Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2001 Solutions

Concours Gauss

(7e et 8e années – Sec. I et II)

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche
Comptables agréés

Avec la participation de :

Institut canadien des actuaires

Sybase inc (Waterloo)

Avec l'appui de :

London Life, compagnie d'assurance-vie et La Great-West, compagnie d'assurance-vie

Financière Manuvie

L'Équitable, Compagnie d'Assurance-Vie du Canada

Comité exécutif	Ron Scoins, (Directeur), Peter Crippin, Barry Ferguson, Ruth Malinowski
Le directeur d'operation	Barry Ferguson, Université de Waterloo
Ordinatique	Steve Breen, Université de Waterloo Don Cowan, Université de Waterloo
Compilateurs du rapport du Concours Gauss	Lloyd Auckland, Université de Waterloo Barry Ferguson, Université de Waterloo
Documentation	Bonnie Findlay, Université de Waterloo
Publications	Bonnie Findlay, Université de Waterloo
Version française	André Ladouceur, Collège catholique Samuel-Genest, Ottawa Robert Laliberté, École secondaire publique Louis-Riel Gérard Proulx, Collège catholique Franco-Ouest, Ottawa Rodrigue St-Jean, École secondaire Embrun, Embrun
Adjoints à la technique	Joanne Kursikowski, Terri McCartney, Linda Schmidt, Kelly Clark, Michael Green
Comité de validation	John Barsby, St. John's-Ravenscourt School, Winnipeg Jean Collins, (retraité), Thornhill Ron Scoins, Université de Waterloo, Waterloo

Comité Gauss

Bob McRoberts (Chair)
Dr. G.W. Williams S.S.
Aurora, Ontario

Richard Auckland
Locke's School
St. Thomas, Ontario

Mark Bredin (Assoc. Chair)
St. John's-Ravenscourt School
Winnipeg, Manitoba

Sandy Emms Jones
Forest Heights C.I.
Kitchener, Ontario

Joanne Halpern
Toronto, Ontario

Marianne Kuwabara
Elizabeth Ziegler Public School
Waterloo, Ontario

David Matthews
University of Waterloo
Waterloo, Ontario

John Grant McLoughlin
Memorial University of Newfoundland
St. John's, Newfoundland

Patricia Tinholt
Valley Park Middle School
Don Mills, Ontario

Sue Trew
Holy Name of Mary S.S.
Mississauga, Ontario

Partie A

1. Le plus grand nombre de l'ensemble $\{0,01;\ 0,2;\ 0,03;\ 0,02;\ 0,1\}$ est :

(**A**) 0,01 (**B**) 0,2 (**C**) 0,03 (**D**) 0,02 (**E**) 0,1

Solution

Il est plus facile de comparer les nombres si on les écrit avec deux décimales, c'est-à-dire en centièmes : 0,01; 0,20; 0,03; 0,02 et 0,10. Le plus grand est 0,2. RÉPONSE : (B)

2. En 1998, la population du Canada était de 30,3 millions. Lequel des nombres suivants est le même que 30,3 millions?

(**A**) 30 300 000 (**B**) 303 000 000 (**C**) 30 300 (**D**) 303 000 (**E**) 30 300 000 000

Solution

Le nombre 30,3 millions peut être obtenu en multipliant 30,3 par $1\,000\,000$. On obtient alors $30\,300\,000$. RÉPONSE : (A)

3. La valeur de $0,001+1,01+0,11$ est :

(**A**) 1,111 (**B**) 1,101 (**C**) 1,013 (**D**) 0,113 (**E**) 1,121

Solution

La somme des nombres 0,001, 1,01 et 0,11 est égale à 1,121. Il est plus facile de l'obtenir en additionnant en colonne :

$$\begin{array}{r} 0,001 \\ 1,01 \\ +0,11 \\ \hline 1,121 \end{array}$$

RÉPONSE : (E)

4. Lorsque le nombre 16 est doublé et que l'on prend la moitié de la réponse, on obtient :

(**A**) 2^1 (**B**) 2^2 (**C**) 2^3 (**D**) 2^4 (**E**) 2^8

Solution

Lorsque le nombre 16 est doublé, on obtient 32.

Lorsqu'on prend la moitié de la réponse, on obtient 16, le nombre initial. Puisque $16=2^4$, la réponse est 2^4. RÉPONSE : (D)

5. La valeur de $3\times4^2-(8\div2)$ est :

(**A**) 44 (**B**) 12 (**C**) 20 (**D**) 8 (**E**) 140

Solution

On a : $3 \times 4^2 - (8 \div 2)$

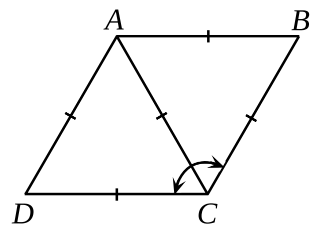
$= 48 - 4$

$= 44$

RÉPONSE : (A)

6. Le diagramme présente un losange $ABCD$. La mesure de l'angle BCD est égale à :

(**A**) 60° (**B**) 90° (**C**) 120°
(**D**) 45° (**E**) 160°



Solution

Puisque le triangle ADC est équilatéral, chacun de ses trois angles mesure 60°. De même, chacun des angles du triangle ABC mesure 60°. Puisque $\angle BCD = \angle BCA + \angle DCA$ et que $\angle BCA = \angle DCA = 60°$, alors $\angle BCD = 120°$. RÉPONSE : (C)

7. On affiche 40 entiers consécutifs sur une droite numérique. Si le plus petit de ces entiers est –11, quel est le plus grand?

