Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide (12e – Sec. V)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

Le mardi 16 avril 2002

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche
Comptables agréés

Avec la participation de :

Institut canadien des actuaires

London Life, compagnie d'assurance-vie et La Great-West, compagnie d'assurance-vie

Sybase Inc. (Waterloo)

*i*Anywhere Solutions

Avec l'appui de :

Financière Manuvie

L'Équitable, Compagnie d'Assurance-Vie du Canada

Durée : 2 heures et demie

L'utilisation de la calculatrice **est permise**, pourvu que celle-ci ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

N'ouvrez pas ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions valant 10 points chacune. Les parties de chaque question peuvent être de deux types. Les parties à **RÉPONSE COURTE** valent 2 points chacune (questions 1 à 2) ou 3 points chacune (questions 3 à 7). Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points pour la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES :

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci: .
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse**. Le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera accordée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT :

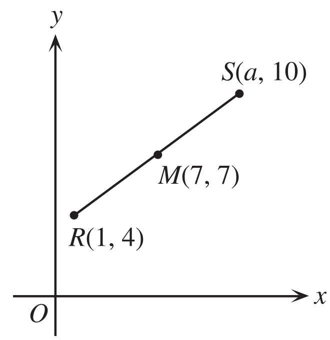
1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci: .
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse**. Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse.
3. Des points sont accordés pour de solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

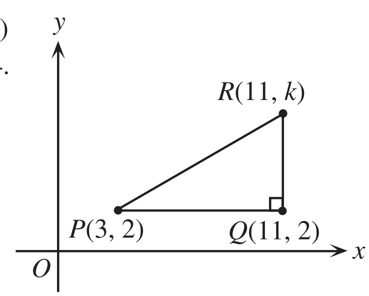
REMARQUES :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Une partie des points peut être accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. Sauf indication contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de valeurs exactes, telles que 4π, $2+\sqrt{7}$, etc.

1. a) Si $M(7,7)$ est le milieu du segment de droite qui joint les points $R(1,4)$ et $S(a,10)$, quelle est la valeur de a?



b) Dans le diagramme, les points $P(3,2)$, $Q(11,2)$ et $R(11,k)$ ($k>0$) forment un triangle dont l'aire est égale à 24. Quelle est la valeur de k?



c) Des droites sont *concourantes* si elles se coupent toutes en un même point. Les droites définies par $y=2x+3$, $y=8x+15$ et $y=5x+b$ sont concourantes. Déterminer la valeur de b.

2. a) Une des racines de l'équation $x^2-3x+c=0$ est $x=4$. Quelle est la deuxième racine?

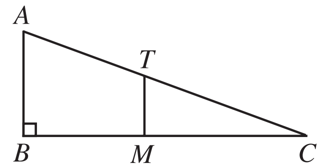
b) Il est possible d'écrire l'expression rationnelle $\dfrac{2x^2+1}{x^2-3}$ sous la forme $2+\dfrac{A}{x^2-3}$, A étant un entier. Quelle est la valeur de A?

c) On fait subir à la parabole d'équation $y=x^2-4x+3$ une translation de 5 unités vers la droite. L'équation de l'image est $y=x^2-14x+d$. Déterminer la valeur de d.

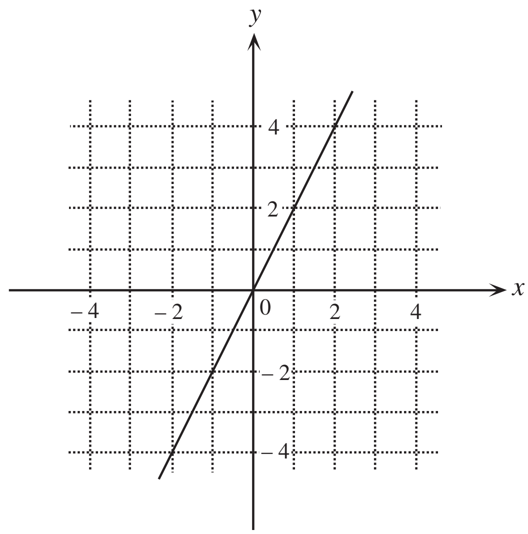
3. a) Trois boîtes, étiquetées A, B et C, contiennent chacune quatre boules numérotées 1, 2, 3 et 4. Dans chaque boîte, les boules sont mélangées. Un enfant choisit, au hasard, une boule de chaque boîte. Soit a, b et c les numéros des boules choisies dans les boîtes respectives A, B et C. L'enfant gagne un jouet si $a=b+c$. Il y a 64 façons de choisir les trois boules. Quelle est la probabilité pour que l'enfant gagne un jouet?

b) Trois entiers strictement positifs, a, ar et ar^2, forment une suite croissante. Si le produit des trois entiers de la suite est égal à 216, déterminer toutes les suites qui vérifient ces conditions.

