Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2002 Solutions

Concours Euclide

(12e année – Sec. V)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

1. a) *Solution 1* (À l'aide de la formule pour le milieu d'un segment)
Puisque *M* est le milieu du segment de droite qui joint *R* et *S*, alors l'abscisse de *M* est :

$$7=\frac{1+a}{2}$$
$$14=1+a$$
$$a=13$$

Solution 2 (À l'aide des pentes)
Puisque la pente de *RM* est égale à la pente de *MS*, alors :

$$\frac{3}{6}=\frac{3}{a-7}$$
$$a-7=6$$
$$a=13$$

Solution 3 (À l'aide des distances)
Puisque $RM=MS$, alors $RM^2=MS^2$, d'où :

$$6^2+3^2=(a-7)^2+3^2$$
$$0=a^2-14a+13$$
$$0=(a-13)(a-1)$$

Donc $a=13$ ou $a=1$. On rejette $a=1$, puisque le point $(1,10)$ n'est pas situé sur la droite.
Donc $a=13$. Réponse : $a=13$

b) Le triangle PQR a une base de 8 et une hauteur de $k-2$ (puisque $k>0$).
Puisque le triangle a une aire de 24 :

$$\frac{1}{2}(8)(k-2)=24$$
$$4k-8=24$$
$$4k=32$$
$$k=8$$

Réponse : $k=8$

c) On détermine d'abord le point d'intersection des droites définies par $y=2x+3$ et $y=8x+15$. Au point d'intersection, on a :

$$2x+3=8x+15$$
$$-12=6x$$
$$x=-2$$

On reporte $x=-2$ dans la première équation pour obtenir $y=2(-2)+3$, ou $y=-1$. Le point d'intersection est $(-2,-1)$. Puisque les trois droites sont concourantes, ce point vérifie l'équation de la troisième droite. Donc :

$$-1 = 5(-2) + b$$
$$b = 9$$

La valeur de b est 9.

2. a) *Solution 1*

Puisque $x = 4$ est une racine, alors $4^2 - 3(4) + c = 0$, d'où $c = -4$.
L'équation du second degré est $x^2 - 3x - 4 = 0$. On peut l'écrire sous forme $(x - 4)(x + 1) = 0$. (On remarque qu'il est facile de factoriser car on connaît une des racines au départ.) La deuxième racine est $x = -1$.

Solution 2

La somme des racines de l'équation $x^2 - 3x + c = 0$ est égale à $-\left(\frac{-3}{1}\right)$, ou 3. Puisqu'une des racines est égale à $x = 4$, l'autre doit être égale à $x = -1$.

Réponse : $x = -1$

b) *Solution 1*

Puisque les deux expressions sont identiques, elles doivent prendre les mêmes valeurs quelle que soit la valeur de x. Si on reporte $x = 2$, on obtient :

$$\frac{2\left(2^2\right)+1}{2^2 - 3} = 2 + \frac{A}{2^2 - 3}$$
$$9 = 2 + A$$
$$A = 7$$

Solution 2

On écrit la deuxième expression sous forme fractionnaire.

$$2 + \frac{A}{x^2 - 3} = \frac{2\left(x^2 - 3\right)}{x^2 - 3} + \frac{A}{x^2 - 3}$$
$$= \frac{2x^2 - 6 + A}{x^2 - 3}$$

On compare les deux expressions : $\frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3} = \frac{2x^2 - 6 + A}{x^2 - 3}$

Puisque les deux expressions sont identiques, les numérateurs doivent être identiques.
Donc $-6 + A = 1$, d'où $A = 7$.

Solution 3

On transforme la première expression :

$$\frac{2x^2+1}{x^2-3}=\frac{2x^2-6+7}{x^2-3}$$
$$=\frac{2\left(x^2-3\right)+7}{x^2-3}$$
$$=2+\frac{7}{x^2-3}$$

Donc $A=7$.

Réponse : $A=7$

c) *Solution 1*

On peut écrire l'équation de la parabole initiale sous la forme $y=\left(x-3\right)\left(x-1\right)$, ce qui indique que la parabole passe par les points $(3,0)$ et $(1,0)$.

Lorsqu'on fait subir à la parabole une translation de 5 unités vers la droite, ces points ont pour images respectives $(8,0)$ et $(6,0)$.

L'équation de l'image de la parabole est donc $y=(x-8)(x-6)$, ou $y=x^2-14x+48$.

Donc $d=48$.

Solution 2

On peut écrire l'équation de la parabole initiale sous la forme $y=\left(x-2\right)^2-1$, ce qui indique que le sommet de la parabole est le point $\left(2,-1\right)$. L'image de ce sommet par la translation est le point $\left(7,-1\right)$. Puisque ce point est sur l'image de la parabole, il en vérifie l'équation $y=x^2-14x+d$. Donc :

$$-1=7^2-14\left(7\right)+d$$
$$-1=49-98+d$$
$$d=48$$

[Voici une version plus facile de cette solution. Puisque $(7,-1)$ est le sommet de l'image, l'équation de l'image est $y=(x-7)^2-1$, ou $y=x^2-14x+48$. Donc $d=48$.]

