Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2002 Solutions
Concours Cayley (10e - Sec. IV)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

1. On développe et on simplifie :
$$5x+2(4+x)=5x+(8+2x)$$
$$=7x+8$$
Réponse : (C)

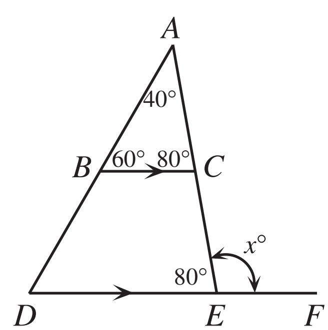
2. On a :
$$(2+3)^2-\left(2^2+3^2\right)=5^2-(4+9)$$
$$=25-13$$
$$=12$$
Réponse : (A)

3. Si $x=-3$, alors :
$$x^2-4(x-5)=(-3)^2-4(-3-5)$$
$$=9-4(-8)$$
$$=41$$
Réponse : (D)

4. Puisque $n=\frac{5}{6}(240)$, alors :
$$\frac{2}{5}n=\frac{2}{5}\left(\frac{5}{6}\right)(240)$$
$$=\frac{1}{3}(240)$$
$$=80$$
Réponse : (B)

5. À l'aide des lois des exposants :
$$2^{-2}\times 2^{-1}\times 2^{0}\times 2^{1}\times 2^{2}=2^{-2-1+0+1+2}$$
$$=2^0$$
$$=1$$
En calculant :
$$2^{-2}\times 2^{-1}\times 2^{0}\times 2^{1}\times 2^{2}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times 1\times 2\times 4$$
$$=1$$
Réponse : (B)

6. Dans le triangle ABC, on a :
$$\angle ACB+40^\circ+60^\circ=180^\circ$$
$$\angle ACB=80^\circ$$
Puisque BC est parallèle à DE, $\angle AED=\angle ACB=80^\circ$.
Donc $x^\circ=180^\circ-\angle AED$, d'où $x^\circ=100^\circ$.
Donc $x=100$.



Réponse : (D)

7. Puisque la droite a une pente de $\frac{1}{2}$, la droite monte de 1 unité lorsqu'on avance de 2 unités vers la droite. Donc le point $(-2+2, 4+1)$, ou $(0, 5)$, est situé sur la droite. L'ordonnée à l'origine de la droite est donc égale à 5. Réponse : (A)

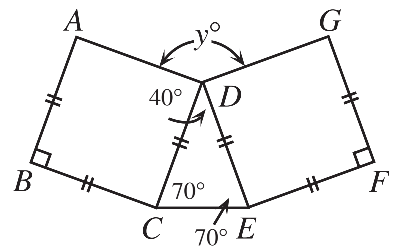
8. Puisqu'elle a compté une moyenne de 18 points par partie en trois parties, Maryse a compté un total de 3×18, ou 54 points, dans ses trois premières parties. De même, elle a compté un total de 4×17, ou 68 points, dans ses quatre premières parties. Dans sa quatrième partie, elle a donc compté $68 - 54$, ou 14 points. RÉPONSE : (E)

9. Puisque les carrés $ABCD$ et $DEFG$ ont les mêmes longueurs de côtés, alors $DC = DE$ et le triangle CDE est donc isocèle. Donc $\angle DEC = \angle DCE = 70^\circ$, d'où :

$$\angle CDE = 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ$$

et

$$y^\circ = 360^\circ - \angle ADC - \angle CDE - \angle GDE$$
$$y^\circ = 360^\circ - 90^\circ - 40^\circ - 90^\circ$$
$$y^\circ = 140^\circ$$
$$y = 140$$



RÉPONSE : (E)

10. Soit x le nombre initial. Donc :

$$\frac{x-5}{4} = \frac{x-4}{5}$$
$$20\left(\frac{x-5}{4}\right) = 20\left(\frac{x-4}{5}\right)$$
$$5(x-5) = 4(x-4)$$
$$5x - 25 = 4x - 16$$
$$x = 9$$

