Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat (11e – Sec. V)

Le mercredi 21 février 2001

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche Comptables agréés

Avec la participation de :

Institut canadien des actuaires

Sybase inc (Waterloo)

Avec l'appui de :

London Life, compagnie d'assurance-vie et La Great-West, compagnie d'assurance-vie

Financière Manuvie

L'Équitable, Compagnie d'Assurance-Vie du Canada

Durée : 1 heure

L'usage de la calculatrice est permis, pourvu qu'elle ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

Directives
1. Attendez le signal du surveillant avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponse. Au besoin, demandez à l'enseignant-e d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Aussi, il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droit de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école, le nom de la ville et celui de la province.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats officiels.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation :
   Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Il *n'y a pas* de pénalité pour une réponse fautive.
   Chaque question restée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 20 points.
8. Les diagrammes *ne sont pas* dessinés à l'échelle. Ils sont inclus pour aider seulement.
9. Après le signal du surveillant, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Notation :	Une réponse fautive *n'est pas* pénalisée. On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 20 points.

Partie A : Chaque réponse exacte vaut 5 points

1. Si $x+2x+3x+4x=5$, alors x est égal à :

   (**A**) 10 (**B**) $\frac{1}{2}$ (**C**) $\frac{5}{4}$ (**D**) 2 (**E**) $\frac{5}{9}$

2. Si $x=\frac{1}{4}$, laquelle des expressions suivantes a la plus grande valeur?

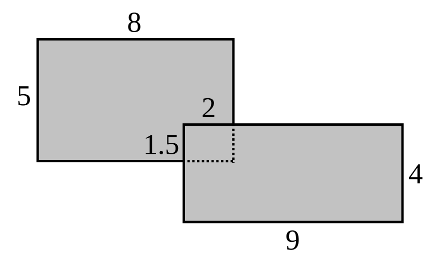
   (**A**) x (**B**) x^2 (**C**) $\frac{1}{2}x$ (**D**) $\frac{1}{x}$ (**E**) $\sqrt{x}$

3. Dans une école, 20 filles et 30 garçons se sont inscrits au concours Fermat. Des certificats ont été remis à 20 % des filles et à 10 % des garçons. Quel pourcentage des élèves inscrits ont reçu un certificat?

   (**A**) 14 (**B**) 15 (**C**) 16 (**D**) 30 (**E**) 50

4. Deux rectangles sont partiellement superposés comme dans le diagramme. La partie commune forme un rectangle. L'aire totale de la région ombrée est égale à :

   (**A**) 45 (**B**) 70 (**C**) 52
   (**D**) 79 (**E**) 73



5. Dans le triangle ABC, $\angle A = 3\angle B$ et $\angle B = 2\angle C$. La mesure de l'angle B est égale à :

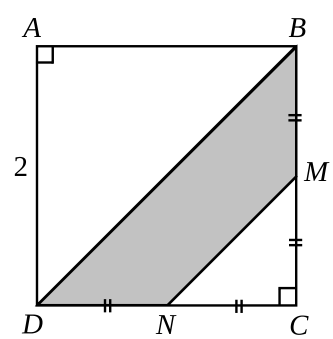
   (**A**) 10° (**B**) 20° (**C**) 30° (**D**) 40° (**E**) 60°

6. Patrick remet la moitié de ses billes à son meilleur ami, puis il remet un tiers des billes qu'il lui reste à sa sœur. Si sa sœur reçoit 9 billes, alors le nombre de billes que Patrick garde pour lui est :

   (**A**) 27 (**B**) 54 (**C**) 18 (**D**) 36 (**E**) 9

7. Dans le diagramme, le carré $ABCD$ a des côtés de longueur 2, M est le milieu de BC et N est le milieu de CD. L'aire de la région ombrée $BMND$ est égale à :

   (**A**) 1 (**B**) $2\sqrt{2}$ (**C**) $\frac{4}{3}$
   (**D**) $\frac{3}{2}$ (**E**) $4-\frac{3}{2}\sqrt{2}$



8. Si $\sqrt{5+11-7}=\sqrt{5+11}-\sqrt{x}$, alors la valeur de x est :

   (**A**) 1 (**B**) 7 (**C**) -7 (**D**) 49 (**E**) 4

9. Un sac contient 20 bonbons : 4 au chocolat, 6 à la menthe et 10 au caramel. Des bonbons sont retirés du sac, au hasard, et mangés. Quel est le nombre minimum de bonbons qu'il faut retirer du sac pour être *certain* qu'au moins deux bonbons de chaque sorte ont été mangés?

