Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2001 Solutions
Concours Fermat (11e - Sec. V)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

Partie A

1. Si $x+2x+3x+4x=5$, alors x est égal à :

(A) 10 **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{5}{4}$ **(D)** 2 **(E)** $\frac{5}{9}$

Solution

$$\begin{aligned} x+2x+3x+4x &= 5 \\ 10x &= 5 \\ x &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

RÉPONSE : (B)

2. Si $x=\frac{1}{4}$, laquelle des expressions suivantes a la plus grande valeur?

(A) x **(B)** x^2 **(C)** $\frac{1}{2}x$ **(D)** $\dfrac{1}{x}$ **(E)** $\sqrt{x}$

Solution
On calcule la valeur de chaque expression.

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

(C) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$

(D) $\dfrac{1}{\frac{1}{4}} = 1\times 4 = 4$

(E) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

RÉPONSE : (D)

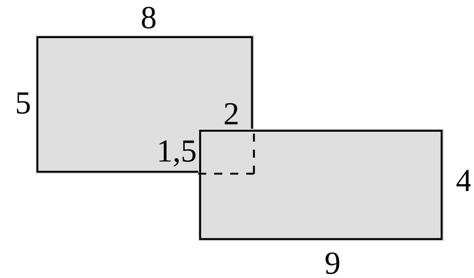
3. Dans une école, 20 filles et 30 garçons se sont inscrits au concours Fermat. Des certificats ont été remis à 20 % des filles et à 10 % des garçons. Quel pourcentage des élèves inscrits ont reçu un certificat?

(A) 14 **(B)** 15 **(C)** 16 **(D)** 30 **(E)** 50

Solution
Puisque 30 garçons se sont inscrits et que 10 % d'entre eux ont reçu un certificat, alors $(0,1)(30)$, ou 3 garçons ont reçu un certificat. De même, des 20 filles qui se sont inscrites, $(0,2)(20)$, ou 4 filles ont reçu un certificat. Il y a donc 7 élèves sur 50, ou 14 % des élèves qui ont reçu un certificat.

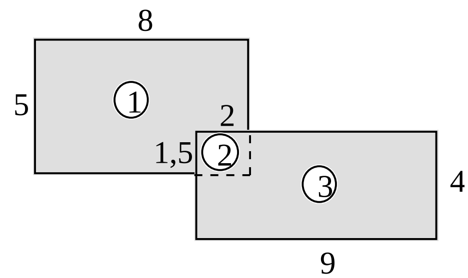
RÉPONSE : (A)

4. Deux rectangles sont partiellement superposés comme dans le diagramme. La partie commune forme un rectangle. L'aire totale de la région ombrée est égale à :



(**A**) 45 (**B**) 70 (**C**) 52
(**D**) 76 (**E**) 73

Solution 1



Aire de 1 = aire du grand rectangle – aire du rectangle 2
$= 40 - 3$
$= 37$

Aire de 3 = aire du grand rectangle – aire du rectangle 2
$= 36 - 3$
$= 33$

L'aire de la région ombrée est égale à : 1 + 2 + 3
$= 37 + 3 + 33$
$= 73$

Solution 2

Aire de la région ombrée
= (aire du rectangle 5×8) + (aire du rectangle 4×9) – (aire du chevauchement)
$= 40 + 36 - 3$
$= 73$

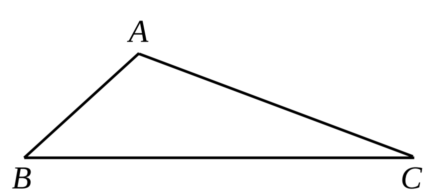
RÉPONSE : (E)

5. Dans le triangle ABC, $\angle A = 3\angle B$ et $\angle B = 2\angle C$. La mesure de l'angle B est égale à :

(**A**) 10° (**B**) 20° (**C**) 30° (**D**) 40° (**E**) 60°

Solution

Puisqu'il s'agit d'un triangle, on a :



$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$
$$3(\angle B) + \angle B + \frac{1}{2}(\angle B) = 180°$$
$$\frac{9}{2}(\angle B) = 180°$$
$$\angle B = 40°$$

RÉPONSE : (D)

6. Patrick remet la moitié de ses billes à son meilleur ami, puis il remet un tiers des billes qu'il lui reste à sa sœur. Si sa sœur reçoit 9 billes, alors le nombre de billes que Patrick garde pour lui est :

(**A**) 27 (**B**) 54 (**C**) 18 (**D**) 36 (**E**) 9

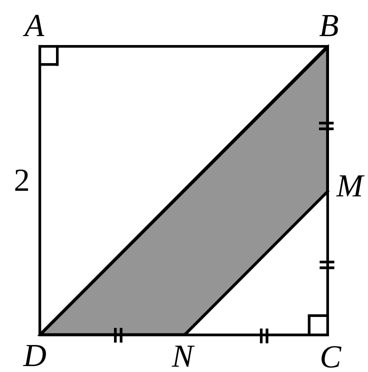
Solution
Soit x le nombre initial de billes que Patrick avait en sa possession.
Il donne donc $\frac{1}{2}x$ billes à son meilleur ami et $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}x$, ou $\frac{1}{6}x$ billes à sa sœur.
Donc : $\frac{1}{6}x = 9$

$x = 54$

Patrick a donc remis 27 billes à son ami et 9 billes à sa sœur.
Le nombre de billes que Patrick garde pour lui est égal à $54-27-9$, ou 18.