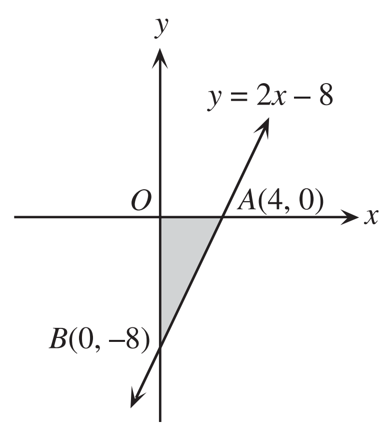
RÉPONSE : (C)

11. Au point B, posons $x = 0$, d'où $y = -8$. B a donc pour coordonnées $(0, -8)$. Au point A, posons $y = 0$, d'où :

$$0 = 2x - 8$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

A a donc pour coordonnées $(4, 0)$. On a donc :

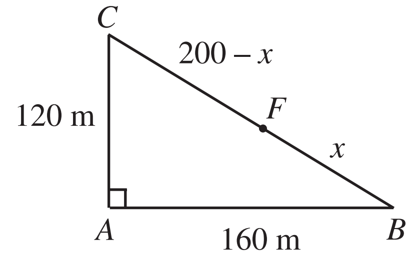
$$\text{Aire du triangle } AOB = \frac{1}{2}(OA)(OB)$$
$$= \frac{1}{2}(4)(8)$$
$$= 16$$



RÉPONSE : (B)

12. Après l'augmentation de 40 %, le nouveau prix est égal à 140 % de 10 \$, ou 14,00 \$. Lorsque ce nouveau prix est diminué de 30 %, le prix final est égal à 70 % de 14,00 \$, ce qui est égal à $0{,}7 \times 14{,}00$ \$, ou 9,80 \$. RÉPONSE : (A)

13. D’après la relation de Pythagore :



$$BC^2 = 120^2 + 160^2$$
$$BC^2 = 40000$$
$$BC = 200$$

Soit $FB = x$. Donc $FC = 200 - x$. D’après les renseignements donnés :

$$AC + CF = AB + BF$$
$$120 + 200 - x = 160 + x$$
$$160 = 2x$$
$$x = 80$$

La distance de F à B est égale à 80 m. RÉPONSE : (D)

14. On reporte $c + d = 3$ dans la première équation pour obtenir :

$$a(3) + b(3) = 42$$
$$3(a + b) = 42$$
$$a + b = 14$$

Puisque $a + b = 14$ et $c + d = 3$, alors :

$$a + b + c + d = 14 + 3$$
$$= 17$$

RÉPONSE : (D)

15. Si on part du point A, on peut se diriger vers D, E ou B.
Si on va de A à D, on doit suivre les flèches pour poursuivre de D à E à F, ce qui donne le trajet $A \to D \to E \to F$.
Si on va de A à E, on doit suivre les flèches pour poursuivre de E à F, ce qui donne le trajet $A \to E \to F$.
Si on va de A à B, on peut poursuivre de B vers E, C ou F. Dans ce dernier cas, on a le trajet $A \to B \to F$. De E ou C, on va directement à F, ce qui donne les trajets $A \to B \to E \to F$ et $A \to B \to C \to F$.
Il y a donc 5 trajets différents de A à F. RÉPONSE : (B)

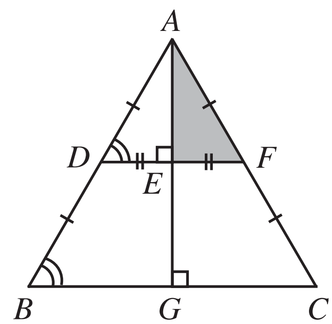
16. Soit n, $n+1$, $n+2$ et $n+3$ les quatre entiers positifs consécutifs.
On a donc l’équation $n(n+1)(n+2)(n+3) = 358\ 800$.
Or ce produit $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est à peu près égal à n^4. Donc n^4 est presque égal à $358\ 800$ et n est presque égal à $\sqrt[4]{358\ 800}$, ou 24,5.
On vérifie : $24(25)(26)(27) = 421\ 200$ et ce produit est trop petit.
$23(24)(25)(26) = 358\ 800$ et ce produit est le bon.
La somme des quatre entiers est égale à $23 + 24 + 25 + 26$, ou 98.