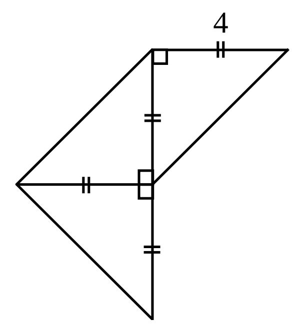
(**A**) 29 (**B**) 30 (**C**) 28 (**D**) 51 (**E**) 50

Solution

De –11 à 0, il y a 12 entiers affichés. Il y a donc 28 autres entiers affichés, soit de 1 à 28. Le plus grand de ces entiers est 28. RÉPONSE : (C)

8. L'aire de la figure au complet est égale à :

(**A**) 16 (**B**) 32 (**C**) 20
(**D**) 24 (**E**) 64

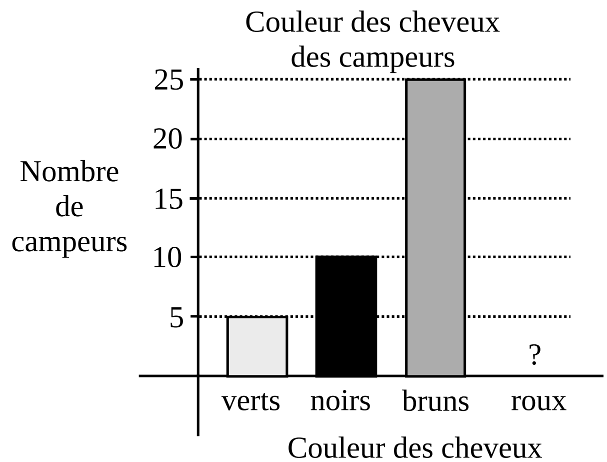


Solution

Chacun des petits triangles a une base de 4 et une hauteur de 4. Leur aire est égale à $\frac{1}{2}(4)(4)$, ou 8. L'aire de la figure au complet est égale à 3×8, ou 24. RÉPONSE : (D)

9. Le diagramme en bâtons illustre la couleur des cheveux des campeurs au Camp d'été Gauss. Le bâton qui indique le nombre de campeurs ayant des cheveux roux a été effacé accidentellement. Si 50 % des campeurs ont les cheveux bruns, combien de campeurs ont les cheveux roux?

(**A**) 5 (**B**) 10 (**C**) 25
(**D**) 50 (**E**) 60



Solution
D'après le diagramme, 25 campeurs ont les cheveux bruns, ce qui représente 50 % des campeurs. En tout, il y a donc 2×25, ou 50 campeurs. Il y a un total de 15 campeurs qui ont les cheveux verts ou noirs. Il y a donc $50-(25+15)$, ou 10 campeurs qui ont les cheveux roux. RÉPONSE : (B)

10. Henri a compté un total de 20 points dans les trois premières joutes de son équipe de basket-ball. Il a compté $\frac{1}{2}$ de ces points dans la première joute et $\frac{1}{10}$ de ces points dans la deuxième joute. Combien de points a-t-il comptés dans la troisième joute?

(**A**) 2 (**B**) 10 (**C**) 11 (**D**) 12 (**E**) 8

Solution
Henri a compté $\frac{1}{2}$ de 20, ou 10 points dans sa première joute. Dans sa deuxième joute, il a compté $\frac{1}{10}$ de 20, ou 2 points. Dans la troisième joute, il a compté $20-(2+10)$, ou 8 points.

RÉPONSE : (E)

Partie B

11. On prend un cube en bois pour en faire un dé juste et on indique les nombres 1, 1, 1, 2, 3 et 3 sur ses faces. Si on jette le dé une fois, quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair?

(**A**) $\frac{5}{6}$ (**B**) $\frac{4}{6}$ (**C**) $\frac{3}{6}$ (**D**) $\frac{2}{6}$ (**E**) $\frac{1}{6}$

Solution
Puisque le dé est juste, les six résultats possibles, 1, 1, 1, 2, 3 et 3, ont la même probabilité. Puisque cinq des résultats sont des nombres impairs, la probabilité d'obtenir un nombre impair est égale à $\frac{5}{6}$.

RÉPONSE : (A)

12. Dans une foire, le rapport du nombre de gros chiens au nombre de petits chiens est égal à 3:17. Il y a 80 chiens en tout à cette foire. Combien de gros chiens y a-t-il?

(**A**) 12 (**B**) 68 (**C**) 20 (**D**) 24 (**E**) 6

Solution
Puisque le rapport du nombre de gros chiens au nombre de petits chiens est égal à 3:17, il y a 3 gros chiens dans chaque groupe de 20 chiens. Puisqu'il y a 80 chiens en tout à cette foire, il y a 4 groupes de 20 chiens. Il y a donc 3×4, ou 12 gros chiens. RÉPONSE : (A)

13. Le produit de deux nombres naturels est égal à 24. La plus petite somme possible de ces deux nombres est égale à :
(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 11 (**D**) 14 (**E**) 25

Solution
Puisque le produit de deux nombres naturels est égal à 24, il ne peut s'agir que de 1×24, 2×12, 3×8 ou 4×6. La plus petite somme possible de deux de ces nombres est $4+6$, ou 10.
RÉPONSE : (B)

14. Dans le carré illustré, si on multiplie les nombres de chaque colonne, de chaque rangée ou de chaque diagonale, on obtient toujours le même résultat. La somme des deux nombres manquants est égale à :

12	1	18
9	6	4
		3

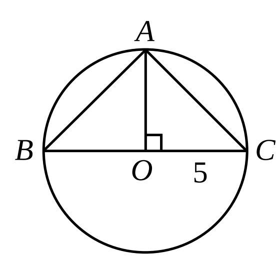
(**A**) 28 (**B**) 15 (**C**) 30
(**D**) 38 (**E**) 72