RÉPONSE : (C)

7. Dans le diagramme, le carré $ABCD$ a des côtés de longueur 2, M est le milieu de BC et N est le milieu de CD. L'aire de la région ombrée $BMND$ est égale à :



(**A**) 1 (**B**) $2\sqrt{2}$ (**C**) $\frac{4}{3}$
(**D**) $\frac{3}{2}$ (**E**) $4-\frac{3}{2}\sqrt{2}$

Solution
L'aire du triangle MNC est égale à $\frac{1}{2}(1)(1)$, ou $\frac{1}{2}$. Puisque le triangle BDC est la moitié du carré, son aire est égale à 2.
L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du triangle BDC moins celle du triangle MNC.
Elle est donc égale à $2-\frac{1}{2}$, ou $\frac{3}{2}$.

RÉPONSE : (D)

8. Si $\sqrt{5+11-7} = \sqrt{5+11} - \sqrt{x}$, alors la valeur de x est :

(**A**) 1 (**B**) 7 (**C**) -7 (**D**) 49 (**E**) 4

Solution

$$\sqrt{5+11-7} = \sqrt{5+11} - \sqrt{x}$$
$$\sqrt{9} = \sqrt{16} - \sqrt{x}$$
$$3 = 4 - \sqrt{x}$$
$$\sqrt{x} = 1$$
$$x = 1$$

RÉPONSE : (A)

9. Un sac contient 20 bonbons : 4 au chocolat, 6 à la menthe et 10 au caramel. Des bonbons sont retirés du sac, au hasard, et mangés. Quel est le nombre minimum de bonbons qu'il faut retirer du sac pour être *certain* qu'au moins deux bonbons de chaque sorte ont été mangés?

(**A**) 6 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 16 (**E**) 18

Solution
Au plus, on pourrait retirer 17 bonbons avant de retirer un deuxième bonbon au chocolat, soit tous les 6 bonbons à la menthe, les 10 bonbons au caramel et un bonbon au chocolat.
Il faut donc retirer au moins 18 bonbons du sac pour être certain qu'au moins deux bonbons de chaque sorte ont été mangés. RÉPONSE : (E)

10. Lorsqu'un entier positif *N* est divisé par 60, le reste est égal à 49. Lorsque *N* est divisé par 15, le reste est égal à :

(**A**) 0 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 8

Solution
Il y a plusieurs façons de résoudre ce problème. Voici une façon facile. Puisque *N* donne un reste de 49 lorsqu'on le divise par 60, *N* doit être un nombre de la forme $60k+49$, $k=0,1,2,...$
Les premières valeurs possibles de *N* sont 49, 109, 169, 229, … Si on divise ces nombres par 15, on obtient toujours un reste de 4. RÉPONSE : (C)

Partie B

11. La racine quatrième de 2001200120012001 (c'est-à-dire $\sqrt[4]{2001200120012001}$) est plus près de :

(**A**) 2 001 (**B**) 6 700 (**C**) 21 000 (**D**) 12 000 (**E**) 2 100

Solution
2001200120012001 est à peu près égal à 2×10^{15}, ou 2000×10^{12}.
La racine quatrième du nombre est donc à peu près égale à $\sqrt[4]{2000\times10^{12}}$, c'est-à-dire à $\sqrt[4]{2000}\times10^{3}$, ou $6,7\times1000$. Elle est donc plus près de 6700. RÉPONSE : (B)

12. Combien y a-t-il de valeurs entières de *x* qui vérifient $\frac{x-1}{3}<\frac{5}{7}<\frac{x+4}{5}$?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

Solution
Si on multiplie les trois fractions par $3(5)(7)$, les inégalités sont conservées et on a :

$$\cancel{(3)}(5)(7)\frac{(x-1)}{\cancel{3}} < (3)(5)\cancel{(7)}\frac{5}{\cancel{7}} < (3)\cancel{(5)}(7)\frac{x+4}{\cancel{5}}$$

