Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2001 Solutions
Concours Pascal (9e - Sec. III)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

© 2001 Waterloo Mathematics Foundation

Partie A

1. La valeur de $\dfrac{5(6)-3(4)}{6+3}$ est :

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 6 **(D)** 12 **(E)** 31

Solution

$$\begin{aligned}\frac{5(6)-3(4)}{6+3} &= \frac{30-12}{9}\\ &= \frac{18}{9}\\ &= 2\end{aligned}$$

RÉPONSE : (B)

2. Lorsqu'on divise $12\,345\,678$ par 10, le reste est égal à :

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 8

Solution
On peut diviser au long pour obtenir un reste de 8, car :
$$12\,345\,678 = 10(1\,234\,567)+8$$

RÉPONSE : (E)

3. La valeur de $\dfrac{2^5-2^3}{2^2}$ est :

(A) 6 **(B)** 1 **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** 0 **(E)** 30

Solution

$$\begin{aligned}\frac{2^5-2^3}{2^2} &= \frac{32-8}{4}\\ &= \frac{24}{4}\\ &= 6\end{aligned}$$

RÉPONSE : (A)

4. Si $x=\frac{1}{4}$, laquelle des expressions suivantes a la plus grande valeur?

(A) x **(B)** x^2 **(C)** $\frac{1}{2}x$ **(D)** $\dfrac{1}{x}$ **(E)** $\sqrt{x}$

Solution
On calcule la valeur de chaque expression.

(**A**) $\frac{1}{4}$ (**B**) $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ (**C**) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)$ (**D**) $\frac{1}{\frac{1}{4}}$ (**E**) $\sqrt{\frac{1}{4}}$

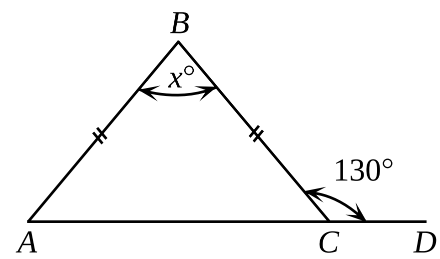
$= \frac{1}{16}$ $= \frac{1}{8}$ $= 1 \times 4$ $= \frac{1}{2}$

$= 4$

RÉPONSE : (D)

5. D'après le diagramme, la valeur de x est :

(**A**) 100 (**B**) 65 (**C**) 80
(**D**) 70 (**E**) 50



Solution
Puisque les angles sont supplémentaires, on a $\angle ACB + \angle BCD = 180°$, d'où $\angle ACB = 50°$.
Puisque le triangle est isocèle, $\angle BAC = 50°$.
Donc $x° = 180° - (50° + 50°)$

$x° = 80°$

La valeur de x est 80. RÉPONSE : (C)

6. Anne a obtenu une note de 80 % pour le semestre et une note de 90 % à l'examen. Pour calculer sa note finale, la note du semestre a un poids de 70 % et la note de l'examen a un poids de 30 %. Quelle est sa note finale?

(**A**) 81 % (**B**) 83 % (**C**) 84 % (**D**) 85 % (**E**) 87 %

Solution
Sa note finale est égale à : 0,70 de 80 + 0,30 de 90

$= 0,70 \times 80 + 0,30 \times 90$

$= 56 + 27$

$= 83$

RÉPONSE : (B)

7. La plus petite valeur de x pour laquelle $\frac{24}{x-4}$ est un entier est :

(**A**) -44 (**B**) -28 (**C**) -20 (**D**) -8 (**E**) 0

Solution
On calcule la valeur de l'expression pour chacune des valeurs données de x.

(**A**) $\dfrac{24}{-44-4}$ $= \frac{24}{-48}$ $= \frac{-1}{2}$

(**B**) $\dfrac{24}{-28-4}$ $= \frac{24}{-32}$ $= \frac{-3}{4}$

(**C**) $\dfrac{24}{-20-4}$ $= \frac{24}{-24}$ $= -1$

(**D**) $\dfrac{24}{-8-4}$ $= \frac{24}{-12}$ $= -2$

(**E**) $\dfrac{24}{0-4}$ $= -6$

La plus petite valeur de *x* pour laquelle l'expression est un entier est donc –20.