Solution 3

Soit (X,Y) l'image du point (x,y) par la translation. Donc $(X,Y)=(x+5,y)$, ou $\left(x,y\right)=\left(X-5,Y\right)$. On reporte $\left(x,y\right)=\left(X-5,Y\right)$ dans l'équation de la parabole initiale pour obtenir :

$$Y=\left(X-5\right)^2-4\left(X-5\right)+3$$
$$=X^2-10X+25-4X+20+3$$
$$=X^2-14X+48$$

Cette équation définit une relation entre les coordonnées des points de l'image. On la compare à l'équation $y=x^2-14x+d$ pour obtenir $d=48$.

3. a) On écrit dans un tableau les valeurs possibles de a, b et c telles que $a = b + c$:

a	b	c
2	1	1
3	1	2
3	2	1
4	1	3
4	2	2
4	3	1

Il y a 6 résultats qui vérifient l'équation. La probabilité pour que l'enfant gagne un jouet est égale à $\frac{6}{64}$, ou $\frac{3}{32}$.

Réponse : $\frac{3}{32}$

b) Puisque le produit des trois entiers est égal à 216, alors :

$$a(ar)(ar^2) = 216$$
$$a^3r^3 = 216$$
$$(ar)^3 = 6^3$$
$$ar = 6$$

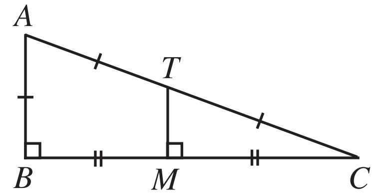
On sait que a est positif. Puisque la suite est croissante, $r > 1$. Donc $a < 6$.
On attribue à a les valeurs de 1 à 5. Dans chaque cas, on calcule la valeur de r, à partir de $ar = 6$, et celle de ar^2 qui doit être un entier.

a	r	ar	ar^2
1	6	6	36
2	3	6	18
3	2	6	12
4	$\frac{3}{2}$	6	9
5	$\frac{6}{5}$	6	$\frac{36}{5}$

Les suites qui vérifient les conditions sont :

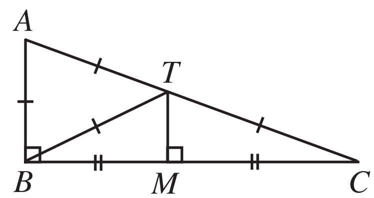
1, 6, 36;
2, 6, 18;
3, 6, 12;
4, 6, 9.

4. a) *Solution 1*



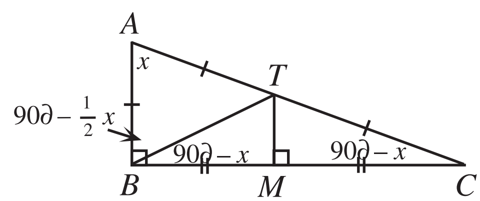
Puisque MT est la médiatrice de BC, alors $BM = MC$ et TM est perpendiculaire à BC.
Les triangles CMT et CBA sont semblables, puisqu'ils partagent un angle et qu'ils ont chacun un angle droit.
Puisque $\frac{CM}{CB} = \frac{1}{2}$, alors $\frac{CT}{CA} = \frac{CM}{CB} = \frac{1}{2}$, d'où $CT = AT = AB$.
Donc $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$, d'où $\sin(-ACB) = \frac{1}{2}$.
Donc $-ACB = 30^\circ$.

Solution 2



Puisque TM est parallèle à AB et que $CM = MB$, alors $CT = TA = AB$.
On joint le point T au point B.
Puisque $-ABC = 90^\circ$, alors AC est le diamètre d'un cercle de centre T et qui passe par les points A, C et B.
Donc $TA = TB = TC$ (ce sont des rayons), et le triangle ABT est donc équilatéral.
Donc $-BAC = 60^\circ$, d'où $-ACB = 30^\circ$.

Solution 3



On joint le point T au point B.
Soit $-BAC = x\partial$. Donc $-ACB = 90^\circ - x\partial$.
Comme dans la Solution 1 ou la Solution 2, le triangle ABT est isocèle. Donc $-ABT = 90^\circ - \frac{1}{2}x\partial$.
Puisque les triangles TBM et TCM sont congruents (ils sont rectangles et ont deux paires de côtés congrus), alors $-TBC = -ACB = 90^\circ - x\partial$.
On a :