Solution
Les nombres de chaque colonne, de chaque rangée ou de chaque diagonale ont un produit de $(12)(1)(18)$, ou 216. On cherche donc deux nombres tels que $(12)(9)(\quad)=216$ et $(1)(6)(\quad)=216$. Les deux nombres sont 2 et 36 et leur somme est égale à 38. RÉPONSE : (D)

15. Un nombre premier est appelé *superpremier* si, lorsqu'on le double et que l'on soustrait 1 du résultat, on obtient un autre nombre premier. Le nombre de nombres superpremiers inférieurs à 15 est égal à :
(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Solution
Les nombres premiers inférieurs à 15 sont 2, 3, 5, 7, 11 et 13. Si on double chacun de ces nombres et que l'on soustrait 1 du résultat, on obtient 3, 5, 9, 13, 21 et 25. Trois des résultats sont des nombres premiers. Il y a donc trois nombres superpremiers inférieurs à 15. RÉPONSE : (B)

16. Dans le diagramme, BC est un diamètre du cercle de centre O et de rayon 5. Si A est sur le cercle et si AO est perpendiculaire à BC, l'aire du triangle ABC est égale à :



(**A**) 6,25 (**B**) 12,5 (**C**) 25
(**D**) 37,5 (**E**) 50

Solution
Puisque O est le centre du cercle et que le rayon est 5, alors $OB = AC = OC = 5$. Le triangle ABC a donc une base de 10 et une hauteur de 5. Son aire est égale à $\frac{1}{2}(10)(5)$, ou 25. RÉPONSE : (C)

17. Une pancarte rectangulaire mesure 9 m sur 16 m. Au milieu de la pancarte, on veut peindre une annonce de forme carrée. La bordure qui entoure l'annonce doit avoir une largeur d'au moins 1,5 m. L'aire de la plus grande annonce de forme carrée que l'on puisse peindre sur la pancarte est égale à :
(**A**) 78 m^2 (**B**) 144 m^2 (**C**) 36 m^2 (**D**) 9 m^2 (**E**) 56,25 m^2

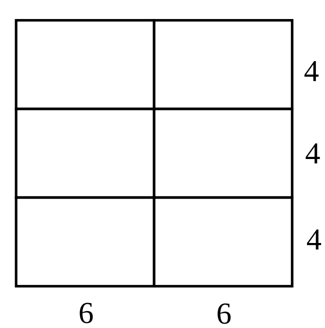
Solution
Le rectangle a une largeur de 9 m. Puisque la bordure doit avoir une largeur d'au moins 1,5 m, le carré aura une largeur maximale de $9 - 1{,}5 - 1{,}5$, ou 6 m. L'aire de ce carré est égale à 6×6, ou $36\ m^2$.
RÉPONSE : (C)

18. Avant de partir pour la France, Félix a changé 924,00 \$ en francs. Chaque franc valait 30 cents. S'il est revenu de son voyage avec 21 francs, combien de francs a-t-il dépensés?
(**A**) 3080 (**B**) 3101 (**C**) 256,2 (**D**) 3059 (**E**) 298,2

Solution
Puisque chaque franc vaut 0,30 \$, Félix a pu acheter $\frac{924}{0{,}30}$, ou 3080 francs. S'il est revenu avec 21 francs, il a dépensé $3080 - 21$, ou 3059 francs. RÉPONSE : (D)

19. On utilise des tuiles de forme rectangulaire, mesurant chacune 6 sur 4, pour recouvrir un carré sans que les tuiles ne débordent l'une sur l'autre. Le nombre minimal de tuiles qu'il faut pour recouvrir un espace de forme carrée est égal à :
(**A**) 8 (**B**) 24 (**C**) 4 (**D**) 12 (**E**) 6

Solution
Puisque les rectangles mesurent 6×4, les longueurs de leurs côtés sont dans un rapport de 3:2. Il faut donc placer deux colonnes de trois tuiles comme dans le diagramme. Il faut donc 6 tuiles.



RÉPONSE : (E)

20. Anne, Berthe et Carl ont 10 bonbons à partager entre eux. Anne reçoit au moins 3 bonbons, tandis que Berthe et Carl en reçoivent au moins 2 chacun. Si Carl en reçoit 3 au plus, le nombre de bonbons que Berthe pourrait recevoir est :
(**A**) 2 (**B**) 2 ou 3 (**C**) 3 ou 4 (**D**) 2, 3 ou 5 (**E**) 2, 3, 4 ou 5

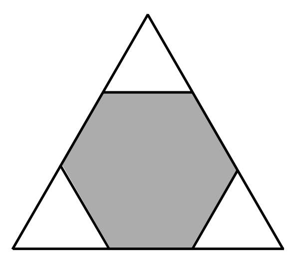
Solution
Si Anne reçoit 3 bonbons et si Carl en reçoit 2, Berthe en recevrait 5. Si Anne ou Carl reçoit plus de bonbons, Berthe pourrait en recevoir 4, 3 ou 2. RÉPONSE : (E)

Partie C

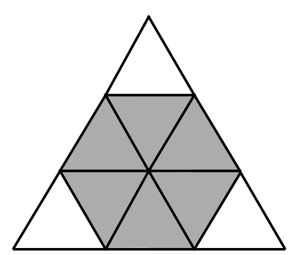
21. Naoki a écrit neuf tests, chacun sur 100 points. Sur les neuf tests, il a obtenu une moyenne de 68 %. Si on omet la note la plus basse, quelle est la plus grande moyenne possible qu'il pourrait obtenir sur ses autres tests?
(**A**) 76,5 % (**B**) 70 % (**C**) 60,4 % (**D**) 77 % (**E**) 76 %