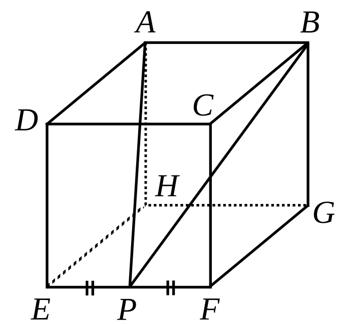
$$35(x-1) < 75 < 21(x+4)$$

On doit donc avoir :

$$35(x-1) < 75 \quad \text{et} \quad 21(x+4) > 75$$
$$35x - 35 < 75 \quad \text{et} \quad 21x + 84 > 75$$
$$35x < 110 \qquad 21x > -9$$
$$x < 3\tfrac{1}{7} \qquad x > -\tfrac{9}{21}$$

Les seules valeurs entières de x qui vérifient les deux inéquations simultanément sont 0, 1, 2 et 3. Il y en a quatre. RÉPONSE : (E)

13. $ABCDEFGH$ est un cube ayant des côtés de longueur 2. P est le milieu de EF. L'aire du triangle APB est égale à :



(**A**) $\sqrt{8}$ (**B**) 3 (**C**) $\sqrt{32}$
(**D**) $\sqrt{2}$ (**E**) 6

Solution

La base AB du triangle APB a une longueur de 2. La hauteur correspondante du triangle est égale à BF. D'après le théorème de Pythagore, $BF = \sqrt{2^2 + 2^2}$, c'est-à-dire que $BF = \sqrt{8}$.

L'aire du triangle APB est égale à $\dfrac{2 \times \sqrt{8}}{2}$, ou $\sqrt{8}$. RÉPONSE : (A)

14. Le dernier chiffre (c'est-à-dire le chiffre des unités) du nombre $(2002)^{2002}$ est :

(**A**) 4 (**B**) 2 (**C**) 8 (**D**) 0 (**E**) 6

Solution

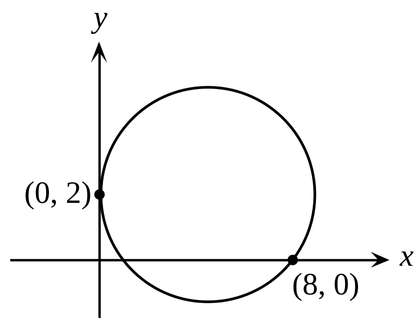
Le chiffre des unités du nombre $(2002)^{2002}$ est le même que celui du nombre 2^{2002}, puisque les trois autres chiffres de 2002 n'ont aucun effet sur le chiffre des unités de la réponse.

On écrit les premières puissances de 2 et on cherche une régularité dans le chiffre des unités.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512

On voit que les chiffres des unités se répètent à toutes les quatre puissances. Celui de 2^{2000} est 6 et celui de 2^{2002} est 4. Le chiffre des unités de $(2002)^{2002}$ est donc 4. RÉPONSE : (A)

15. Un cercle est tangent à l'axe des y au point $(0, 2)$ et la plus grande de ses abscisses à l'origine est 8. Le rayon du cercle est égal à :

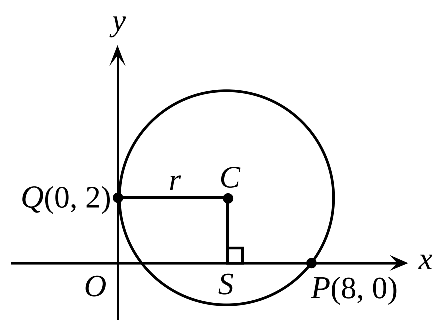


(**A**) $\frac{9}{2}$ (**B**) $\sqrt{17}$ (**C**) $\frac{17}{4}$

(**D**) $\frac{15}{4}$ (**E**) $\frac{\sqrt{17}}{2}$

Solution

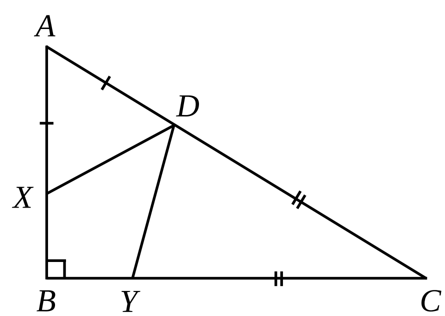
Soit C le centre du cercle et r son rayon.
Alors CQ est perpendiculaire à l'axe des y et sa longueur est r.
L'abscisse de C est donc r et son ordonnée est 2.
On a donc $C(r, 2)$.
On abaisse une perpendiculaire CS à l'axe des x.
Dans le triangle rectangle CSP, on a $CP = r$, $CS = 2$ et $SP = 8 - r$.



D'après le théorème de Pythagore, on a $r^2 = (8 - r)^2 + 2^2$, d'où $r^2 = 64 - 16r + r^2 + 4$, $16r = 68$ et $r = \frac{17}{4}$.