$$-ABT + -TBC = 90\partial$$

$$\left(90 - \frac{1}{2}x\right) + (90 - x) = 90$$

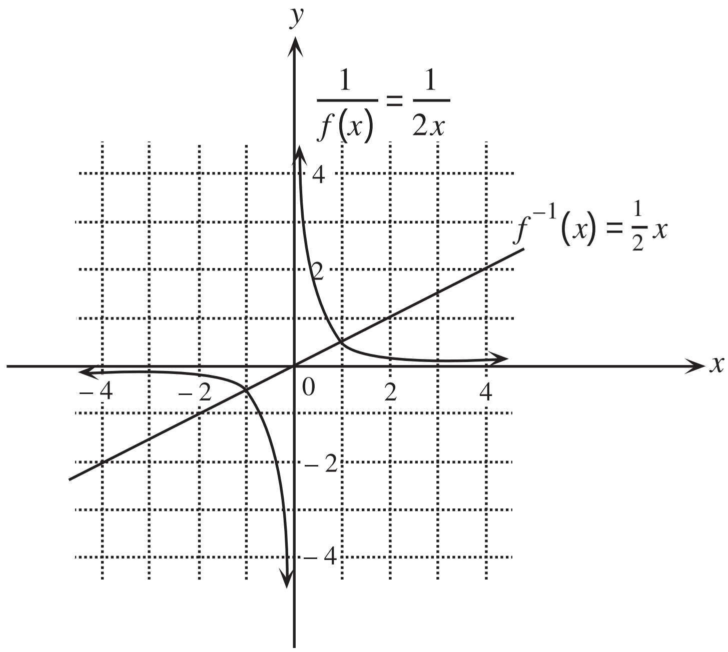
$$90 = \frac{3}{2}x$$

$$x = 60$$

Donc $-ACB = 30^\circ$.

Réponse : $-ACB = 30^\circ$

b) i



ii *Solution 1*

D'après les représentations graphiques, les points pour lesquels $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$ sont $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

Solution 2

On détermine d'abord les expressions qui définissent $f^{-1}(x)$ et $\frac{1}{f(x)}$.

Puisque f est définie par l'équation $y = 2x$, f^{-1} est définie par $x = 2y$, ou $y = \frac{1}{2}x$, ce qui donne $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$.

De plus, $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x}$.

Pour les points d'intersection, posons :

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2x}$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$

On reporte ces valeurs dans l'équation $y = \frac{1}{2}x$ pour obtenir les points $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

iii Puisque $f(x) = 2x$, alors $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Donc :

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)}\right) &= f^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) \\ &= f^{-1}(1) \\ &= \frac{1}{2}(1) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On a obtenu $f^{-1}(1)$ à partir de $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$ ou de la représentation graphique.

5. a) On a :

$$\begin{aligned} \log_5(x+3) + \log_5(x-1) &= 1 \\ \log_5((x+3)(x-1)) &= 1 \\ \log_5\left(x^2 + 2x - 3\right) &= 1 \\ x^2 + 2x - 3 &= 5 \\ x^2 + 2x - 8 &= 0 \\ (x+4)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $x = -4$ ou $x = 2$. On peut reporter ces valeurs dans l'équation initiale pour vérifier que $x = 2$ est une solution et que $x = -4$ est rejeté, puisque le logarithme d'un nombre négatif n'est pas défini.

Réponse : $x = 2$

b) i On reporte les valeurs du tableau dans l'équation pour obtenir :

$$2{,}75 = a(3{,}00)^b$$

$$3{,}75 = a(6{,}00)^b$$

On peut procéder de deux façons pour déterminer *b*.

Méthode 1 pour déterminer b

On divise la deuxième équation par la première, membre par membre.

$$\frac{3,75}{2,75}=\frac{a(6,00)^b}{a(3,00)^b}$$

$$\frac{3,75}{2,75}=\frac{(6,00)^b}{(3,00)^b}$$

$$\frac{3,75}{2,75}=\left(\frac{6,00}{3,00}\right)^b$$

$$\frac{3,75}{2,75}=2^b$$

$$2^b \approx 1,363636$$

Donc :

$$\log\left(2^b\right) \approx \log(1,363636)$$

$$b\log(2) \approx \log(1,363636)$$

$$b \approx \frac{\log(1,363636)}{\log(2)}$$

$$b \approx 0,4475$$

Méthode 2 pour déterminer b

On a :

$$2,75 = a(3,00)^b$$

$$\log(2,75)=\log\left(a(3,00)^b\right)$$

$$\log(2,75)=\log(a)+\log\left((3,00)^b\right)$$

$$\log(2,75)=\log(a)+b\log(3,00)$$

et

$$3,75 = a(6,00)^b$$

$$\log(3,75)=\log\left(a(6,00)^b\right)$$

$$\log(3,75)=\log(a)+\log\left((6,00)^b\right)$$

$$\log(3,75)=\log(a)+b\log(6,00)$$

On soustrait la première équation de la deuxième, membre par membre :

$$\log(3,75)-\log(2,75)=b\left(\log(6,00)-\log(3,00)\right)$$

$$b=\frac{\log(3,75)-\log(2,75)}{\log(6,00)-\log(3,00)}$$

$$b \approx 0,4475$$

Quelle que soit la méthode choisie, on reporte cette valeur dans la première équation :

$$2,75 \approx a(3,00)^{0,4475}$$

$$a \approx \frac{2,75}{(3,00)^{0,4475}}$$

$$a \approx 1,6820$$

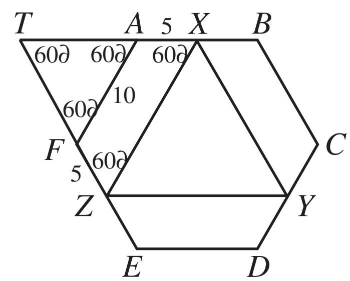
Au centième près, on a $a = 1,68$ et $b = 0,45$.