Solution
Puisqu'il a obtenu une moyenne de 68 % sur neuf tests, Naoki a obtenu un total de 9×68, ou 612 points. S'il a obtenu une note de 0 sur un de ces tests et que cette note est omise, il aurait un total de 612 points sur huit tests. Sa nouvelle moyenne serait égale à $\frac{612}{8}$, ou 76,5 %.
RÉPONSE : (A)

22. Un hexagone régulier est inscrit dans un triangle équilatéral comme dans le diagramme. Si l'hexagone a une aire de 12 unités carrées, quelle est l'aire du triangle en unités carrées?
(**A**) 20 (**B**) 16 (**C**) 15
(**D**) 18 (**E**) 24



Solution
On peut diviser l'hexagone en 6 triangles équilatéraux identiques. De plus, les triangles blancs sont équilatéraux et ils partagent un côté avec les triangles ombrés. Le grand triangle est donc formé de 9 petits triangles équilatéraux identiques.
Puisque l'hexagone a une aire de 12 unités carrées, chaque petit triangle a une aire de 2 unités carrées. L'aire du grand triangle est donc égale à 9×2, ou 18 unités carrées.



RÉPONSE : (D)

23. Catrina peut parcourir 100 m en 10 secondes. Sedra peut parcourir 400 m en 44 secondes. Elles participent tous les deux à une course de 1 km, tout en maintenant ces vitesses respectives. Quelle est l'avance de la première, au mètre près, lorsqu'il franchit la ligne d'arrivée?
(**A**) 100 m (**B**) 110 m (**C**) 95 m (**D**) 90 m (**E**) 91 m

Solution

Catrina parcourt 100 m en 10 secondes. Sedra parcourt 400 m en 44 secondes, ou 100 m en 11 secondes. Sedra est donc la plus lente. Catrina mettra 10×10, ou 100 secondes pour parcourir 1000 m. Sedra parcourt $\frac{400}{44}$, ou 9,091 m par seconde. Pendant les 100 secondes que dure la course, elle aura parcouru $100 \times 9{,}091$, ou 909,1 m. Catrina aura donc une avance de 90,9 m sur Sedra lorsqu'elle terminera la course.

Réponse : (E)

24. Enzo a deux aquariums. Dans le premier, le rapport du nombre de guppys au nombre de poissons rouges est de 2:3. Dans le deuxième aquarium, le rapport est de 3:5. Si Enzo a 20 guppys en tout, le plus petit nombre de poissons rouges qu'il pourrait avoir est égal à :

(A) 29 **(B)** 30 **(C)** 31 **(D)** 32 **(E)** 33

Solution 1

Les tableaux suivants indiquent les nombres possibles de poissons dans les deux aquariums.

1er aquarium	
Nombre de guppys	Nombre de poissons rouges
2	3
4	6
6	9
8	12
10	15
12	18
14	21
16	24
18	27

2e aquarium	
Nombre de guppys	Nombre de poissons rouges
3	5
6	10
9	15
12	20
15	25
18	30

Les lignes relient les trois résultats qui donnent un nombre total de 20 guppys, c'est-à-dire $2+18$, $8+12$ et $14+6$. Les nombres correspondants de poissons rouges sont 33, 32 et 31. Le plus petit nombre de poissons rouges est 31.

Solution 2

Dans le premier aquarium, le rapport du nombre de guppys au nombre de poissons rouges est de 2:3. On considère donc que dans cet aquarium, le nombre de guppys est égal à $2a$ et que le nombre de poissons rouges est égal à $3a$. De même, on considère que le nombre de guppys dans le deuxième aquarium est égal à $3b$ et que le nombre de poissons rouges est égal à $5b$.

$2a+3b$	a	b	$3a+5b$
20	1	6	33
20	4	4	32
20	7	2	31

En tout, il y a 20 guppys, ce qui nous donne l'équation $2a+3b=20$. On considère les diverses valeurs possibles de a et de b, tout en calculant la valeur correspondante de $3a+5b$, le nombre total de poissons rouges. On voit, d'après le tableau, que le plus petit nombre possible de poissons rouges est 31.

Réponse : (C)

25. Il est possible de former un triangle dont les côtés ont des longueurs de 4, 5 et 8. Il est impossible de former un triangle dont les côtés ont des longueurs de 4, 5 et 9. Ron a huit bâtons dont les longueurs sont des entiers. Il constate qu'il est impossible de former un triangle avec n'importe quels trois bâtons. La longueur la plus courte possible du plus grand des huit bâtons est égale à :

(**A**) 20 (**B**) 21 (**C**) 22 (**D**) 23 (**E**) 24

Solution

Les trois plus petites longueurs possibles qui ne permettent pas à Ron de former un triangle sont 1, 1 et 2. On obtient la plus petite longueur possible suivante si on additionne les deux dernières longueurs. On a alors des bâtons de longueurs 1, 1, 2, 3. On continue à obtenir la plus petite longueur possible suivante si on additionne toujours les deux dernières longueurs. On obtient les longueurs 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. Il s'agit des 8 premiers termes de la suite célèbre de Fibonacci. La longueur la plus courte possible du plus grand des huit bâtons est 21.