RÉPONSE : (C)

16. Dans un triangle rectangle ABC, $AX = AD$ et $CY = CD$, comme l'indique le diagramme. La mesure de l'angle XDY est :



(**A**) 35° (**B**) 40° (**C**) 45°
(**D**) 50° (**E**) indéterminée par ces données

Solution

Soit $\angle DYC = \theta$. Puisque le triangle YDC est isocèle, $\angle YDC = \theta$.

Donc $\angle YCD = 180° - 2\theta$ (somme des angles du triangle YDC).

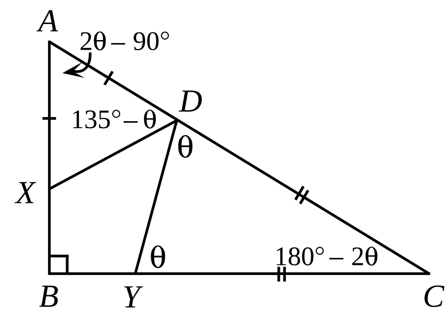
Donc $\angle CAB = 2\theta - 90°$ (somme des angles du triangle ABC).

Dans le triangle AXD, $\angle AXD = \angle ADX$, d'où $2\theta - 90° + 2\angle AXD = 180°$.

Donc $\angle AXD = 135° - \theta$.

Or : $\angle ADX + \angle XDY + \angle YDC = 180°$

$$\angle XDY = 45°$$



RÉPONSE : (C)

17. Trois nombres différents sont choisis tels que lorsqu'on additionne tour à tour un des nombres à la moyenne des deux autres, on obtient 65, 69 et 76. La moyenne des trois nombres choisis est égale à :

(**A**) 34 (**B**) 35 (**C**) 36 (**D**) 37 (**E**) 38

Solution

Soit a, b et c les trois nombres.

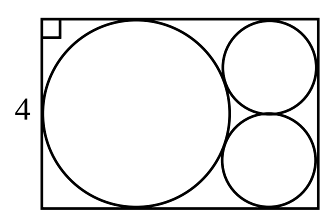
Selon l'énoncé, on a $a + \frac{b+c}{2} = 65$, $b + \frac{c+a}{2} = 69$ et $c + \frac{a+b}{2} = 76$.

On multiplie chaque membre de chaque équation par 2 pour obtenir $2a + b + c = 130$, $a + 2b + c = 138$ et $a + b + 2c = 152$.

On additionne les trois équations, membre par membre, pour obtenir $4a + 4b + 4c = 420$, ou $a + b + c = 105$.

La moyenne des trois nombres est égale à $\frac{a+b+c}{3}$, ou 35. RÉPONSE : (B)

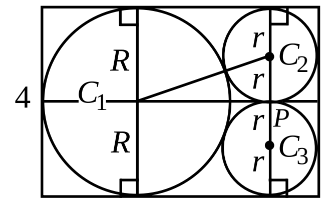
18. Les deux petits cercles du diagramme ont le même rayon. Chacun des trois cercles est tangent aux deux autres cercles et chacun est tangent à des côtés du rectangle. Si le rectangle a une largeur de 4, sa longueur est égale à :



(**A**) $2 + \sqrt{8}$ (**B**) $3 + \sqrt{8}$ (**C**) $3 + \sqrt{10}$

(**D**) $\sqrt{32}$ (**E**) $4 + \sqrt{3}$

Solution



Soit R le rayon du grand cercle et r celui des petits cercles.
Puisque les cercles sont tangents aux côtés du rectangle, les rayons sont perpendiculaires aux côtés du rectangle. On a donc $2R = 4$, d'où $R = 2$. De plus, $4r = 4$, d'où $r = 1$.
Soit C_1, C_2 et C_3 les centres des cercles et P le point de tangence des petits cercles.
On trace le segment C_1P et on le prolonge jusqu'aux côtés du rectangle.
La longueur du rectangle est égale à $R + C_1P + r$, ou $3 + C_1P$.
Le segment C_1C_2 passe par le point de tangence de deux cercles. Sa longueur est donc égale à $R + r$, c'est-à-dire à 3.
Puisque C_1P est perpendiculaire à C_2P, le triangle C_1C_2P est rectangle. D'après le théorème de Pythagore, on a $3^2 = (C_1P)^2 + 1^2$, d'où $(C_1P)^2 = 8$ et $C_1P = 2\sqrt{2}$.
La longueur du rectangle est donc égale à $3 + 2\sqrt{2}$. RÉPONSE : (B)

19. À chaque jour, Carla quitte l'école à la même heure. Si elle pédale à une vitesse de 20 km/h, elle arrive à la maison à 16 h 30. Si elle pédale à une vitesse de 10 km/h, elle arrive à la maison à 17 h 15. À quelle vitesse, en km/h, doit-elle pédaler pour arriver à la maison à 17 h?