ii Pour déterminer le temps pour faire cuire une oie de 8,00 kg, on reporte $m = 8.00$ dans la formule :

$$\begin{aligned} t &= am^b \\ &\approx 1{,}68(8{,}00)^{0{,}45} \\ &\approx 4{,}2825 \end{aligned}$$

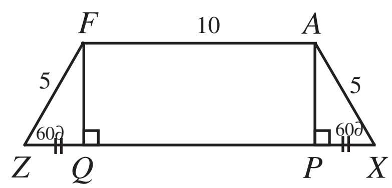
Il faudra faire cuire l'oie pendant environ 4,28 h.

6\. a) *Solution 1*



On prolonge XA et ZF jusqu'au point d'intersection T.
Par symétrie, $\angle AXZ = \angle FZX = 60^\circ$ et $\angle TAF = \angle TFA = 60^\circ$. Les triangles TAF et TXZ sont donc équilatéraux.
Puisque $AF = 10$, alors $TA = 10$. Donc $TX = 15$. Puisque $XZ = TX$, alors $XZ = 15$.

Solution 2



On considère le quadrilatère $AXZF$.
Puisque $ABCDEF$ est un hexagone régulier, $\angle FAX = \angle AFZ = 120^\circ$.
On a $AF = 10$. Puisque X et Z sont les milieux de côtés de l'hexagone, alors $AX = FZ = 5$.
Par symétrie, $\angle AXZ = \angle FZX = 60^\circ$ et $AXZF$ est donc un trapèze.
On abaisse aux points A et F des perpendiculaires AP et FQ au côté XZ.
Par symétrie, $PX = QZ$. Donc :

$$\begin{aligned} PX &= AX \cos 60^\circ \\ &= 5\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Puisque $APQF$ est un rectangle, $PQ = 10$. Donc :

$$\begin{aligned} XZ &= XP + PQ + QZ \\ &= \frac{5}{2} + 10 + \frac{5}{2} \\ &= 15 \end{aligned}$$

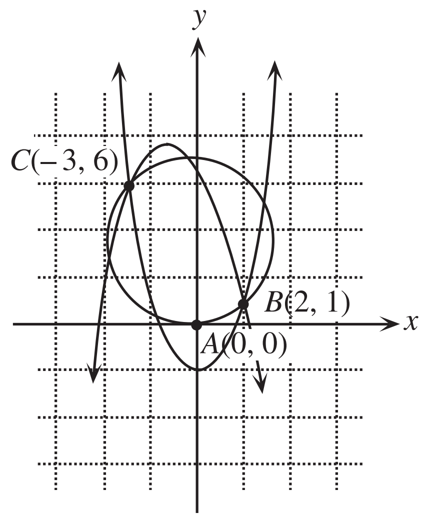
Réponse : $XZ = 15$

b) On détermine d'abord les coordonnées des trois points par lesquels passe le cercle.
Le premier point est l'origine, $(0, 0)$.

Les deux autres points sont les points d'intersection des paraboles définies par $y = x^2 - 3$ et $y = -x^2 - 2x + 9$. Aux points d'intersection, on a :

$$\begin{aligned} x^2 - 3 &= -x^2 - 2x + 9 \\ 2x^2 + 2x - 12 &= 0 \\ x^2 + x - 6 &= 0 \\ (x+3)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

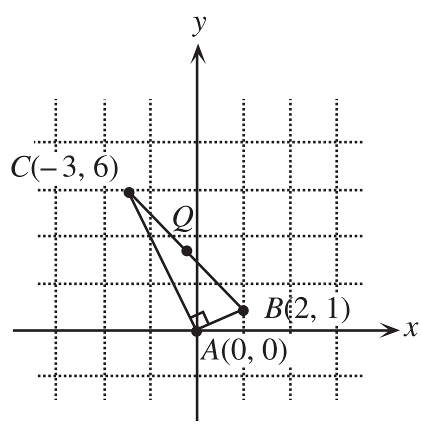
Donc $x = -3$ ou $x = 2$.
On reporte ces valeurs dans une des équations.
Si $x = 2$, on a $y = 2^2 - 3$, ou $y = 1$. Si $x = -3$, on a $y = (-3)^2 - 3$, ou $y = 6$. Les points d'intersection sont $(2, 1)$ et $(-3, 6)$.
Le cercle passe donc par les points $A(0, 0)$, $B(2, 1)$ et $C(-3, 6)$.
Soit $Q(a, b)$ le centre du cercle.



Il y a plusieurs façons de déterminer les coordonnées du centre du cercle.