RÉPONSE : (B)

✿✿✿✿✿✿✿✿✿

Partie A

1. En 1998, la population du Canada était de 30,3 millions. Lequel des nombres suivants est le même que 30,3 millions?

   (**A**) 30 300 000 (**B**) 303 000 000 (**C**) 30 300 (**D**) 303 000 (**E**) 30 300 000 000

   Solution

   Le nombre 30,3 millions peut être obtenu en multipliant 30,3 par $1\,000\,000$. On obtient alors $30\,300\,000$.

   RÉPONSE : (A)

2. Quel nombre doit-on placer dans la case pour que $\dfrac{6+\square}{20}=\dfrac{1}{2}$?

   (**A**) 10 (**B**) 4 (**C**) -5 (**D**) 34 (**E**) 14

   Solution

   La fraction $\frac{1}{2}$ peut être exprimée sous la forme $\frac{10}{20}$, avec dénominateur 20.

   L'équation devient $\dfrac{6+\square}{20}=\dfrac{10}{20}$. Les numérateurs doivent donc être égaux, ce qui donne $6+\square=10$. Le nombre dans la case doit être 4.

   RÉPONSE : (B)

3. La valeur de $3\times 4^2-(8\div 2)$ est :

   (**A**) 44 (**B**) 12 (**C**) 20 (**D**) 8 (**E**) 140

   Solution

   On a : $3\times 4^2-(8\div 2)$

   $= 48-4$

   $= 44$

   RÉPONSE : (A)

4. Lorsqu'on divise un certain nombre par 7, on obtient un quotient de 12 et un reste de 5. Le nombre est :

   (**A**) 47 (**B**) 79 (**C**) 67 (**D**) 119 (**E**) 89

   Solution

   Puisque le quotient est 12 et que le reste est 5, le nombre est $(7\times 12)+5$, ou 89.

   RÉPONSE : (E)

5. Si $2x-5=15$, la valeur de x est :

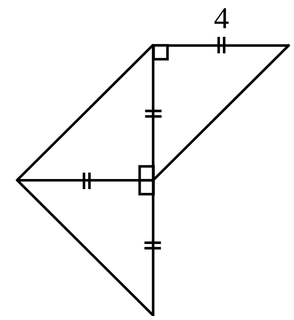
   (**A**) 5 (**B**) -5 (**C**) 10 (**D**) 0 (**E**) -10

   Solution

   Puisque $2x-5=15$, alors $2x=20$, d'où $x=10$.

   RÉPONSE : (C)

6. L'aire de la figure au complet est égale à :
(**A**) 16 (**B**) 32 (**C**) 20
(**D**) 24 (**E**) 64

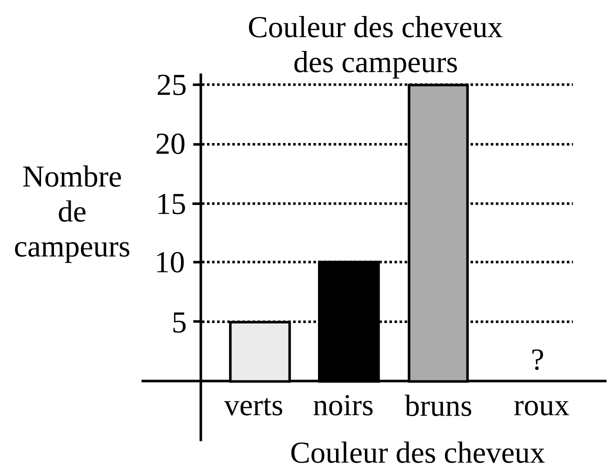


Solution

Chacun des petits triangles a une base de 4 et une hauteur de 4. Leur aire est égale à $\frac{1}{2}(4)(4)$, ou 8. L'aire de la figure au complet est égale à 3×8, ou 24.

RÉPONSE : (D)

7. Le diagramme en bâtons illustre la couleur des cheveux des campeurs au Camp d'été Gauss. Le bâton qui indique le nombre de campeurs ayant des cheveux roux a été effacé accidentellement. Si 50 % des campeurs ont les cheveux bruns, combien de campeurs ont les cheveux roux?
(**A**) 5 (**B**) 10 (**C**) 25
(**D**) 50 (**E**) 60



Solution

D'après le diagramme, 25 campeurs ont les cheveux bruns, ce qui représente 50 % des campeurs. En tout, il y a donc 2×25, ou 50 campeurs. Il y a un total de 15 campeurs qui ont les cheveux verts ou noirs. Il y a donc $50-(25+15)$, ou 10 campeurs qui ont les cheveux roux.

RÉPONSE : (B)

8. On prend un cube en bois pour en faire un dé juste et on indique les nombres 1, 1, 1, 2, 3 et 3 sur ses faces. Si on jette le dé une fois, quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair?
(**A**) $\frac{5}{6}$ (**B**) $\frac{4}{6}$ (**C**) $\frac{3}{6}$ (**D**) $\frac{2}{6}$ (**E**) $\frac{1}{6}$

Solution

Puisque le dé est juste, les six résultats possibles, 1, 1, 1, 2, 3 et 3, ont la même probabilité. Puisque cinq des résultats sont des nombres impairs, la probabilité d'obtenir un nombre impair est égale à $\frac{5}{6}$.