(**A**) $16\frac{2}{3}$ (**B**) 15 (**C**) $13\frac{1}{3}$ (**D**) 12 (**E**) $18\frac{3}{4}$

Solution
On sait que la distance à parcourir est la même dans tous les cas. On a donc une équation :
Distance parcourue à 20 km/h = Distance parcourue à 10 km/h

Soit t le temps, en heures, que prend Carla lorsqu'elle pédale à une vitesse de 20 km/h.
Lorsqu'elle pédale à une vitesse de 10 km/h, elle prend 45 minutes de plus et le temps qu'elle prend est donc égal à $t + \frac{3}{4}$. L'équation devient donc :

$$20t = 10\left(t + \frac{3}{4}\right)$$
$$20t = 10t + \frac{30}{4}$$
$$10t = \frac{15}{2}$$
$$t = \frac{15}{20} \text{ ou } \frac{3}{4}$$

Donc $d = 20 \times \frac{3}{4}$, ou $d = 15$ km.

Si elle arrive à 17 h, alors $t = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$, ou $t = \frac{5}{4}$. Soit v sa vitesse lorsqu'elle arrive à cette heure.

Donc $v = \dfrac{d}{t}$.

$$v = \frac{15}{\frac{5}{4}}$$

$$v = 15 \times \frac{4}{5}$$

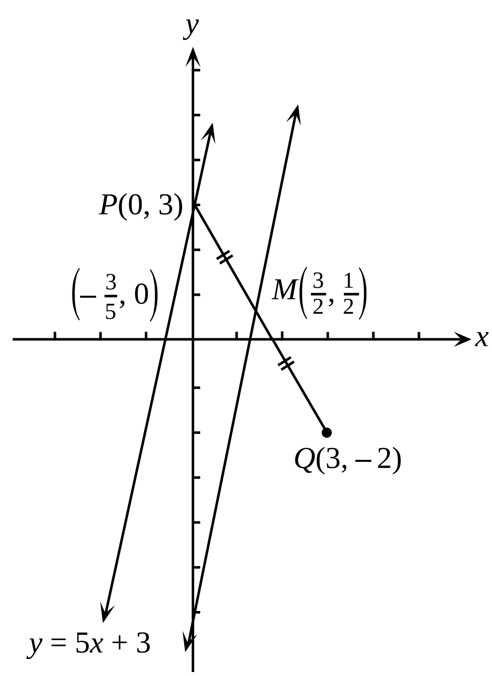
$$v = 12 \text{ km/h}$$

Carla doit pédaler à une vitesse de 12 km/h pour arriver à 17 h. RÉPONSE : (D)

20. On considère un point P sur la droite d'équation $y = 5x + 3$ et le point Q dont les coordonnées sont $(3, -2)$. Si M est le milieu du segment PQ, alors M doit être situé sur la droite d'équation :

(**A**) $y = \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}$ (**B**) $y = 5x + 1$ (**C**) $y = -\frac{1}{5}x - \frac{7}{5}$ (**D**) $y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$ (**E**) $y = 5x - 7$

On trace la droite donnée, définie par $y = 5x + 3$. Elle passe par le point $(0, 3)$.



Solution 1

On choisit le point $P(0, 3)$ sur la droite.

Le milieu du segment PQ est le point $M\left(\frac{3+0}{2}, \frac{-2+3}{2}\right)$, ou $M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

La droite que l'on cherche doit passer par le point M et doit passer par le milieu de n'importe quel segment joignant un point de la droite donnée et le point Q. La seule droite qui satisfait à cette condition est la droite de pente 5, passant par $M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Son équation est :

$$y - \tfrac{1}{2} = 5\left(x - \tfrac{3}{2}\right)$$

ou $$y = 5x - 7$$

Solution 2

Soit $P(a, 5a + 3)$ un point sur la droite d'équation $y = 5x + 3$ et soit $M(x, y)$ le milieu du segment PQ. On cherche une équation de la droite qui contient tous les points M. Puisque $M(x, y)$ est le milieu de PQ :

$$M(x, y) = \left(\frac{a+3}{2}, \frac{(5a+3)+(-2)}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{a+3}{2}, \frac{5a+1}{2}\right)$$

On a donc $x = \dfrac{a+3}{2}$ et $y = \dfrac{5a+1}{2}$. On isole a dans chaque équation pour obtenir $a = 2x - 3$ et

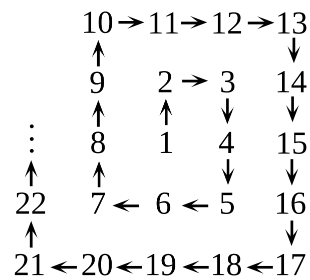
$a = \dfrac{2y-1}{5}$. Puisqu'il s'agit du même a, alors $2x-3=\dfrac{2y-1}{5}$.

$$10x-15=2y-1$$
$$y=5x-7$$

L'équation est $y=5x-7$. RÉPONSE : (E)

Partie C

21. On forme une spirale de nombres, en commençant par 1, comme dans le diagramme. Si la spirale est prolongée de la même façon, dans laquelle des configurations suivantes retrouvera-t-on les nombres 399, 400 et 401?