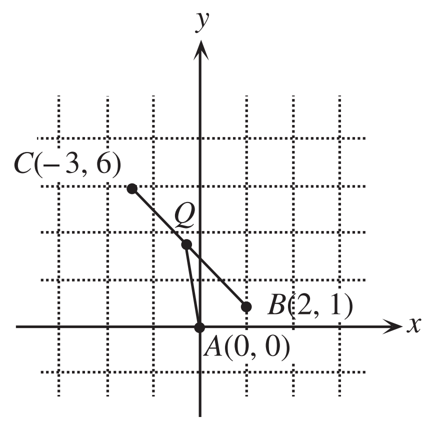
Méthode 1 $(\angle CAB = 90^\circ)$

On remarque que le segment AB a une pente de $\frac{1}{2}$ et que le segment AC a une pente de -2. Puisque le produit de ces pentes est égal à -1, les segments sont perpendiculaires. Donc $\angle BAC = 90^\circ$.
Puisque BC est une corde du cercle et qu'au point A, sur le cercle, l'angle BAC mesure 90°, alors BC est un diamètre du cercle. Le centre du cercle est donc le milieu du diamètre BC, c'est-à-dire le point $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$.



Méthode 2 (Rayons congrus)

Puisque Q est équidistant des points A, B et C, alors $QA^2 = QB^2 = QC^2$, ou
$a^2 + b^2 = (a - 2)^2 + (b - 1)^2 = (a + 3)^2 + (b - 6)^2$.



D'après la première équation, on a :

$$a^2 + b^2 = (a - 2)^2 + (b - 1)^2$$
$$4a + 2b = 5 \quad (1)$$

D'après la deuxième équation, on a :

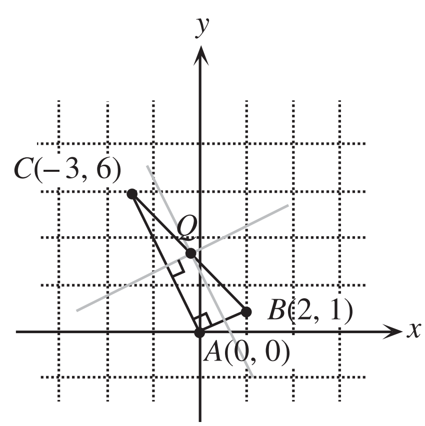
$$(a - 2)^2 + (b - 1)^2 = (a + 3)^2 + (b - 6)^2$$
$$-10a + 10b = 40$$
$$b = a + 4 \quad (2)$$

Puisque Q vérifie les équations (1) et (2), on reporte $b = a + 4$ dans l'équation (1) pour obtenir $4a + 2(a + 4) = 5$, d'où $6a = -3$, ou $a = -\frac{1}{2}$. Donc $b = -\frac{1}{2} + 4$, ou $b = \frac{7}{2}$.

Le centre du cercle est le point $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

Méthode 3 (Médiatrices)

On détermine les équations des médiatrices des cordes AB et AC du cercle. Le centre est le point d'intersection de ces droites..



Puisque AB a une pente de $\frac{1}{2}$, sa médiatrice a une pente de -2. Puisque le milieu de AB a pour coordonnées $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, l'équation de la médiatrice est $y - \frac{1}{2} = -2(x - 1)$, ou $y = -2x + \frac{5}{2}$.

Puisque AC a une pente de -2, sa médiatrice a une pente de $\frac{1}{2}$.

Puisque le milieu de AB a pour coordonnées $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$, l'équation de la médiatrice est $y - 3 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)$, ou $y = \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}$.

Au point d'intersection de ces médiatrices, on a :

$$-2x+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}x+\frac{15}{4}$$
$$-\frac{5}{4}=\frac{5}{2}x$$
$$x=-\frac{1}{2}$$

Donc $y=-2\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}$, ou $y=\frac{7}{2}$ et les coordonnées du centre sont $\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$.

7. a) *Solution 1*

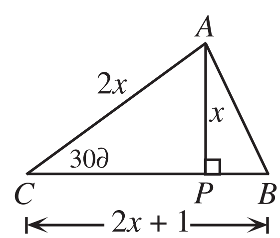
On utilise une formule bien connue pour l'aire d'un triangle : $A=\frac{1}{2}ab\sin C$

$$18=\frac{1}{2}(2x+1)(2x)\sin 30^\circ$$
$$36=(2x+1)(2x)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$0=2x^2+x-36$$
$$0=(2x+9)(x-4)$$

Donc $x=4$ ou $x=-\frac{9}{2}$. Puisque x doit être positif, alors $x=4$.