4. a) Le triangle ABC est rectangle en B. MT est la médiatrice de BC, M étant sur BC et T sur AC. Si $AT = AB$, quelle est la mesure de l'angle ACB?



b) Le diagramme ci-dessous est la représentation graphique de $y = f(x)$, où $f(x) = 2x$.



i Dans le quadrillage du cahier-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction réciproque définie par $y = f^{-1}(x)$ et celle de la fonction inverse définie par $y = \dfrac{1}{f(x)}$. Étiqueter chaque graphique pour les distinguer.

ii Indiquer les coordonnées des points où $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

iii Déterminer la valeur numérique de $f^{-1}\left(\dfrac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)}\right)$.

5. a) Résoudre l'équation :

$$\log_5(x+3) + \log_5(x-1) = 1$$

b) Un chef sur un bateau de croisière veut faire cuire une oie. Le temps t, en heures, qu'il faut pour faire cuire une oie à la température de 180 °C varie en fonction de la masse m, en kilogrammes, selon la formule

$$t = am^b,$$

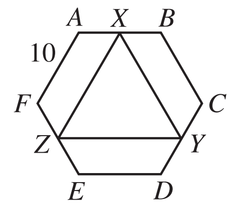
a et b étant des constantes. Le tableau ci-dessous indique les temps observés pour faire cuire des oies à la température de 180 °C.

Masse, m (kg)	Temps, t (h)
3,00	2,75
6,00	3,75

i Utiliser les données du tableau pour déterminer les valeurs de a et de b au centième près.

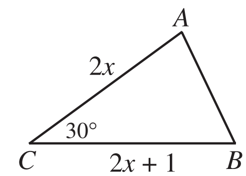
ii Le chef veut faire cuire une oie de 8,00 kg à 180 °C. Combien de temps va-t-il la faire cuire?

6. a) Le diagramme illustre un hexagone régulier $ABCDEF$ ayant des côtés de longueur 10. Soit X, Y et Z les milieux respectifs des côtés AB, CD et EF. Quelle est la longueur de XZ?

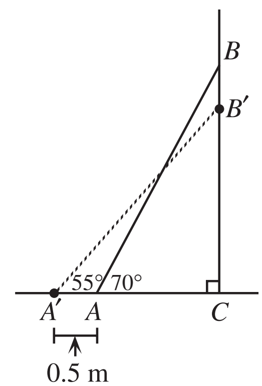


b) Un cercle passe par l'origine et par les points d'intersection des paraboles définies par $y = x^2 - 3$ et par $y = -x^2 - 2x + 9$. Déterminer les coordonnées du centre de ce cercle.

7. a) Dans le diagramme, on a $AC = 2x$, $BC = 2x + 1$ et $\angle ACB = 30°$. Si l'aire du triangle ABC est égale à 18, quelle est la valeur de x?



b) On a placé une échelle, AB, de manière que son pied repose sur terre et que l'autre extrémité soit appuyée contre un mur, comme dans le diagramme. Dans cette position initiale, l'échelle fait un angle de $70°$ avec l'horizontale. Ensuite, le pied de l'échelle est éloigné du mur sur une distance de 0,5 m, ce qui place l'échelle dans la position $A'B'$. Dans cette nouvelle position, l'échelle fait un angle de $55°$ avec l'horizontale. Calculer la distance parcourue par l'autre extrémité de l'échelle le long du mur, c'est-à-dire la distance BB'.

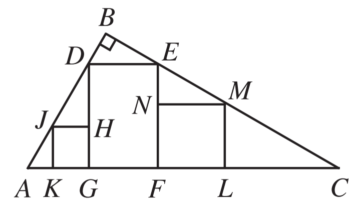


8. a) Dans une ligue de soccer composée de 5 équipes, chaque équipe joue 20 parties, soit 5 parties contre chacune des 4 autres équipes. À chaque partie, chaque équipe peut obtenir une victoire (V), une défaite (D) ou un match nul (N). Le tableau ci-dessous indique le nombre de victoires, de défaites et de matchs nuls pour chaque équipe à la fin de la saison. Déterminer les valeurs de x, de y et de z.

Équipe	V	D	N
A	2	15	3
B	7	9	4
C	6	12	2
D	10	8	2
E	x	y	z

b) Démontrer qu'il est impossible de créer une suite de 4 nombres, a, b, c et d, de manière que la somme de n'importe quels deux termes consécutifs est positive et la somme de n'importe quels trois termes consécutifs est négative.

9. a) Dans le triangle ABC, $\angle ABC = 90°$. Le rectangle $DEFG$ est inscrit dans le triangle ABC, comme l'illustre le diagramme. Les carrés $JKGH$ et $MLFN$ sont inscrits dans les triangles respectifs AGD et CFE. Soit v la longueur des côtés de $JHGK$ et w la longueur des côtés de $MLFN$. Si $DG = u$, démontrer que $u = v + w$.



b) Trois tiges de métal minces, de longueurs 9, 12 et 15, sont soudées pour former un triangle rectangle que l'on place en position horizontale. Une sphère de rayon 5 est placée de manière à reposer dans le triangle. Elle est alors tangente à chacun des côtés. Si on néglige l'épaisseur des tiges, quelle est la hauteur du haut de la sphère par rapport au plan du triangle?