RÉPONSE : (C)

8. Le 50e terme de la suite $5,\ 6x,\ 7x^2,\ 8x^3,\ 9x^4,\ \ldots$ est :

(**A**) $54x^{49}$ (**B**) $54x^{50}$ (**C**) $45x^{50}$ (**D**) $55x^{49}$ (**E**) $46x^{51}$

Solution

On remarque d'abord que le coefficient numérique de chaque terme est 4 de plus que le rang du terme. Le coefficient du 50e terme est donc 54.

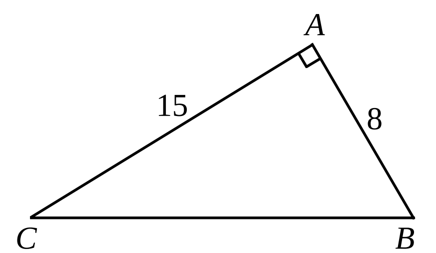
Le degré de chaque terme est 1 de moins que le rang du terme. Le degré du 50e terme est donc 49.

Le 50e terme est donc $54x^{49}$.

RÉPONSE : (A)

9. Le périmètre du triangle ABC est égal à :

(**A**) 23 (**B**) 40 (**C**) 42
(**D**) 46 (**E**) 60



Solution

Puisque le triangle est rectangle, on utilise le théorème de Pythagore.

$$\begin{aligned} BC^2 &= 8^2 + 15^2 \\ &= 289 \end{aligned}$$

Donc $BC = 17$.

Le périmètre est égal à $15 + 8 + 17$, ou 40.

RÉPONSE : (B)

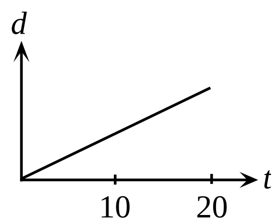
10. Dino a compté un total de 252 points dans 28 parties de basket-ball. Rima a joué 10 parties de moins que Dino. Sa moyenne de points par partie était supérieure de 0,5 point à celle de Dino. Combien de points Rima a-t-elle comptés?

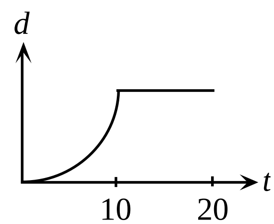
(**A**) 153 (**B**) 171 (**C**) 180 (**D**) 266 (**E**) 144

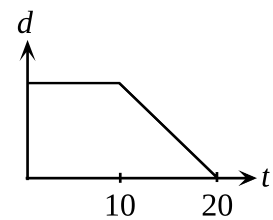
Solution
Puisque Dino a compté 252 points en 28 parties, sa moyenne est égale à $\frac{252}{28}$, ou 9 points par partie.
Rima a donc une moyenne de 9,5 points par partie. En 18 parties, elle a donc compté $9{,}5 \times 18$, ou 171 points. RÉPONSE : (B)

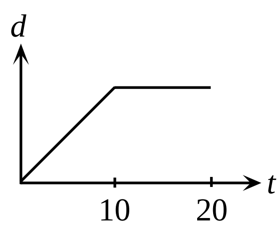
Partie B

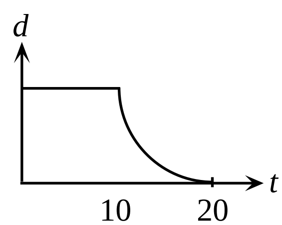
11. Sylvie marche à une vitesse constante pendant 10 minutes, puis se repose pendant 10 minutes. Les graphiques suivants représentent une distance *d* par rapport au temps *t*. Lequel représente le mieux le mouvement de Sylvie pendant les 20 minutes?

(**A**)


(**B**)


(**C**)


(**D**)


(**E**)


Solution
(A) Puisqu'il s'agit d'une droite, Sylvie marche à une vitesse constante pendant 20 minutes.
(B) La partie courbe du graphique indique que la vitesse augmente pendant les 10 premières minutes. La deuxième partie du graphique est plate, ce qui indique que Sylvie s'est reposée pendant 10 minutes.
(C) La première partie du graphique est plate, ce qui indique que Sylvie s'est reposée pendant les 10 premières minutes. Pendant les 10 dernières minutes, le graphique est une droite avec une pente négative, ce qui indique que Sylvie revient à son point de départ.
(D) Ce graphique représente la situation présentée dans l'énoncé.
(E) Ce graphique indique que Sylvie s'est reposée pendant 10 minutes, puis qu'elle est revenue vers son point de départ à une vitesse qui diminue pendant les 10 dernières minutes.