Solution 2

On trace la hauteur AP. Dans le triangle APC, on a :



$$AP=AC\sin 30^\circ$$
$$=2x\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=x$$

Aire du triangle $ABC=\frac{1}{2}(BC)(AP)$

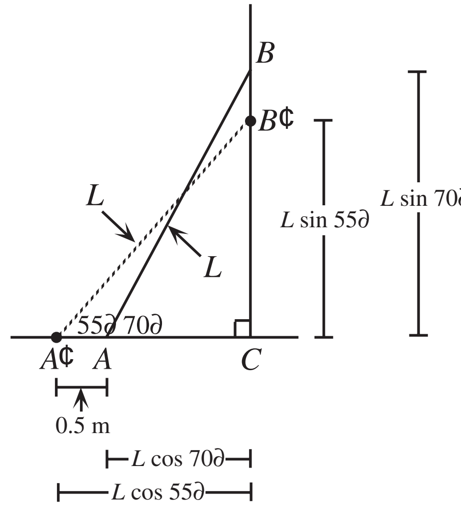
$$18=\frac{1}{2}(2x+1)(x)$$
$$0=2x^2+x-36$$
$$0=(2x+9)(x-4)$$

Donc $x=4$ ou $x=-\frac{9}{2}$. Puisque x doit être positif, alors $x=4$.

Réponse : $x=4$

b) Soit L la longueur de l'échelle.
Donc $AC = L\cos 70^\circ$ et $BC = L\sin 70^\circ$.
De même, $A'C = L\cos 55^\circ$ et $B'C = L\sin 55^\circ$.
Puisque $A'A = 0{,}5$, alors :
$0{,}5 = L\cos 55^\circ - L\cos 70^\circ$

$$L = \frac{0{,}5}{\cos 55^\circ - \cos 70^\circ} \qquad (*)$$



Donc :

$$\begin{aligned} BB' &= BC - B'C \\ &= L\sin 70^\circ - L\sin 55^\circ \\ &= L(\sin 70^\circ - \sin 55^\circ) \\ &= \frac{(0{,}5)(\sin 70^\circ - \sin 55^\circ)}{(\cos 55^\circ - \cos 70^\circ)} \qquad \text{(à cause de (*))} \\ &\approx 0{,}2603 \text{ m} \end{aligned}$$

Au centimètre près, l'autre extrémité de l'échelle parcourt une distance de 26 cm le long du mur.

8. a) *Solution 1*

Le nombre total de parties est égal à $\frac{1}{2} \times 5 \times 20$, ou 50. En effet, chacune des 5 équipes joue 20 parties et si on calcule 5×20, on compte chaque partie deux fois.
À chaque partie, il y a une défaite ou un match nul.
D'après la colonne des défaites, le nombre de défaites est égal à $44 + y$. D'après la dernière colonne, le nombre de matchs nuls est égal à $\frac{1}{2}(11 + z)$, puisqu'à chaque match nul, on attribue le match nul à deux équipes. Donc :

$$\begin{aligned} 50 &= 44 + y + \tfrac{1}{2}(11 + z) \\ 100 &= 88 + 2y + 11 + z \\ 1 &= 2y + z \end{aligned}$$

Puisque y et z ne peuvent être négatifs, on a $z = 1$ et $y = 0$. Donc $x = 19$, puisque l'équipe E joue 20 parties.

Solution 2

Dans n'importe quelle partie, on attribue un match nul à chaque équipe ou une victoire à une équipe et une défaite à l'autre. Donc :

$$\begin{aligned} 25 + x &= 44 + y \\ x - y &= 19 \qquad (1) \end{aligned}$$

Puisque l'équipe E a joué 20 parties, alors :

$$x + y + z = 20 \qquad (2)$$

D'après l'équation (1), x doit être supérieur ou égal à 19. D'après l'équation (2), x doit être inférieur ou égal à 20.
De plus, on sait que le nombre total de matchs nuls attribués est pair. Donc $11 + z$ est pair et z est donc impair.
Puisque x est supérieur ou égal à 19, alors selon l'équation (2), z doit être inférieur ou égal à 1.
Donc $z = 1$. Donc $x = 19$ et $y = 0$.

Solution 3
Dans n'importe quelle partie, on attribue un match nul à chaque équipe ou une victoire à une équipe et une défaite à l'autre. Donc :

$$25 + x = 44 + y$$

$$x - y = 19 \qquad (1)$$

Puisque l'équipe E a joué 20 parties, alors :

$$x + y + z = 20 \qquad (2)$$

D'après l'équation (1), x doit être supérieur ou égal à 19. D'après l'équation (2), x doit être inférieur ou égal à 20.
Supposons que $x = 20$. D'après l'équation (2), $y = z = 0$, ce qui contredit l'équation (1).
On doit donc avoir $x = 19$. D'après l'équation (1), $y = 0$. D'après l'équation (2), $z = 1$.
(Ces trois valeurs vérifient les équations (1) et (2).)

b) *Solution 1*
Supposons qu'une telle suite existe : a, b, c, d. (Preuve par contradiction)
Puisque la somme de n'importe quels deux termes consécutifs est positive, on a $a + b > 0$, $b + c > 0$ et $c + d > 0$. On additionne ces inégalités, membre par membre, pour obtenir $(a+b)+(b+c)+(c+d) > 0$, ou $a + 2b + 2c + d > 0$.
Or puisque la somme de n'importe quels trois termes consécutifs est négative, on a $a + b + c < 0$ et $b + c + d < 0$. On additionne ces inégalités, membre par membre, pour obtenir $(a+b+c)+(b+c+d) < 0$, ou $a + 2b + 2c + d < 0$.
On a une contradiction, puisque les deux conditions, $a + 2b + 2c + d > 0$ et $a + 2b + 2c + d < 0$, ne peuvent pas être vérifiées toutes les deux.
La supposition initiale doit donc être fausse. Il est donc impossible de créer une telle suite.