RÉPONSE : (A)

9. Dans le carré illustré, si on multiplie les nombres de chaque colonne, de chaque rangée ou de chaque diagonale, on obtient toujours le même résultat. La somme des deux nombres manquants est égale à :

12	1	18
9	6	4
		3

(**A**) 28 (**B**) 15 (**C**) 30
(**D**) 38 (**E**) 72

Solution
Les nombres de chaque colonne, de chaque rangée ou de chaque diagonale ont un produit de $(12)(1)(18)$, ou 216. On cherche donc deux nombres tels que $(12)(9)(\quad) = 216$ et $(1)(6)(\quad) = 216$. Les deux nombres sont 2 et 36 et leur somme est égale à 38. RÉPONSE : (D)

10. Roxanne peut tondre $\frac{2}{5}$ d'une pelouse en 18 minutes. Si elle a commencé à tondre la pelouse à 10 h et si elle a tondu à cette même vitesse, à quelle heure a-t-elle terminé?
(**A**) 10 h 08 (**B**) 11 h 30 (**C**) 10 h 40 (**D**) 10 h 25 (**E**) 10 h 45

Solution
Puisque Roxanne peut tondre $\frac{2}{5}$ de la pelouse en 18 minutes, elle peut tondre $\frac{1}{5}$ de la pelouse en 9 minutes. Elle met donc 5×9, ou 45 minutes pour tondre la pelouse au complet. Si elle commence à 10 h, elle termine donc à 10 h 45. RÉPONSE : (E)

Partie B

11. Dans une classe de 25 élèves, chaque élève a au plus un animal domestique. Trois cinquièmes des élèves ont un chat, 20 % ont un chien, trois ont un éléphant et les autres n'ont aucun animal. Combien d'élèves n'ont aucun animal domestique?
(**A**) 5 (**B**) 4 (**C**) 3 (**D**) 2 (**E**) 1

Solution
Trois cinquièmes des élèves représentent $\frac{3}{5} \times 25$, ou 15 élèves. Donc 15 élèves ont un chat. Vingt pour cent de 25 équivaut à $\frac{20}{100} \times 25$, ou 5 élèves. Donc 5 élèves ont un chien. Donc $15 + 5 + 3$, ou 23 élèves ont un animal domestique. Deux élèves n'ont aucun animal domestique. RÉPONSE : (D)

12. Un nombre premier est appelé *superpremier* si, lorsqu'on le double et que l'on soustrait 1 du résultat, on obtient un autre nombre premier. Le nombre de nombres superpremiers inférieurs à 15 est égal à :
(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Solution
Les nombres premiers inférieurs à 15 sont 2, 3, 5, 7, 11 et 13. Si on double chacun de ces nombres et que l'on soustrait 1 du résultat, on obtient 3, 5, 9, 13, 21 et 25. Trois des résultats sont des nombres premiers. Il y a donc trois nombres superpremiers inférieurs à 15. RÉPONSE : (B)

13. Laura gagne 10 $ l'heure et elle travaille 8 heures par jour pendant 10 jours. Elle dépense 25 % de son salaire pour se nourrir et se vêtir et elle paie ensuite son loyer de 350 $. Quelle somme lui restera-t-il?
(**A**) 275 $ (**B**) 200 $ (**C**) 350 $ (**D**) 250 $ (**E**) 300 $

Solution
En 10 jours, Laura travaille 8×10, ou 80 heures. Pendant ces 10 jours, elle gagne donc 80×10 $, ou 800 $. Puisque 25 % = $\frac{1}{4}$, elle dépense $\frac{1}{4}$ de 800 $, ou 200 $ pour se nourrir et se vêtir. Il lui reste alors 600 $. Après avoir payé son loyer de 350 $, il lui reste $600\ \$ - 350\ \$$, ou 250 $. RÉPONSE : (D)

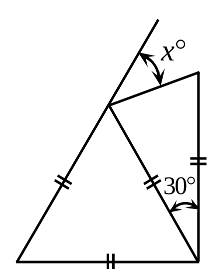
14. Une pancarte rectangulaire mesure 9 m sur 16 m. Au milieu de la pancarte, on veut peindre une annonce de forme carrée. La bordure qui entoure l'annonce doit avoir une largeur d'au moins 1,5 m. L'aire de la plus grande annonce de forme carrée que l'on puisse peindre sur la pancarte est égale à :
(**A**) $78\ \text{m}^2$ (**B**) $144\ \text{m}^2$ (**C**) $36\ \text{m}^2$ (**D**) $9\ \text{m}^2$ (**E**) $56.25\ \text{m}^2$

Solution
Le rectangle a une largeur de 9 m. Puisque la bordure doit avoir une largeur d'au moins 1,5 m, le carré aura une largeur maximale de $9 - 1,5 - 1,5$, ou 6 m. L'aire de ce carré est égale à 6×6, ou $36\ \text{m}^2$.
RÉPONSE : (C)

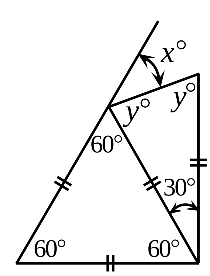
15. Un cube a une aire totale de 24 cm^2. Le volume de ce cube est égal à :
(**A**) $4\ \text{cm}^3$ (**B**) $24\ \text{cm}^3$ (**C**) $8\ \text{cm}^3$ (**D**) $27\ \text{cm}^3$ (**E**) $64\ \text{cm}^3$

Solution
Un cube est composé de six faces. L'aire de chaque face est égale à $\frac{1}{6}$ de $24\ \text{cm}^2$, ou $4\ \text{cm}^2$. Les arêtes du cube doivent donc avoir une longueur de 2 cm. Le volume du cube est donc égal à $2 \times 2 \times 2\ \text{cm}^3$, ou $8\ \text{cm}^3$. RÉPONSE : (C)

16. Dans le diagramme, la valeur de x est :
(**A**) 30 (**B**) 40 (**C**) 60
(**D**) 50 (**E**) 45



Solution
Chaque angle du triangle équilatéral mesure 60°. Le deuxième triangle est isocèle. Les deux angles à sa base sont donc congrus. Disons qu'ils mesurent $y°$ chacun. Puisque le troisième angle mesure 30°, les deux angles à la base mesurent 150° en tout car la somme des mesures des angles du triangle égale 180°. Donc $2y° = 150°$, d'où $y° = 75°$.