(**A**) $399 \rightarrow 400 \rightarrow 401$ (**B**) $401 \leftarrow 400 \leftarrow 399$

(**C**) $\begin{array}{c} 401 \\ \uparrow \\ 400 \\ \uparrow \\ 399 \end{array}$ (**D**) $\begin{array}{c} 399 \\ \downarrow \\ 400 \\ \downarrow \\ 401 \end{array}$ (**E**) $\begin{array}{cc} 400 & \rightarrow 401 \\ \uparrow & \\ 399 & \end{array}$

Solution

On remarque les configurations suivantes :

2	3
1	4
	5

et

10	11	12	13
9	2	3	14
8	1	4	15
7	6	5	16
			17

Si on ajoute un tour de la spirale, on a :

26	27	28	29	30	31
25	10	11	12	13	32
24	9	2	3	14	33
23	8	1	4	15	34
22	7	6	5	11	35
21	20	19	18	17	36
					37

On voit donc que tous les carrés parfaits pairs paraissent dans la configuration suivante.

$$(2k)^2-1$$
$$\downarrow$$
$$(2k)^2$$
$$\downarrow$$
$$(2k)^2+1$$

Le nombre $400=(20)^2$ paraît donc dans la configuration :

$$399$$
$$\downarrow$$
$$400$$
$$\downarrow$$
$$401$$

RÉPONSE : (D)

22. Une bouteille fermée, contenant de l'eau, a été construite en attachant un cylindre de rayon 1 cm à un cylindre de rayon 3 cm, comme dans la Figure A. Lorsque la bouteille est tenue à l'endroit, le niveau de l'eau est à une hauteur de 20 cm, comme l'illustre la vue de face dans la Figure B. Lorsque la bouteille est tenue à l'envers, le niveau de l'eau est à une hauteur de 28 cm, comme l'illustre la Figure C. Quelle est la hauteur totale de la bouteille, en centimètres?

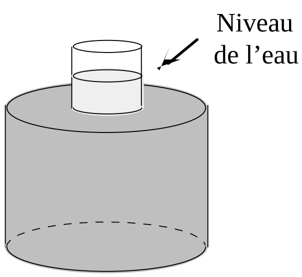


Figure A

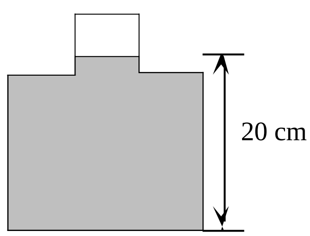


Figure B

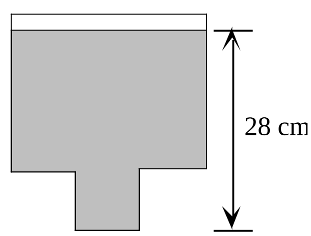


Figure C

(**A**) 29 (**B**) 30 (**C**) 31 (**D**) 32 (**E**) 48

Solution

Soit h la hauteur totale de la bouteille, en centimètres.

Le volume de l'eau est le même dans les deux positions. De même, le volume de la partie vide est le même dans les deux positions. Or il est plus facile de calculer le volume des deux parties vides.

Dans la figure B, la partie vide a une hauteur égale à $h-20$.

Son volume est donc égal à $\pi\times 1^2\times(h-20)$, ou $\pi(h-20)$.

Dans la figure C, la partie vide a une hauteur égale à $h-28$.

Son volume est donc égal à $\pi \times 3^2 \times (h-28)$, ou $9\pi(h-28)$.

Puisque ces volumes sont égaux, on a :

$$\pi(h-20) = 9\pi(h-28)$$
$$h-20 = 9h-252$$
$$8h = 232$$
$$h = 29$$

La hauteur totale de la bouteille est de 29 cm. RÉPONSE : (A)

23. On définit une suite $t_1, t_2, ..., t_n, ...$ comme suit :

$$t_1 = 14$$
$$t_k = 24 - 5t_{k-1}, \text{ lorsque } k \geq 2.$$

Pour chaque entier strictement positif n, on peut exprimer t_n comme suit : $t_n = p \cdot q^n + r$, où p, q et r sont des constantes. La valeur de $p+q+r$ est :

(**A**) -5 (**B**) -3 (**C**) 3 (**D**) 17 (**E**) 31

Solution 1

Puisque $t_n = p \cdot q^n + r$, pour chaque entier $n \geq 1$, alors :

$$t_1 = pq + r$$
$$t_2 = pq^2 + r$$
$$t_3 = pq^3 + r.$$

Or $t_1 = 14$, $t_2 = 24 - 5(t_1) = 24 - 5(14) = -46$ et $t_3 = 24 - 5t_2 = 24 - 5(-46) = 254$.