Solution 2
Supposons qu'une telle suite existe : a, b, c, d. (Preuve par contradiction)
On considère deux cas.

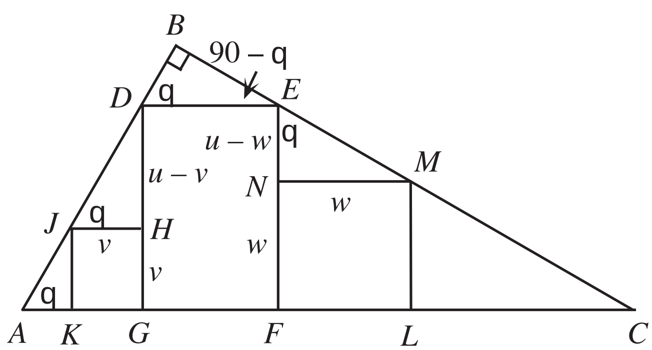
1[er] cas : $a \le 0$

Dans ce cas, on a $b > 0$, puisque $a + b > 0$.
Puisque $a + b + c < 0$, il faut donc que $c < 0$.
Puisque $c + d > 0$, alors $d > 0$.
Puisque $b > 0$ et $c + d > 0$, alors $b + c + d > 0$.
Or selon la définition de la suite, on doit avoir $b + c + d < 0$, ce qui est une contradiction.
Donc aucune telle suite n'existe si $a \le 0$.

2[e] cas : $a > 0$

Dans ce cas, on ne sait pas si b est positif ou négatif. Cependant, puisque $a + b > 0$ et $a + b + c < 0$, alors $c < 0$.
Puisque $c < 0$, $b + c > 0$ et $c + d > 0$, alors $b > 0$ et $d > 0$.
Puisque $c + d > 0$ et $b > 0$, alors $b + c + d > 0$.
On a de nouveau une contradiction.
Donc aucune telle suite n'existe si $a > 0$.

9. a) Soit $\angle BAC = \theta$. À cause des segments parallèles, on a $\angle DJH = \angle BDE = \theta$.
Donc $\angle BED = 90^\circ - \theta$, d'où $\angle NEM = \theta$, car $\angle DEF = 90^\circ$.
Puisque $DG = u$ et $HG = v$, alors $DH = u - v$.
De même, $EN = u - w$.



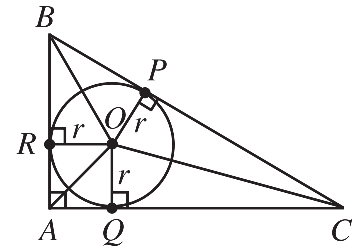
Dans les triangles DHJ et MNE, on a $\tan\theta = \dfrac{u - v}{v}$ et $\tan\theta = \dfrac{w}{u - w}$. Donc :

$$\frac{u - v}{v} = \frac{w}{u - w}$$
$$(u - v)(u - w) = vw$$
$$u^2 - uv - uw + vw = vw$$
$$u(u - v - w) = 0$$

Puisque $u \ne 0$, alors $u - v - w = 0$, ou $u = v + w$.
[Remarque : Si $u = 0$, la hauteur du rectangle *DEFG* est nulle, c'est-à-dire que les points *D* et *A* coïncident, de même que les points *E* et *C*. On a alors $v = w = 0$, c'est-à-dire qu'il n'y a alors plus de carrés.]

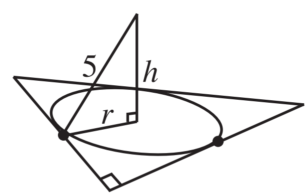
b) On considère la section de la sphère par le plan qui contient le triangle. Cette section est un cercle. Ce cercle est tangent aux trois côtés du triangle. Il est donc le cercle inscrit dans le triangle. Soit *O* le centre du cercle et *r* son rayon. On cherche à déterminer la valeur de *r*.

On joint le point O aux trois points de tangence, P, Q et R, ainsi qu'aux trois sommets A, B et C. Les rayons OP, OQ et OR sont perpendiculaires aux côtés du triangle. On considère les triangles AOB, BOC et COA. Ces triangles ont des bases respectives de 15, 9 et 12 et une hauteur r. Puisque l'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des triangles AOB, BOC et COA, alors :



$$\frac{1}{2}(9)(12) = \frac{1}{2}(9)(r) + \frac{1}{2}(12)(r) + \frac{1}{2}(15)(r)$$
$$54 = \frac{1}{2}r(9 + 12 + 15)$$
$$r = 3$$

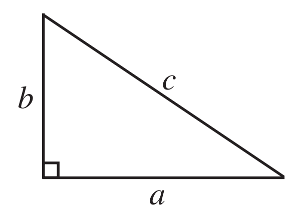
On joint le centre du cercle à celui de la sphère. Soit h la distance entre les deux centres. Le segment qui joint les centres est perpendiculaire au plan formé par le triangle. On a donc un triangle rectangle formé par les deux centres et n'importe quel point sur le cercle. D'après la relation de Pythagore :



$$h^2 + 3^2 = 5^2$$
$$h = 4$$

Le haut de la sphère est donc à une distance de 9 unités du plan formé par le triangle.