RÉPONSE : (D)

12. Un sac contient 20 bonbons : 4 au chocolat, 6 à la menthe et 10 au caramel. Des bonbons sont retirés du sac, au hasard, et mangés. Quel est le nombre minimum de bonbons qu'il faut retirer du sac pour être *certain* qu'au moins deux bonbons de chaque sorte ont été mangés?

(**A**) 6 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 16 (**E**) 18

Solution

Au plus, on pourrait retirer 17 bonbons avant de retirer un deuxième bonbon au chocolat, soit tous les 6 bonbons à la menthe, les 10 bonbons au caramel et un bonbon au chocolat.
Il faut donc retirer au moins 18 bonbons du sac pour être certain qu'au moins deux bonbons de chaque sorte ont été mangés. RÉPONSE : (E)

13. Pierre a célébré son anniversaire de naissance le 2 février 2001. Ce jour-là, son âge était égal à la somme des chiffres de l'année de sa naissance. En quelle année Pierre est-il né?

(**A**) 1987 (**B**) 1980 (**C**) 1979 (**D**) 1977 (**E**) 1971

Solution

On procède à rebours. Le tableau suivant présente l'année actuelle selon les dates présentées.

	Année de naissance	Âge (somme des chiffres)	Année actuelle selon son âge
(A)	1987	$1+9+8+7=25$	$1987+25=2012$
(B)	1980	$1+9+8+0=18$	$1980+18=1998$
(C)	1979	$1+9+7+9=26$	$1979+26=2005$
(D)	1977	$1+9+7+7=24$	$1977+24=2001$
(E)	1971	$1+9+7+1=18$	$1971+18=1989$

D'après le tableau, Pierre est né en 1977. RÉPONSE : (D)

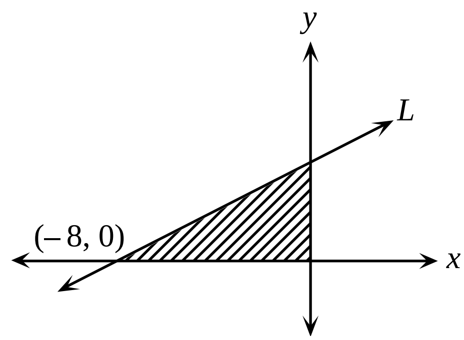
14. Vingt billets sont numérotés de un à vingt. On tire un billet au hasard, chacun ayant une chance égale d'être choisi. Quelle est la probabilité pour que le nombre sur le billet soit un multiple de 3 ou de 5?

(**A**) $\frac{3}{10}$ (**B**) $\frac{11}{20}$ (**C**) $\frac{2}{5}$ (**D**) $\frac{9}{20}$ (**E**) $\frac{1}{2}$

Solution

Les nombres, de 1 à 20, qui sont des multiples de 3 ou de 5 sont : 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20. La probabilité pour que le nombre sur le billet soit un multiple de 3 ou de 5 est $\frac{9}{20}$. RÉPONSE : (D)

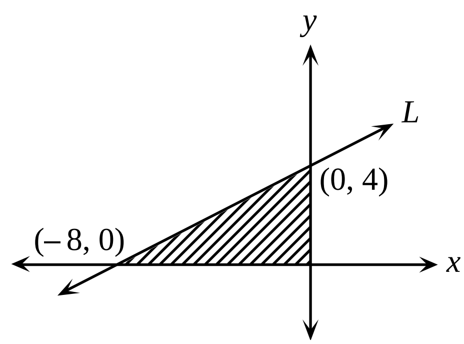
15. La droite L croise l'axe des x au point $(-8, 0)$. L'aire de la partie ombrée est égale à 16. Quelle est la pente de la droite L?



(**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) 4 (**C**) $-\frac{1}{2}$
(**D**) 2 (**E**) -2

Solution
Puisque l'aire de la partie ombrée est égale à 16 et que la base a une longueur de 8, la hauteur doit être égale à 4.
La droite croise donc l'axe des y au point $(0, 4)$, car sa pente est positive selon le diagramme.