Les angles dont les mesures sont $x°$, $y°$ et 60°, en haut à gauche, forment un angle plat. Donc :

$$x° + y° + 60° = 180°$$
$$x° + 75° + 60° = 180°$$

Donc $x = 45$. Réponse : (E)

17. L'âge de Daniel est un neuvième de l'âge de son père. Dans un an, l'âge de son père sera sept fois l'âge de Daniel. La différence entre leur âge est égale à :

(**A**) 24 (**B**) 25 (**C**) 26 (**D**) 27 (**E**) 28

Solution

Soit d l'âge de Daniel. L'âge de son père est donc $9d$.

Dans un an, l'âge de Daniel sera $d+1$ et l'âge de son père sera $9d+1$.

Donc : $9d+1 = 7(d+1)$

$$9d+1 = 7d+7$$
$$2d = 6$$
$$d = 3$$

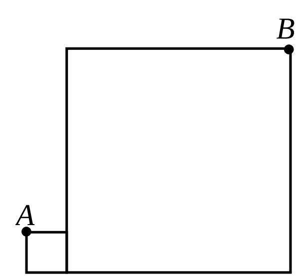
Daniel a donc 3 ans et son père a 27 ans. La différence entre leur âge est égale à 24.

Réponse : (A)

18. Dans le diagramme, le petit carré a des côtés de longueur 1, tandis que le grand carré a des côtés de longueur 7. La longueur AB est égale à :

(**A**) 14 (**B**) $\sqrt{113}$ (**C**) 10

(**D**) $\sqrt{85}$ (**E**) $\sqrt{72}$

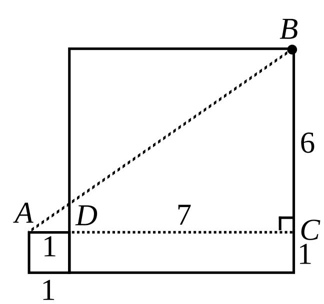


Solution

D'après le diagramme, $AC = 8$ et $BC = 6$.

Le triangle ABC est rectangle.

D'après le théorème de Pythagore :



$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$AB^2 = 8^2 + 6^2$$
$$AB^2 = 64 + 36$$
$$AB^2 = 100$$
$$AB = 10$$

Réponse : (C)

19. Anne, Berthe et Carl ont 10 bonbons à partager entre eux. Anne reçoit au moins 3 bonbons, tandis que Berthe et Carl en reçoivent au moins 2 chacun. Si Carl en reçoit 3 au plus, le nombre de bonbons que Berthe pourrait recevoir est :

(**A**) 2 (**B**) 2 ou 3 (**C**) 3 ou 4 (**D**) 2, 3 ou 5 (**E**) 2, 3, 4 ou 5

Solution

Si Anne reçoit 3 bonbons et si Carl en reçoit 2, Berthe en recevrait 5. Si Anne ou Carl reçoit plus de bonbons, Berthe pourrait en recevoir 4, 3 ou 2. RÉPONSE : (E)

20. Quel nombre doit-on placer dans la case pour que $10^4 \times 100^{\square} = 1000^6$?

(**A**) 7 (**B**) 5 (**C**) 2 (**D**) $\frac{3}{2}$ (**E**) 10

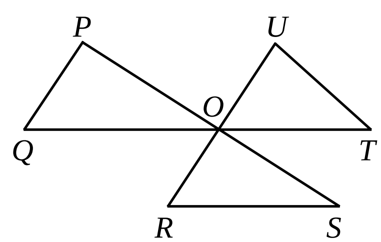
Solution

Puisque 1000 comporte 3 zéros, 1000^6 comporte 18 zéros. Le membre de gauche de l'équation comporte donc 18 zéros. Puisque le nombre 10^4 comporte 4 zéros, le nombre $100^{\square}$ comporte 14 zéros. Puisque 100 comporte 2 zéros, on doit placer le nombre 7 dans la case. RÉPONSE : (A)

Partie C

21. Les segments PS, QT et RU se coupent en un même point O. On joint ensuite P et Q, R et S, de même que T et U de manière à former des triangles. La valeur de $\angle P + \angle Q + \angle R + \angle S + \angle T + \angle U$ est :

(**A**) 450° (**B**) 270° (**C**) 360°
(**D**) 540° (**E**) 720°



Solution

Puisque les angles POQ, POU et TOU forment un angle plat, $\angle POQ + \angle POU + \angle TOU = 180°$.
Puisque les angles POU et ROS sont opposés par le sommet, $\angle POU = \angle ROS$.
Donc $\angle POQ + \angle ROS + \angle TOU = 180°$.
La somme des mesures des angles de chaque triangle est égale à 180°.
Donc $(\angle P + \angle Q + \angle POQ) + (\angle R + \angle S + \angle ROS) + (\angle T + \angle U + \angle TOU) = 3 \times 180°$.
Les angles POQ, ROS et TOU contribuent 180° à cette somme.
La somme des mesures des autres angles est donc égale à $2 \times 180°$.
Donc $\angle P + \angle Q + \angle R + \angle S + \angle T + \angle U = 360°$. RÉPONSE : (C)

22. Soixante-quatre cubes blancs de dimensions $1\times1\times1$ sont utilisés pour former un cube de dimensions $4\times4\times4$. Ce grand cube est ensuite peint en rouge sur chacune de ses six faces. On défait ensuite le grand cube en 64 petits cubes. On attribue ensuite à chaque petit cube un nombre de points comme l'indique le tableau.