10. a) On considère un triangle de Pythagore dont les longueurs des côtés sont des entiers a, b et c qui vérifient $a^2 + b^2 = c^2$. Pour démontrer qu'il s'agit aussi d'un triangle de Héron, il suffit de démontrer que l'aire est un entier. Puisque celle-ci est égale à $\frac{1}{2}ab$, il suffit de démontrer que a ou b est un entier pair.



Supposons que a et b sont impairs. (Preuve par contradiction)
Puisque a^2 et b^2 sont impairs et que $a^2 + b^2 = c^2$, alors c^2 doit être pair.
Soit $a = 2k + 1$, $b = 2l + 1$ et $c = 2m$. Donc :

$$(2k + 1)^2 + (2l + 1)^2 = (2m)^2$$
$$4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 + 4l + 1 = 4m^2$$
$$4\left(k^2 + k + l^2 + l\right) + 2 = 4\left(m^2\right)$$

On remarque que le membre de droite est un multiple de 4, tandis que le membre de gauche ne l'est pas. On a donc une contradiction.
Donc a ou b doit être pair et l'aire du triangle est donc un entier.
Donc chaque triangle de Pythagore est aussi un triangle de Héron.

b) On examine les premiers triplets pythagoriciens et on remarque une régularité :

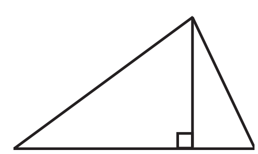
3	4	5	On a $3^2 = 4 + 5$.
5	12	13	On a $5^2 = 12 + 13$.
6	8	10	Ne suit pas la régularité.
7	24	25	On a $7^2 = 24 + 25$.

Il semble que l'on puisse former un triplet pythagoricien avec n'importe quel nombre impair supérieur à 1 comme longueur du plus petit côté.
On remarque aussi que les longueurs des deux autres côtés sont des entiers consécutifs dont la somme est égale au carré de la longueur du premier côté.
Cette régularité se poursuit-elle pour les autres nombres impairs?
Posons $a = 2k + 1$, $k \, \Delta 1$. (Cette formule génère tous les entiers impairs a supérieurs à 1.)
Est-il toujours possible de déterminer une valeur de b de manière que $c = b + 1$ et $a^2 + b^2 = c^2$?
On considère l'équation :

$$(2k+1)^2 + b^2 = (b+1)^2$$
$$4k^2 + 4k + 1 + b^2 = b^2 + 2b + 1$$
$$4k^2 + 4k = 2b$$
$$b = 2k^2 + 2k$$

Il est donc possible de déterminer une valeur de b pour que l'équation soit vérifiée.
Chaque entier impair a supérieur à 1 peut être la longueur d'un côté d'un triangle de Pythagore. Il suffit de définir $a = 2k + 1$, $b = 2k^2 + 2k$ et $c = 2k^2 + 2k + 1$. (On peut vérifier que ces nombres vérifient la relation $a^2 + b^2 = c^2$!)

c) On formera un triangle en joignant deux triangles de Pythagore le long d'un côté de même longueur. Puisque chaque triangle de Pythagore est aussi un triangle de Héron, le nouveau triangle aura des côtés de longueurs entières et une aire qui est un entier. Il sera donc un triangle de Héron. On fait de nouveau une liste de triplets pythagoriciens.



3	4	5
5	12	13
6	8	10
7	24	25
8	15	17

9	40	41
10	24	26
11	60	61

On sait que si on multiplie les longueurs des côtés de n'importe quel triangle de Pythagore par un même entier positif, on obtient un autre triangle de Pythagore. Ceci nous permettra de créer deux triangles de Pythagore ayant une longueur de côté commune.

Si on joint deux triangles de Pythagore le long d'un côté de longueur commune, l'hypoténuse de chaque triangle devient un côté du nouveau triangle. Puisqu'aucune longueur de côté du nouveau triangle ne peut être divisible par 3, 5, 7 ou 11, on ne peut utiliser les triangles 3-4-5, 6-8-10 ou 7-24-25 de la liste ci-dessus.

On multipliera les longueurs des côtés du triangle 8-15-17 par 4, pour obtenir un triangle 32-60-68 que l'on joindra au triangle 11-60-61 comme l'illustre le diagramme suivant.

On obtient un triangle 43-61-68 dont l'aire est un entier, car sa hauteur est un nombre pair.

Le triangle 43-61-68 est donc un triangle de Héron.

[On remarquera qu'il s'agit du seul triangle de Héron qui vérifie la condition.]