RÉPONSE : (B)

17. Un nombre « double-singulier » est de la forme *aab*, *a* et *b* étant des chiffres différents. Il y a 9 possibilités pour *a* (puisque *a* ne peut égaler 0). Pour chacune de ces possibilités, il y a 9 possibilités pour *b* (puisque *b* peut égaler n'importe quel chiffre de 0 à 9, à l'exception de la valeur de *a*). Il y a donc 9×9, ou 81 nombres doubles-singuliers.

RÉPONSE : (A)

18. *Solution 1*



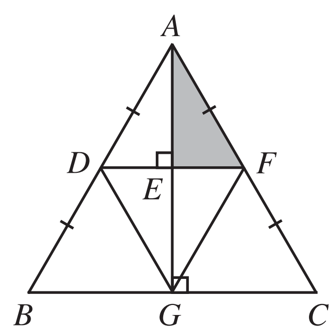
Puisque les triangles ADF et ABC partagent l'angle DAF et que $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{2}$, alors les triangles sont semblables. Le rapport des aires est donc égal au carré du rapport des longueurs de côtés. Donc :

$$\text{Aire du triangle } ADF = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \text{Aire du triangle } ABC.$$

Puisque les triangles sont semblables, $\angle ADF = \angle ABC$ et DF est donc parallèle à BC. Puisque AG est perpendiculaire à BC, alors AG est perpendiculaire à DE. Donc AE est une hauteur du triangle ADF. Puisque le triangle ADF est isocèle, $DE = EF$. Donc :

$$\begin{aligned}\text{Aire du triangle } ADF &= \frac{1}{2} \times \text{Aire du triangle } ADF \\ &= \frac{1}{8} \times \text{Aire du triangle } ABC\end{aligned}$$

Solution 2



On trace les segments DG et FG. On a donc quatre triangles isocèles identiques, soit ADF, GDF, BDG, et CFG. Chacun a donc la même aire. Donc :

$$\begin{aligned}\text{Aire du triangle } AEF &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} \times \text{Aire du triangle } ABC\right) \\ &= \frac{1}{8} \times \text{Aire du triangle } ABC\end{aligned}$$

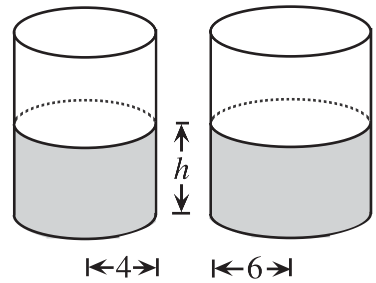
RÉPONSE : (E)

19. Soit $x = 777\,777\,777\,777\,777$ et $y = 222\,222\,222\,222\,223$.
L'entier est égal à $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$.
Or $x + y = 1\,000\,000\,000\,000\,000$ et $x - y = 555\,555\,555\,555\,554$.
Donc $x^2 - y^2 = 555\,555\,555\,555\,554\,000\,000\,000\,000\,000$ et la somme de ses chiffes est égale à $14 \times 5 + 4$, ou 74.

RÉPONSE : (C)

20. Soit h la profondeur de l'eau dans chaque réservoir à la fin.
Le volume initial d'eau, en mètres cubes, est égal à $\pi(4)^2(10)$, ou 160π.
À la fin, lorsque les deux réservoirs ont la même profondeur d'eau, on a :

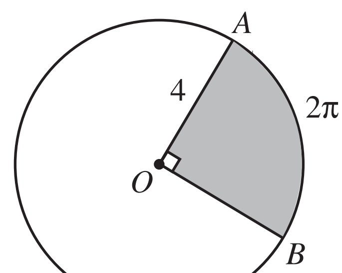
$$\begin{aligned}\pi(4)^2 h + \pi(6)^2 h &= 160\pi \\ 52\pi h &= 160\pi \\ h &= \frac{160}{52} \\ h &= \frac{40}{13}\end{aligned}$$