10. Un triangle est appelé *triangle de Héron* si chacune des longueurs de ses côtés est un entier et si son aire est aussi un entier. Un triangle est appelé *triangle de Pythagore* s'il est rectangle et si chacune des longueurs de ses côtés est un entier.

a) Démontrer que chaque triangle de Pythagore est aussi un triangle de Héron.

b) Démontrer que chaque entier impair supérieur à 1 peut être la longueur d'un côté d'un triangle de Pythagore.

c) Trouver un triangle de Héron ayant des côtés de longueurs différentes de manière qu'aucune de ces longueurs ne soit divisible par 3, 5, 7 ou 11.

PUBLICATIONS

Les copies des concours précédents et leurs solutions sont disponibles dans une grande variété de trousses, définies ci-dessous. Veuillez donner votre commande en indiquant le numéro de trousse. Il est important de noter que ce numéro correspond au concours et au nombre de copies comprises.

COPIES DES CONCOURS PRÉCÉDENTS (AVEC SOLUTIONS COMPLÈTES)

Il est possible de se procurer des exemplaires des concours précédents et de leurs solutions aux conditions mentionnées plus bas. Chaque article contient deux numéros. Les numéros débutant par E désignent des documents en langue anglaise alors que ceux qui débutent par F désignent des documents en langue française. Chaque paquet est considéré comme un titre.

(Pour obtenir des copies des concours des éditions 1999 - 2001 (ainsi que des solutions aux problèmes),veuillez consulter notre site Internet à l'adresse suivante : http://www.cemc.uwaterloo.ca).

Un exemplaire de l'un des concours, accompagné des solutions, pour les concours des années 1998, 1999 et 2000. Recommandée pour la préparation à titre individuel.

E 213, F 213	Concours Gauss (7^{e} et 8^{e} années)	10,00 $
E 513, F 513	Concours Pascal-Cayley-Fermat (9^{e}, 10^{e} et 11^{e} années)	14,00 $
E 613, F 613	Concours Euclide (12^{e} année)	10,00 $
E 713, F 713	Concours Descartes (13^{e}-CPO)	10,00 $

LIVRES «PROBLEMS PROBLEMS PROBLEMS»

Chaque volume est une ensemble de problèmes à choix multiple ou à solution complète. Les problèmes sont regroupés selon les sujets, avec 9 sujets ou plus par volume. Les problèmes sont choisis à partir des concours des années précédentes offerts par le Concours canadien de mathématiques et des solutions complètes sont fournies pour chaque problème. Chaque volume coûte 15,00 $. **Le Volume 1 est disponible en français et en anglais. Les Volumes 2-6 sont disponibles en anglais seulement.**

Volume 1
- **(Disponible en français)**
- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets
- pour les élèves de 9^{e}, 10^{e} et 11^{e} année (Sec. III, IV et V)

Volume 2
- plus de 325 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets (différents de ceux du volume 1)
- pour les élèves de 9^{e}, 10^{e} et 11^{e} année (Sec. III, IV et V)

Volume 3
- plus de 235 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)

Volume 4
- plus de 325 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves de 7^{e}, 8^{e} et 9^{e} année (Sec. I, II et III)

Volume 5
- plus de 200 problèmes avec solutions complètes
- 9 sujets (différents de ceux du volume 3)
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)

Volume 6
- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 11 sujets (différents de ceux du vol. 4)
- pour les élèves de 7^{e}, 8^{e} et 9^{e} année (Sec. I, II et III)

LES PROBLÈMES ET LEURS SOLUTIONS - VOLUME 2

Ce nouveau livre fait suite à la collection de problèmes offerte aux étudiants de niveau avancé. Chacun des neuf chapitres comprend un examen des solutions et des démarches suggérées. Il compte plus de 160 nouveaux problèmes, presque tous étant tirés de concours canadiens de mathématiques, accompagnés de solutions complètes. Le prix est de 20 $.

Faire passer les commandes au : Concours canadien de mathématiques
Faculté de mathématiques, pièce MC 5181
Université de Waterloo
Waterloo (Ontario) N2L 3G1

Veuillez inscrire votre nom, votre adresse (et votre code postal) ainsi que votre numéro de téléphone. Nous n'acceptons pas les commandes dont le montant est inférieur à 10 $.

Établir les chèques ou les mandats à l'ordre du «Centre for Education in Mathematics and Computing». Pour les commandes effectuées au Canada, veuillez ajouter 3 $ pour le premier article afin d'acquitter les frais de port et de manutention et 1 $ pour chaque article additionnel. Aucune taxe de vente provinciale ne s'applique, mais il faut ajouter la TPS de 7 p. 100. Pour les commandes ***de l'extérieur du Canada SEULEMENT***, veuillez ajouter 10 $ pour le premier article afin d'acquitter les frais de port et de manutention et 2 $ pour chaque article additionnel. **Les prix de ces publications demeureront en vigueur jusqu'en 1 septembre 2002.**