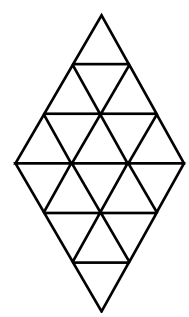
La pente est donc égale à $\frac{4-0}{0-(-8)}$, ou $\frac{1}{2}$.



$$\text{Aire} = \frac{8 \times 4}{2}$$
$$= 16$$

RÉPONSE : (A)

16. Dans le diagramme, tous les triangles sont équilatéraux. Le nombre total de triangles équilatéraux de toutes les dimensions est égal à :



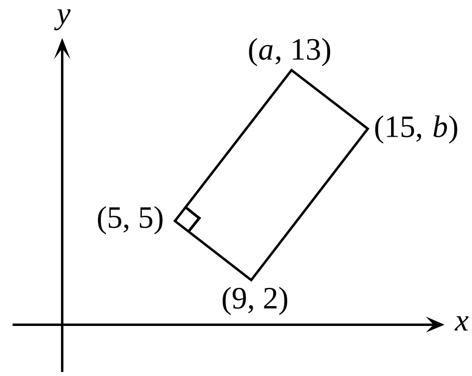
(**A**) 18 (**B**) 20 (**C**) 24
(**D**) 26 (**E**) 28

Solution
D'après le diagramme, il y a 18 petits triangles.
On considère maintenant les triangles ayant des côtés de longueur 2. Il y en a 4 qui pointent vers le haut et 4 autres qui pointent vers le bas.
Il y a aussi 2 triangles ayant des côtés de longueur 3. En tout, il y a 28 triangles équilatéraux.

RÉPONSE : (E)

17. D'après le rectangle, quelle est la valeur de $a - b$?

(**A**) -3 (**B**) -1 (**C**) 0
(**D**) 3 (**E**) 1



Solution
Pour se rendre du point $(5, 5)$ au point $(9, 2)$, il faut se déplacer de 4 unités vers la droite et de 3 unités vers le bas.
Puisqu'il s'agit d'un rectangle, il en est de même pour se déplacer du point $(a, 13)$ au point $(15, b)$.
Donc $a + 4 = 15$ et $13 - 3 = b$, d'où $a = 11$ et $b = 10$. Donc $a - b = 1$. RÉPONSE : (E)

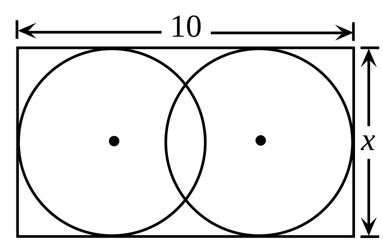
18. Le plus grand nombre de quatre chiffres dont la somme des chiffres est égale à 17 est 9800. Le 5^e plus grand nombre de quatre chiffres dont la somme des chiffres est égale à 17 est :

(**A**) 9521 (**B**) 9620 (**C**) 9611 (**D**) 9602 (**E**) 9530

Solution
Le plus grand nombre de quatre chiffres dont la somme des chiffres est égale à 17 est 9800.
Les deux plus grands nombres suivants sont 9710 et 9701. Les trois plus grands nombres suivants sont 9620, 9611 et 9602. Le 5^e plus grand est donc 9611. RÉPONSE : (C)

19. Les deux cercles dans le rectangle ont des rayons égaux. La distance entre les centres des cercles est égale à $\frac{2x}{3}$. Quelle est la valeur de x?

