorsque le petit contenant reposera au fond du grand, la profondeur de l'eau dans le petit contenant sera à peu près égale à :

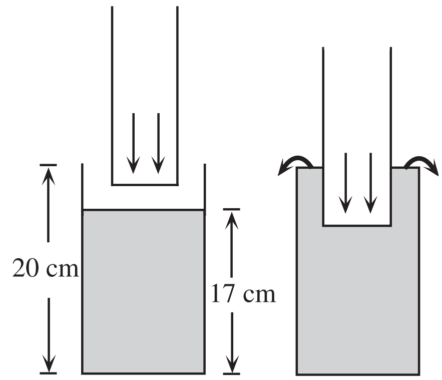


Figure 1 Figure 2

(**A**) 2,82 cm (**B**) 2,84 cm (**C**) 2,86 cm
(**D**) 2,88 cm (**E**) 2,90 cm

25. Les longueurs de chacune des six arêtes d'un tétraèdre sont des entiers. Cinq des longueurs d'arêtes sont 14, 20, 40, 52 et 70. Le nombre de longueurs possibles de la sixième arête est égal à :

(**A**) 9 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6