Donc : $pq + r = 14$ (1)

$pq^2 + r = -46$ (2)

$pq^3 + r = 254$ (3)

En soustrayant (2) – (1), membre par membre, on a $pq^2 - pq = -60$, ou $pq(q-1) = -60$ (4).

En soustrayant (3) – (2), membre par membre, on a $pq^3 - pq^2 = 300$, ou $pq^2(q-1) = 300$ (5).

En divisant (5) par (4), membre par membre, on obtient $q = -5$.

On reporte $q = -5$ dans (1) et dans (2) pour obtenir :

$-5p + r = 14$ (6)

$25p + r = -46$ (7)

En additionnant $5\times$ (6) à (7), membre par membre, on obtient $6r = 24$, ou $r = 4$, d'où $p = -2$.

Donc $p+q+r = -2-5+4$, ou -3 et $t_n = -2(-5)^n + 4$.

Solution 2

On reporte $t_n = p \cdot q^n + r$ et $t_{n-1} = p \cdot q^{n-1} + r$ dans l'équation $t_n = 24 - 5t_{n-1}$ pour obtenir :

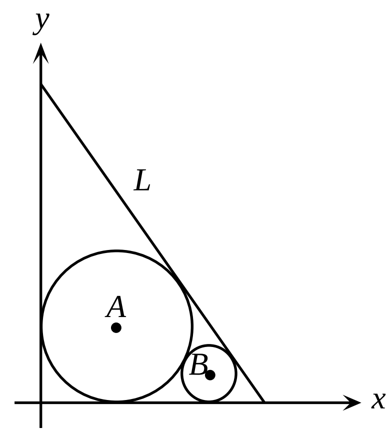
$$p \cdot q^n + r = 24 - 5\left(p \cdot q^{n-1} + r\right)$$
$$p \cdot q^n + 5pq^{n-1} = 24 - 5r - r$$
$$p \cdot q^{n-1}(q+5) = 24 - 6r.$$

Puisque le membre de droite est indépendant de n, le membre de gauche doit l'être aussi.

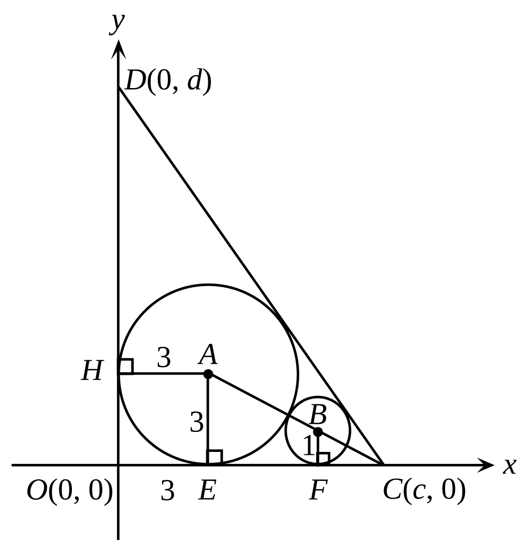
Donc $q+5=0$, d'où $q=-5$. (On sait que $p \neq 0$, sinon t_n serait une constante.)
Donc $24-6r=0$, d'où $r=4$.
L'équation $t_n = p(-5)^n + 4$ devient, pour $n=1$, $14=-5p+4$, d'où $p=-2$.
Donc $p+q+r=-3$. RÉPONSE : (B

24. Le cercle de centre *A* a un rayon de 3. Il est tangent à la partie positive de l'axe des *x* et à la partie positive de l'axe des *y*. Le cercle de centre *B* a un rayon de 1 et il est tangent à la partie positive de l'axe des *x* et au cercle de centre *A*. La droite *L* est tangente au deux cercles. L'ordonnée à l'origine de la droite *L* est :

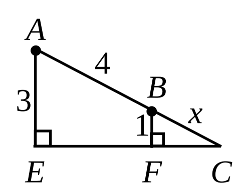
(**A**) $3+6\sqrt{3}$ (**B**) $10+3\sqrt{2}$ (**C**) $8\sqrt{3}$
(**D**) $10+2\sqrt{3}$ (**E**) $9+3\sqrt{3}$



Solution
Soit $C(c, 0)$ et $D(0, d)$ les points d'intersection respectifs de la droite et des axes des *x* et des *y*.
On trace le segment AC qui passe par le point *B*, car AC est la bissectrice de l'angle OCD.
Aux points *A* et *B*, on abaisse des perpendiculaires à l'axe des *x*, jusqu'aux points respectifs *E* et *F*.
On abaisse aussi une perpendiculaire AH à l'axe des *y*.
On a donc $AH = AE = 3$.