(**A**) $\frac{15}{4}$ (**B**) 5 (**C**) 6
(**D**) $\frac{60}{7}$ (**E**) $\frac{15}{2}$

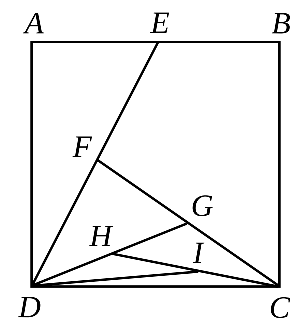


Solution
On remarque d'abord que la hauteur du rectangle, x, est égale au diamètre des cercles. La base du rectangle est égale à deux rayons plus la distance entre les centres.
Donc : $x + \frac{2}{3}x = 10$

$$\frac{5}{3}x = 10$$
$$x = 6$$

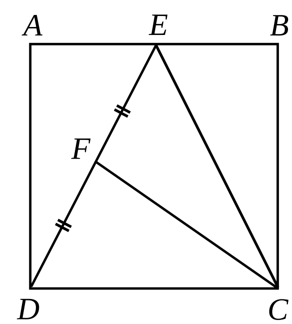
RÉPONSE : (C)

20. Le carré $ABCD$ a une aire de 4. E est le milieu de AB. De même, F, G, H et I sont les milieux respectifs de DE, CF, DG et CH. L'aire du triangle IDC est égale à :



(**A**) $\frac{1}{4}$ (**B**) $\frac{1}{8}$ (**C**) $\frac{1}{16}$ (**D**) $\frac{1}{32}$ (**E**) $\frac{1}{64}$

Solution
On joint les points E et C. L'aire du triangle CDE est la moitié celle du carré. Elle est donc égale à 2.
Puisque F est le milieu de DE, les triangles DFC et EFC ont des bases égales et la même hauteur. Ils ont donc la même aire. Le triangle DFC a donc une aire de 1. De la même façon, le triangle DGC a une aire de $\frac{1}{2}$, le triangle CHD a une aire de $\frac{1}{4}$ et le triangle IDC a une aire de $\frac{1}{8}$.



RÉPONSE : (B)

Partie C

21. À chaque jour, Carla quitte l'école à la même heure. Si elle pédale à une vitesse de 20 km/h, elle arrive à la maison à 16 h 30. Si elle pédale à une vitesse de 10 km/h, elle arrive à la maison à 17 h 15. À quelle vitesse, en km/h, doit-elle pédaler pour arriver à la maison à 17 h?

(**A**) $16\frac{2}{3}$ (**B**) 15 (**C**) $13\frac{1}{3}$ (**D**) 12 (**E**) $18\frac{3}{4}$

Solution
On sait que la distance à parcourir est la même dans tous les cas. On a donc une équation :
Distance parcourue à 20 km/h = Distance parcourue à 10 km/h

Soit t le temps, en heures, que prend Carla lorsqu'elle pédale à une vitesse de 20 km/h.
Lorsqu'elle pédale à une vitesse de 10 km/h, elle prend 45 minutes de plus et le temps qu'elle

prend est donc égal à $t+\frac{3}{4}$. L'équation devient donc :

$$20t = 10\left(t+\frac{3}{4}\right)$$
$$20t = 10t+\frac{30}{4}$$
$$10t = \frac{15}{2}$$
$$t = \frac{15}{20} \text{ ou } \frac{3}{4}$$

Donc $d = 20\times\frac{3}{4}$, ou $d = 15$ km.

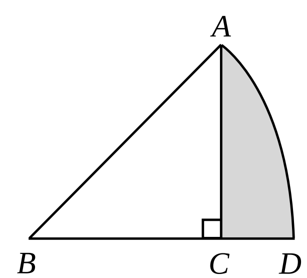
Si elle arrive à 17 h, alors $t=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$, ou $t=\frac{5}{4}$. Soit v sa vitesse lorsqu'elle arrive à cette heure.

Donc $v=\frac{d}{t}$.

$$v=\frac{15}{\frac{5}{4}}$$
$$v=15\times\frac{4}{5}$$
$$v=12 \text{ km/h}$$

Carla doit pédaler à une vitesse de 12 km/h pour arriver à 17 h. RÉPONSE : (D)

22. Dans le diagramme, AB et BD sont des rayons d'un cercle de centre B. L'aire du secteur ABD est égale à 2π, ce qui représente un huitième de l'aire du cercle. L'aire de la partie ombrée est égale à :



(**A**) $2\pi-4$ (**B**) π (**C**) $2\pi-2$

(**D**) $2\pi-4{,}5$ (**E**) $2\pi-8$

Solution

Puisque l'aire du secteur ABD représente un huitième de l'aire du cercle, l'aire du cercle est égale à $8\times 2\pi$, ou 16π.

Si r est le rayon du cercle, on a $\pi r^2=16\pi$, d'où $r=4$, car $r>0$.