RÉPONSE : (E)

21. Soit r le rayon du cercle.
Puisque $\angle AOB = 90°$, la longueur de l'arc AB est un quart de la circonférence. Celle-ci est donc égale à $4 \times 2\pi$, ou 8π.
Donc $2\pi r = 8\pi$, d'où $r = 4$.
L'aire du secteur AOB est égale à :

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\pi r^2 &= \frac{1}{4}\pi(16) \\ &= 4\pi\end{aligned}$$



RÉPONSE : (A)

22. La somme d'entiers consécutifs est égale au produit du nombre d'entiers et de leur moyenne.
Par exemple, $6+7+8+9+10 = 5\times 8$ et $20+21+22+23+24+25 = 6\times 22{,}5$.
Soit N le nombre d'entiers consécutifs et M leur moyenne. Donc $NM = 75$.
On remarque que N doit être inférieur à 12, car $1+2+3+\ldots+11+12 = 78$ et la somme de 12 entiers ou plus, tous strictement positifs, est nécessairement supérieure à 78.

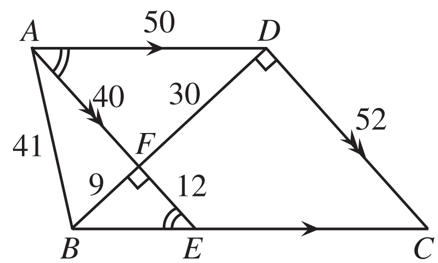
1^er^ cas : N est impair.
Dans ce cas, le nombre M est un entier. Il correspond au nombre du milieu. Puisque $NM = 75$, N doit être un diviseur impair de 75. Puisqu'il est supérieur à 1 et inférieur à 12, il peut égaler 3 ou 5. On a donc 3×25, ce qui donne $24+25+26 = 75$, et 5×15, ce qui donne $13+14+15+16+17 = 75$.

2^e^ cas : N est pair.
Dans ce cas, M est la moyenne des deux entiers consécutifs du milieu. Il est donc égal à la moitié d'un nombre impair.
On a donc $N = 2k$ et $M = \dfrac{2l+1}{2}$, k et l étant des entiers. On remarque que les entiers du milieu sont respectivement l et $l+1$. Donc :

$$\begin{aligned}2k\left(\frac{2l+1}{2}\right) &= 75 \\ k(2l+1) &= 75\end{aligned}$$

Donc k est un diviseur de 75, le deuxième facteur étant impair. Les possibilités sont 1×75, 3×25 et 5×15. Les valeurs possibles de k sont donc 1, 3 et 5, puisque N est inférieur à 12 et k est donc inférieur à 6.
Si $k=1$, on a $1\times 75=75$, d'où $N=2$ et $l=37$, ce qui donne $37+38=75$.
Si $k=3$, on a $3\times 25=75$, d'où $N=6$ et $l=12$, ce qui donne $10+11+12+13+14+15=75$. Si $k=5$, on a $5\times 15=75$, d'où $N=10$ et $l=7$, ce qui donne $3+4+5+6+7+8+9+10+11+12=75$.
Il y a donc 5 façons d'exprimer 75 sous la forme d'une somme de deux entiers consécutifs ou plus, chacun strictement positif. RÉPONSE : (E)

23. Le triangle AFB est rectangle. D'après la relation de Pythagore, on a :

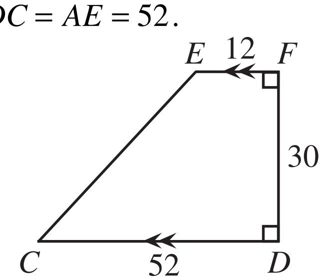


$$AF^2+9^2=41^2$$
$$AF=40$$

De même, dans le triangle AFD, on a:

$$FD^2+40^2=50^2$$
$$FD=30$$

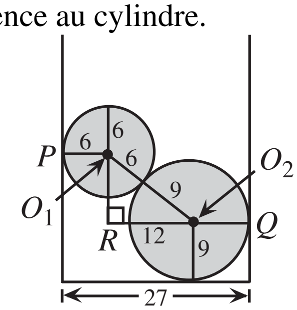
Puisque AD est parallèle à BC, $\angle FAD=\angle FEB$. Les triangles AFD et EFB sont semblables, puisqu'ils ont deux angles congrus deux à deux. Donc $\frac{AF}{FD}=\frac{EF}{FB}$, ou $\frac{40}{30}=\frac{EF}{9}$, d'où $EF=12$.
Puisque AE est perpendiculaire à BD et que DC est perpendiculaire à BD, alors AE est parallèle à DC. Donc $AECD$ est un parallélogramme. Donc $DC=AE=52$.
On considère le quadrilatère $FECD$. Puisqu'il s'agit d'un trapèze, alors :



$$\begin{aligned}\text{Aire de } FECD &= \frac{1}{2}(EF+CD)(FD)\\ &= \frac{1}{2}(12+52)(30)\\ &= 960\end{aligned}$$

RÉPONSE : (C)

24. On considère une coupe transversale verticale du cylindre et des sphères qui passe par l'axe vertical du cylindre et par les centres des sphères. Une telle coupe existe, puisque les sphères seront placées dans une telle position par la pesanteur.
Soit O_1 et O_2 les centres respectifs des sphères, comme l'indique le diagramme.
On joint les centres des sphères l'un à l'autre et aux points de tangence au cylindre.
Puisque le segment O_1O_2 passe par le point de tangence des deux sphères, on a $O_1O_2=6+9$, ou $O_1O_2=15$, ainsi que $O_1P=6$ et $O_2Q=9$.
On trace le triangle O_1RO_2, tel que O_1P soit perpendiculaire à O_1R et que $\angle O_1RO_2=90°$.
D'après la largeur du cylindre, on a $PO_1+RO_2+O_2Q=27$.
Puisque $PO_1=6$ et $O_2Q=9$, alors $RO_2=12$.



Puisque le triangle O_1RO_2 est rectangle, on obtient, à l'aide de la relation de Pythagore, $O_1R = 9$.

La profondeur de l'eau est égale à :

$$\text{Rayon de la sphère du bas} + RO_1 + \text{Rayon de la sphère du haut} = 9 + 9 + 6 = 24$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\text{Volume de l'eau} &= (\text{Volume du cylindre à une hauteur de } 24) - (\text{Volume des sphères}) \\ &= \pi\left(\frac{27}{2}\right)^2(24) - \frac{4}{3}\pi(6)^3 - \frac{4}{3}\pi(9)^3 \\ &= 4374\pi - 288\pi - 972\pi \\ &= 3114\pi\end{aligned}$$

Le volume d'eau qu'il faut verser est égal à 3114π. RÉPONSE : (D)

25. On soustrait, membre par membre, la première équation de la deuxième pour obtenir :

$$k^2x - kx - 6 = 0$$
$$\left(k^2 - k\right)x = 6$$
$$k(k-1)x = 6$$

Puisque k et x doivent prendre des valeurs entières, l'expression $k(k-1)$ doit être un diviseur de 6. Elle doit donc égaler ±1, ±2, ±3 ou ±6. Or $k(k-1)$ est le produit de deux entiers consécutifs. On peut donc éliminer six des huit possibilités. Il reste donc $k(k-1) = 2$ et $k(k-1) = 6$. La première équation a pour solutions $k = 2$ et $k = -1$. La deuxième a pour solutions $k = 3$ et $k = -2$.

D'après la première équation donnée, $y = \frac{1}{5}(kx + 7)$. On calcule les valeurs correspondantes de x et de y.

k	x	y
2	3	$\frac{13}{5}$
-1	3	$\frac{4}{5}$
3	1	2
-2	1	1

Il y a deux valeurs entières de k pour lesquelles les droites se coupent à un point de treillis.

RÉPONSE : (B)