Le diagramme ci-contre illustre les triangles ACE et BCF qui sont semblables, puisque leurs angles sont congrus deux à deux.



Soit $x = BC$. Donc :

$$\frac{x}{1} = \frac{x+4}{3}$$
$$x = 2$$

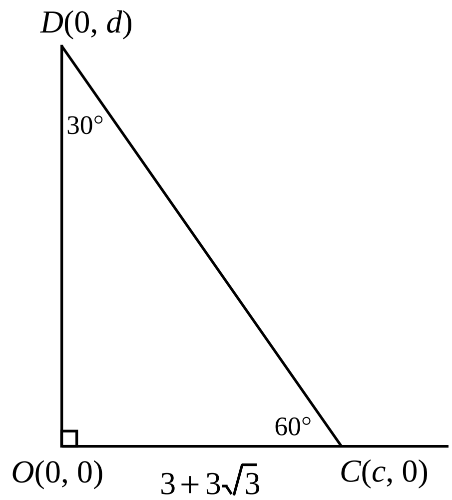
Dans le triangle BCF, $FC^2 = 2^2 - 1^2$, ou $FC^2 = 3$.

$$FC = \sqrt{3}, \quad (FC > 0).$$

Le triangle est donc un triangle $30° - 60° - 90°$ et on a $\angle BCF = 30°$ et $\angle OCD = 60°$.

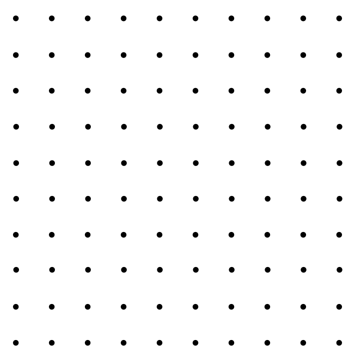
D'après les triangles semblables, on a donc $EF = 2\sqrt{3}$.

On a donc le diagramme ci-contre.
Donc : $d = \sqrt{3}\left(3 + 3\sqrt{3}\right)$
$= 3\sqrt{3} + 9$



RÉPONSE : (E)

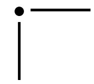
25. On considère un tableau formé de 10 rangées de 10 points, comme dans le diagramme. Chaque point est rouge ou bleu. Lorsque deux points d'une même couleur sont en positions adjacentes dans la même rangée ou la même colonne, ils sont joints par un segment de la même couleur que les points. Lorsque deux points de couleurs différentes sont en positions adjacentes, ils sont joints par un segment vert. En tout, il y a 52 points rouges. Il y a 2 points rouges dans les coins et 16 autres points rouges sur les côtés formant l'extérieur du tableau. Les autres points rouges sont à l'intérieur du tableau. Il y a 98 segments verts. Le nombre de segments bleus est égal à :



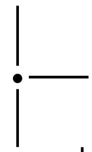
(**A**) 36 (**B**) 37 (**C**) 38
(**D**) 39 (**E**) 40

Solution
On remarque d'abord qu'il y a 9 segments dans chaque ligne et chaque colonne, pour un total de $9(10) + 9(10)$, ou 180 segments.
Soit B le nombre de segments bleus et R le nombre de segments rouges. On a donc $B + R + 98 = 180$, d'où $B + R = 82$, puisqu'il y a 98 segments verts.
Un segment qui arrive à un point rouge peut être rouge ou vert. On veut compter le *nombre total* de segments qui arrivent à des points rouges. Dans ce total, les segments verts seront comptés une fois chacun, tandis que les segments rouges seront comptés deux fois, puisqu'un segment rouge relie deux points rouges.

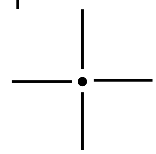
Il y a 2 segments qui arrivent à un point rouge de coin.



Il y a 3 segments qui arrivent à un point rouge situé sur un côté formant l'extérieur du tableau



Il y a 4 segments qui arrivent à un point rouge situé à l'intérieur du tableau.



Le nombre total de segments qui arrivent à des points rouges est donc égal à :

$$2(2)+3(16)+4(34)=188$$

Puisque 98 de ces segments sont verts, les autres $188-98$, ou 90 segments sont rouges, mais ils ont été comptés deux fois. Il y a donc vraiment 45 segments rouges. Donc $R=45$.
Donc $B=82-R$, d'où $B=37$. RÉPONSE : (B)