Puisqu'un angle plein (l'angle dont l'arc est un cercle) mesure 360°, $\angle ABD=\frac{360°}{8}=45°$.

Puisque $\angle ABC=45°$, alors $\angle BAC=45°$ et le triangle ABC est donc isocèle.

Puisque $AB=4$, alors $AC=BC=2\sqrt{2}$ (ou selon le théorème de Pythagore, $AC=BC=\sqrt{8}$).

L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}\right)$ (ou $\frac{1}{2}\left(\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{8}\right)$), c'est-à-dire à 4.

Or l'aire de la partie ombrée est égale à l'aire du secteur moins l'aire du triangle ABC.

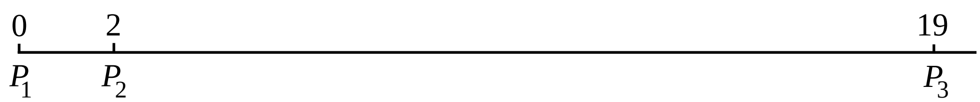
L'aire de la partie ombrée est donc égale à $2\pi - 4$. RÉPONSE : (A)

23. Cinq points sont situés sur une droite. Lorsqu'on écrit, en ordre croissant, les dix distances entre les paires de points, on obtient 2, 4, 5, 7, 8, *k*, 13, 15, 17, 19. Quelle est la valeur de *k*?

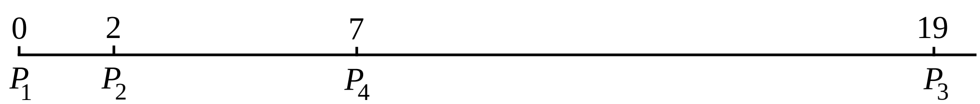
(**A**) 11 (**B**) 9 (**C**) 13 (**D**) 10 (**E**) 12

Solution

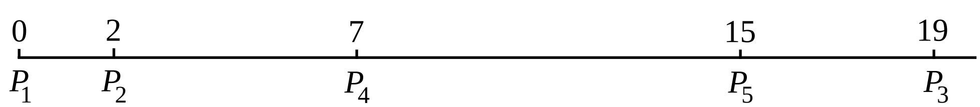
Il est plutôt difficile d'écrire une solution, puisqu'elle fait appel à des tâtonnements de façon systématique. On commence par placer deux points d'abscisses 0 et 19. Puisqu'il y a une distance de 2, on place le troisième point comme dans le diagramme suivant.



Puisqu'il nous faut une distance de 7, on place un point d'abscisse 7 sur la droite. On obtient des distances entre les points qui sont compatibles avec les données.



On a donc des distances de 2, 7, 19, 5, 17 et 12.
Si on place un point d'abscisse 15, on obtient la situation suivante.



Si on place le point ailleurs, on obtient des distances qui ne sont pas données. Les points du diagramme précédent donnent les distances $\{2, 7, 15, 19, 5, 13, 17, 8, 12, 4\}$.
La valeur de *k* est donc 12. RÉPONSE : (E)

24. Une bouteille fermée, contenant de l'eau, a été construite en attachant un cylindre de rayon 1 cm à un cylindre de rayon 3 cm, comme dans la Figure A. Lorsque la bouteille est tenue à l'endroit, le niveau de l'eau est à une hauteur de 20 cm, comme l'illustre la vue de face dans la Figure B. Lorsque la bouteille est tenue à l'envers, le niveau de l'eau est à une hauteur de 28 cm, comme l'illustre la Figure C. Quelle est la hauteur totale de la bouteille, en centimètres?

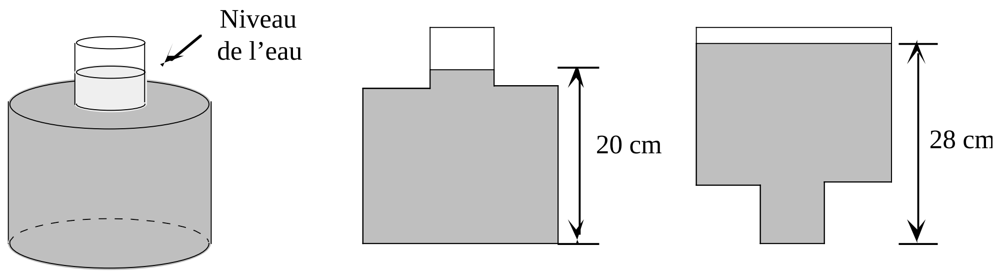


Figure A Figure B Figure C

(**A**) 29 (**B**) 30 (**C**) 31 (**D**) 32 (**E**) 48

Solution

Soit h la hauteur totale de la bouteille, en centimètres.