(**A**) 6 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 16 (**E**) 18

10. Lorsqu'un entier positif N est divisé par 60, le reste est égal à 49. Lorsque N est divisé par 15, le reste est égal à :

(**A**) 0 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 8

Partie B : Chaque réponse exacte vaut 6 points

11. La racine quatrième de 2001200120012001 (c'est-à-dire $\sqrt[4]{2001200120012001}$) est plus près de :

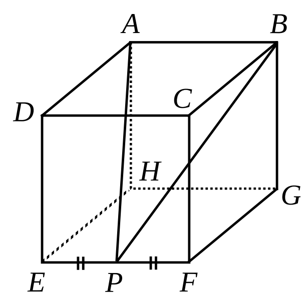
(**A**) 2001 (**B**) 6700 (**C**) 21 000 (**D**) 12 000 (**E**) 2100

12. Combien y a-t-il de valeurs entières de x qui vérifient $\frac{x-1}{3} < \frac{5}{7} < \frac{x+4}{5}$?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

13. $ABCDEFGH$ est un cube ayant des côtés de longueur 2. P est le milieu de EF. L'aire du triangle APB est égale à :

(A) $\sqrt{8}$ (**B**) 3 (**C**) $\sqrt{32}$
(**D**) $\sqrt{2}$ (**E**) 6

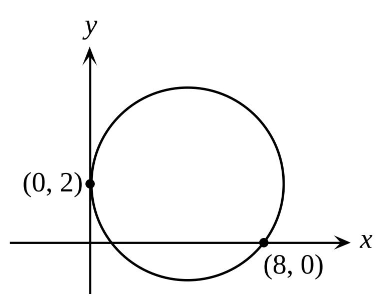


14. Le dernier chiffre (c'est-à-dire le chiffre des unités) du nombre $(2002)^{2002}$ est :

(**A**) 4 (**B**) 2 (**C**) 8 (**D**) 0 (**E**) 6

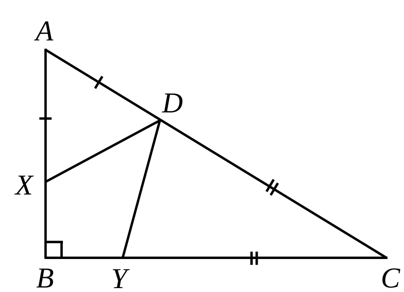
15. Un cercle est tangent à l'axe des y au point $(0, 2)$ et la plus grande de ses abscisses à l'origine est 8. Le rayon du cercle est égal à :

(**A**) $\frac{9}{2}$ (**B**) $\sqrt{17}$ (**C**) $\frac{17}{4}$
(**D**) $\frac{15}{4}$ (**E**) $\frac{\sqrt{17}}{2}$



16. Dans un triangle rectangle ABC, $AX = AD$ et $CY = CD$, comme l'indique le diagramme. La mesure de l'angle XDY est :

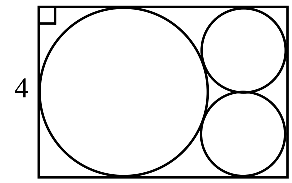
(**A**) 35° (**B**) 40° (**C**) 45°
(**D**) 50° (**E**) indéterminée par ces données



17. Trois nombres différents sont choisis tels que lorsqu'on additionne tour à tour un des nombres à la moyenne des deux autres, on obtient 65, 69 et 76. La moyenne des trois nombres choisis est égale à :

(**A**) 34 (**B**) 35 (**C**) 36 (**D**) 37 (**E**) 38

18. Les deux petits cercles du diagramme on le même rayon. Chacun des trois cercles est tangent aux deux autres cercles et chacun est tangent à des côtés du rectangle. Si le rectangle a une largeur de 4, sa longueur est égale à :



(**A**) $2+\sqrt{8}$ (**B**) $3+\sqrt{8}$ (**C**) $3+\sqrt{10}$
(**D**) $\sqrt{32}$ (**E**) $4+\sqrt{3}$

19. À chaque jour, Carla quitte l'école à la même heure. Si elle pédale à une vitesse de 20 km/h, elle arrive à la maison à 16 h 30. Si elle pédale à une vitesse de 10 km/h, elle arrive à la maison à 17 h 15. À quelle vitesse, en km/h, doit-elle pédaler pour arriver à la maison à 17 h?

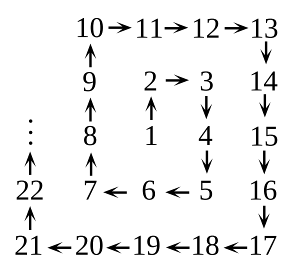
(**A**) $16\frac{2}{3}$ (**B**) 15 (**C**) $13\frac{1}{3}$ (**D**) 12 (**E**) $18\frac{3}{4}$

20. Le point P est sur la droite définie par $y=5x+3$. Les coordonnées d'un point Q sont $(3,-2)$. Si M est le milieu de PQ, alors M doit être situé sur la droite définie par :

(**A**) $y=\frac{5}{2}x-\frac{7}{2}$ (**B**) $y=5x+1$ (**C**) $y=-\frac{1}{5}x-\frac{7}{5}$ (**D**) $y=\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}$ (**E**) $y=5x-7$

Partie C : Chaque réponse exacte vaut 8 points

21. On forme une spirale de nombres, en commençant par 1, comme dans le diagramme. Si la spirale est prolongée de la même façon, dans laquelle des configurations suivantes retrouvera-t-on les nombres 399, 400 et 401?