Nombre exact de faces rouges	Nombre de points
3	3
2	2
1	1
0	-7

Le nombre total de points pour l'ensemble des cubes est égal à :

(**A**) 40 (**B**) 41 (**C**) 42 (**D**) 43 (**E**) 44

Solution

Le grand cube est formé de 64 petits cubes. Tous les petits cubes qui forment l'extérieur du grand cube sont peints sur une, deux ou trois faces. Si on les enlève, il reste un cube de dimensions $2\times2\times2$, formé de 8 cubes non peints.

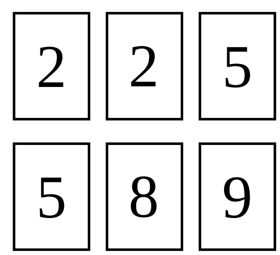
Selon le barème de points, on attribue 1 point par face rouge. Puisque chaque face du grand cube est formée de 16 petites faces rouges, il y aura 6×16, ou 96 petites faces rouges pour un total de 96 points.

Pour chacun des 8 cubes non peints, on enlève 7 points, pour un total de 56 points.

Le nombre total de points pour l'ensemble des cubes est égal à $96-56$, ou 40.

RÉPONSE : (A)

23. On écrit les nombres 2, 2, 5, 5, 8 et 9 sur des cartes comme dans le diagramme. On choisit n'importe quel nombre de cartes et on additionne les nombres sur ces cartes. On remarque qu'il est impossible d'obtenir une somme de 1 ou de 30. Combien des nombres entiers de 1 à 31 ne peuvent pas être obtenus comme somme?



(**A**) 4 (**B**) 22 (**C**) 8
(**D**) 10 (**E**) 6

Solution

On remarque d'abord que la somme des nombres sur les 6 cartes est égale à 31.

On remarque aussi que si on choisit certaines cartes pour obtenir une somme *S*, alors les autres cartes donneront une somme de $31-S$.

Il suffit donc de chercher à obtenir des sommes de 1 à 15. Les autres sommes, de 16 à 31, seraient obtenues par les cartes non choisies. Par exemple, si on choisit les cartes 2 et 2, qui ont une somme de 4, il reste les cartes 5, 5, 8 et 9, qui ont une somme de 27.

On voit assez facilement qu'il est possible d'obtenir des sommes de 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 et 15, mais qu'il est impossible d'obtenir des sommes de 1, 3 ou 6. Il sera donc impossible d'obtenir des sommes de $31-1$, $31-3$ ou $31-6$.

Il y a donc 6 nombres entiers de 1 à 31 qui ne peuvent pas être obtenus comme somme.

RÉPONSE : (E)

24. Il est possible de former un triangle dont les côtés ont des longueurs de 4, 5 et 8. Il est impossible de former un triangle dont les côtés ont des longueurs de 4, 5 et 9. Ron a huit bâtons dont les longueurs sont des entiers. Il constate qu'il est impossible de former un triangle avec n'importe quels trois bâtons. La longueur la plus courte possible du plus grand des huit bâtons est égale à :
(**A**) 20 (**B**) 21 (**C**) 22 (**D**) 23 (**E**) 24

Solution
Les trois plus petites longueurs possibles qui ne permettent pas à Ron de former un triangle sont 1, 1 et 2. On obtient la plus petite longueur possible suivante si on additionne les deux dernières longueurs. On a alors des bâtons de longueurs 1, 1, 2, 3. On continue à obtenir la plus petite longueur possible suivante si on additionne toujours les deux dernières longueurs. On obtient les longueurs 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. Il s'agit des 8 premiers termes de la suite célèbre de Fibonacci. La longueur la plus courte possible du plus grand des huit bâtons est 21. RÉPONSE : (B)

25. Antoine et Marie s'entraînent pour une course en montant et en descendant une pente de ski, longue de 700 m, au pas de course. La vitesse de chacun, en descendant, est le double de sa vitesse en montant. Marie arrive la première au sommet et se met immédiatement à redescendre. Elle croise Antoine à 70 m du sommet. Lorsque Marie arrive au pied de la pente, à quelle distance Antoine est-il derrière elle?
(**A**) 140 m (**B**) 250 m (**C**) 280 m (**D**) 300 m (**E**) 320 m

Solution
Marie monte la pente de 700 m à une certaine vitesse et la redescend deux fois plus vite. C'est l'équivalent, en temps, de monter une pente de $(700+350)$ m, ou 1050 m.
Lorsque Marie et Antoine se rencontrent, Marie a parcouru 700 m en montant et 70 m en descendant, ce qui est l'équivalent, en temps, de $(700+35)$ m, ou 735 m en montant. Pendant ce temps, Antoine a parcouru $(700-70)$ m, ou 630 m.

Le rapport de leurs vitesses (distances parcourues dans un même temps) est égal à $\frac{735}{630}=\frac{7(105)}{6(105)}=\frac{7}{6}$.

C'est-à-dire que Marie parcourt 7 m pour chaque 6 m que parcourt Antoine.
Pendant la course au complet, Marie monte l'équivalent d'une pente de 1050 m. Pendant ce temps, Antoine parcourt donc l'équivalent de $\left(\frac{6}{7}\times 1050\right)$ m, ou 900 m en montant, c'est-à-dire 700 m + 200 m en montant. Cela correspond à 700 m en montant et 400 m en descendant. Il est donc à 300 m du pied de la pente, c'est-à-dire à 30 m derrière Marie, lorsque la course est terminée.
RÉPONSE : (D)

✿✿✿✿✿✿✿✿✿✿