Le volume de l'eau est le même dans les deux positions. De même, le volume de la partie vide est le même dans les deux positions. Or il est plus facile de calculer le volume des deux parties vides.

Dans la figure B, la partie vide a une hauteur égale à $h-20$.

Son volume est donc égal à $\pi \times 1^2 \times (h-20)$, ou $\pi(h-20)$.

Dans la figure C, la partie vide a une hauteur égale à $h-28$.

Son volume est donc égal à $\pi \times 3^2 \times (h-28)$, ou $9\pi(h-28)$.

Puisque ces volumes sont égaux, on a :

$$\begin{aligned}\pi(h-20) &= 9\pi(h-28)\\ h-20 &= 9h-252\\ 8h &= 232\\ h &= 29\end{aligned}$$

La hauteur totale de la bouteille est de 29 cm. RÉPONSE : (A)

25. Un palindrome est un entier strictement positif dont les chiffres peuvent être lus de gauche à droite ou de droite à gauche, tout en donnant le même nombre. Par exemple, le nombre 2882 est un palindrome de quatre chiffres et le nombre 49194 est un palindrome de cinq chiffres. Il existe des paires de palindromes de quatre chiffres dont la somme est un palindrome de cinq chiffres. À titre d'exemple, les nombres 2882 et 9339. Combien de telles paires existe-t-il?

(**A**) 28 (**B**) 32 (**C**) 36 (**D**) 40 (**E**) 44

Solution

Puisqu'on additionne deux palindromes de quatre chiffres pour obtenir un palindrome de cinq chiffres, il doit s'agir de nombres de la forme suivante,

$$\begin{array}{r} a\,b\,b\,a \\ c\,d\,d\,c \\ \hline 1\,e\,f\,e\,1 \end{array}$$

c'est-à-dire que le premier chiffre de la somme doit être 1.
On conclut que $a+c=11$, puisque le chiffre des unités de $a+c$ est 1 et que $10<a+c<20$.
Il y a quatre valeurs possibles de *a* et de *c* :

a	2	3	4	5
c	9	8	7	6

On remarque que l'on pourrait prolonger le tableau, mais on obtiendrait les valeurs de *a* attribuées à *c* et vice versa.
On considère un de ces cas, $a=2$ et $c=9$.

$$\begin{array}{r} 2\,b\,b\,2 \\ 9\,d\,d\,9 \\ \hline 1\,e\,f\,e\,1 \end{array}$$

On voit que l'on peut former des palindromes de deux façons possibles, selon qu'il y a une retenue ou non. En effet, si on porte attention au *e* dans la colonne des milliers, on voit que $e=1$ s'il n'y a aucune retenue ou que $e=2$ s'il y a une retenue.
Si $e=1$, on voit, d'après les colonnes des dizaines et des centaines, que $b+d=0$, c'est-à-dire que $b=d=0$.
Si $e=2$, on voit, d'après les colonnes des dizaines et des centaines, que $b+d=11$.
Quelles que soient les valeurs de *a* et de *c* choisies, on doit avoir $b=d=0$ ou $b+d=11$.
On revient à la situation générale en examinant ces deux cas.

1er cas : $b=d=0$
Il y a 4 possibilités pour les valeurs de *a* et de *c*. Dans chaque cas, on a $b=d=0$ puisque $b+d=0$.

2e cas : $b+d=11$
Pour chacune des 4 possibilités pour les valeurs de *a* et de *c*, il y a 8 façons de choisir des valeurs de *b* et de *d* pour que $b+d=11$. Il y a donc 32 possibilités dans ce cas.
Il y a un total de $4+32$, ou 36 possibilités.

RÉPONSE : (C)

✿✿✿✿✿✿✿✿✿✿