(**A**) $399 \rightarrow 400 \rightarrow 401$ (**B**) $401 \leftarrow 400 \leftarrow 399$

(**C**) $\begin{array}{c} 401 \\ \uparrow \\ 400 \\ \uparrow \\ 399 \end{array}$ (**D**) $\begin{array}{c} 399 \\ \downarrow \\ 400 \\ \downarrow \\ 401 \end{array}$ (**E**) $\begin{array}{cc} 400 & \rightarrow 401 \\ \uparrow & \\ 399 & \end{array}$

22. Une bouteille fermée, contenant de l'eau, a été construite en attachant un cylindre de rayon 1 cm à un cylindre de rayon 3 cm, comme dans la Figure A. Lorsque la bouteille est tenue à l'endroit, le niveau de l'eau est à une hauteur de 20 cm, comme l'illustre la vue de face dans la Figure B. Lorsque la bouteille est tenue à l'envers, le niveau de l'eau est à une hauteur de 28 cm, comme l'illustre la Figure C. Quelle est la hauteur totale de la bouteille, en centimètres?

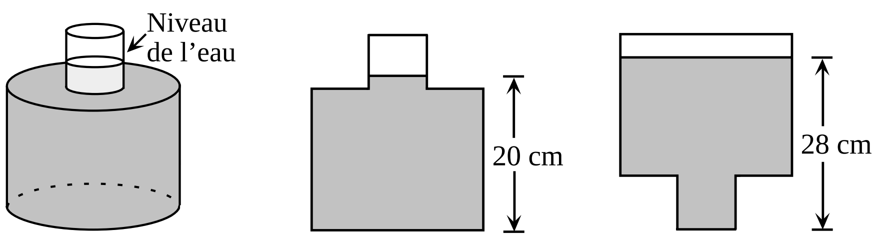


Figure A Figure B Figure C

(**A**) 29 (**B**) 30 (**C**) 31 (**D**) 32 (**E**) 48

à suivre ...

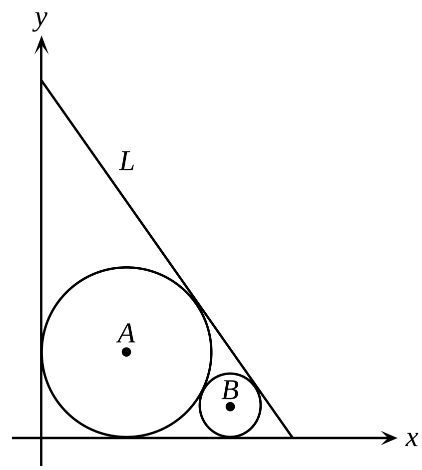
23. On définit une suite $t_1, t_2, ..., t_n, ...$ comme suit :

$$t_1 = 14$$
$$t_k = 24 - 5t_{k-1}, \text{ lorsque } k \geq 2.$$

Pour chaque entier strictement positif n, on peut exprimer t_n comme suit : $t_n = p \cdot q^n + r$, où p, q et r sont des constantes. La valeur de $p+q+r$ est :

(**A**) -5 (**B**) -3 (**C**) 3 (**D**) 17 (**E**) 31

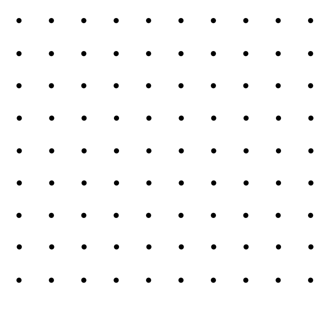
24. Le cercle de centre A a un rayon de 3. Il est tangent à la partie positive de l'axe des x et à la partie positive de l'axe des y. Le cercle de centre B a un rayon de 1 et il est tangent à la partie positive de l'axe des x et au cercle de centre A. La droite L est tangente au deux cercles. L'ordonnée à l'origine de la droite L est :



(**A**) $3+6\sqrt{3}$ (**B**) $10+3\sqrt{2}$ (**C**) $8\sqrt{3}$

(**D**) $10+2\sqrt{3}$ (**E**) $9+3\sqrt{3}$

25. On considère un tableau formé de 10 rangées de 10 points, comme dans le diagramme. Chaque point est rouge ou bleu. Lorsque deux points d'une même couleur sont en positions adjacentes dans la même rangée ou la même colonne, ils sont joints par un segment de la même couleur que les points. Lorsque deux points de couleurs différentes sont en positions adjacentes, ils sont joints par un segment vert. En tout, il y a 52 points rouges. Il y a 2 points rouges dans les coins et 16 autres points rouges sur les côtés formant l'extérieur du tableau. Les autres points rouges sont à l'intérieur du tableau. Il y a 98 segments verts. Le nombre de segments bleus est égal à :



(**A**) 36 (**B**) 37 (**C**) 38
(**D**) 39 (**E**) 40

❁ ❁ ❁ ❁ ❁