Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

# Concours Euclide (12e – Sec. V)

pour les prix

**The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING**

## Le jeudi 19 avril 2001

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche Comptables agréés

Avec la participation de :

Institut canadien des actuaires

Sybase inc (Waterloo)

Avec l'appui de :

London Life, compagnie d'assurance-vie et La Great-West, compagnie d'assurance-vie

Financière Manuvie

L'Équitable, Compagnie d'Assurance-Vie du Canada

**Durée :** 2 heures et demie



L'utilisation de la calculatrice **est permise**, pourvu que celle-ci ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

N'ouvrez pas ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions valant 10 points chacune. Les parties de chaque question peuvent être de deux types. Les parties à **RÉPONSE COURTE** valent 2 points chacune (questions 1 à 2) ou 3 points chacune (questions 3 à 7). Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points pour la question.

**Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES :**

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci: .
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse**. Le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera accordée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

**Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT :**

1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci: .
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse**. Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse.
3. Des points sont accordés pour de solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

**Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.**

REMARQUES :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Une partie des points peut être accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. Sauf indication contraire, on s'attend à ce que les calculs et les réponses soient exprimés au moyen de valeurs exactes, telles que $4\pi$, $2+\sqrt{7}$, etc.

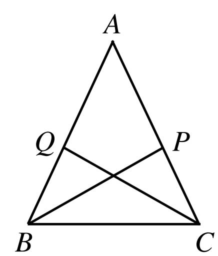
1. a) Quelles sont les valeurs de $x$ telles que $(2x-3)^2 = 9$?

   b) Soit $f(x) = x^2 - 3x - 5$. Quelles sont les valeurs de $k$ pour lesquelles $f(k) = k$?

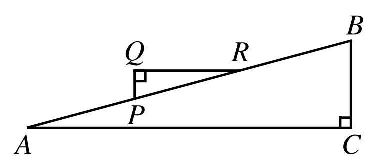
   c) Déterminer tous les couples $(x, y)$ tels que $x^2 + y^2 = 25$ et $x - y = 1$.

2. a) Le sommet de la parabole définie par $y = (x-b)^2 + b + h$ a pour coordonnées $(2, 5)$. Quelle est la valeur de $h$?

   b) On considère un triangle isocèle $ABC$ dans lequel $AB = AC$ et $\angle BAC = 40°$. Le point $P$, sur le côté $AC$, est tel que $BP$ est la bissectrice de l'angle $ABC$. De même, le point $Q$, sur le côté $AB$, est tel que $CQ$ est la bissectrice de l'angle $ACB$. Quelle est la mesure de l'angle $APB$, en degrés?




   c) Dans le diagramme, on a $AB = 300$, $PQ = 20$ et $QR = 100$. De plus, $QR$ est parallèle à $AC$. Déterminer la longueur $BC$, à l'unité près.

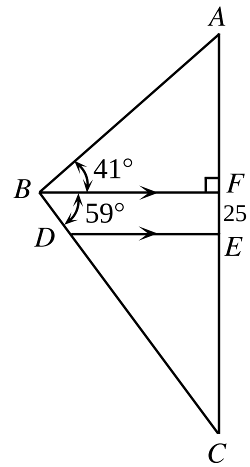



3. a) On considère une suite croissante de nombres ayant un nombre impair de termes. La différence entre n'importe quels deux termes consécutifs est une constante, $d$, et le terme du milieu est 302. Lorsqu'on enlève les 4 derniers termes de la suite, le terme du milieu de la nouvelle suite est 296. Quelle est la valeur de $d$?

   b) Il existe deux suites croissantes de cinq entiers consécutifs, dont la somme des carrés des trois premiers termes est égale à la somme des carrés des deux derniers. Déterminer ces deux suites.

4. a) Soit $f(t)=\sin\left(\pi t-\frac{\pi}{2}\right)$. Quelle est la plus petite valeur strictement positive de $t$ pour laquelle $f(t)$ admet sa valeur minimale?

b) Dans le diagramme, $\angle ABF=41°$, $\angle CBF=59°$, $DE$ est parallèle à $BF$ et $EF=25$. Déterminer la longueur $AE$, sachant que $AE=EC$. Exprimer la réponse au centième près.




5. a) Déterminer toutes les valeurs entières de $x$ pour lesquelles $(x^2-3)(x^2+5)<0$.

b) Aujourd’hui, la somme de l’âge d’un homme et d’une femme, $P$, est égale à six fois la somme de l’âge de leurs enfants, $C$. Il y a deux ans, la somme de l’âge de l’homme et de la femme était égal à dix fois la somme de l’âge des mêmes enfants. Dans six ans, elle sera trois fois la somme de l’âge des mêmes enfants. Déterminer le nombre d’enfants.

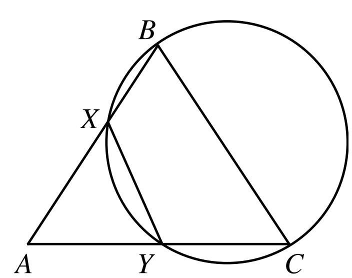
6. a) Quatre équipes, $A$, $B$, $C$ et $D$, participaient à un tournoi de hockey sur gazon. Trois entraîneurs ont tenté de prédire les équipes qui remporteraient les médailles d’or, d’argent et de bronze. Voici leurs prédictions :

| Médaille | Or | Argent | Bronze |
|---|---|---|---|
| Équipe | | | |

- L’entraîneur 1 : Or, $A$; Argent, $B$; Bronze, $C$.
- L’entraîneur 2 : Or, $B$; Argent, $C$; Bronze, $D$.
- L’entraîneur 3 : Or, $C$; Argent, $A$; Bronze, $D$.

Chaque entraîneur a prédit correctement l’équipe gagnante d’une seule médaille. Compléter le tableau **dans le cahier-réponse** pour indiquer l’équipe qui a remporté chaque médaille.

b) Dans le triangle $ABC$, $AB=BC=25$ et $AC=30$. Le cercle de diamètre $BC$ coupe $AB$ en $X$ et $AC$ en $Y$. Déterminer la longueur $XY$.



7. a) Quelle est la valeur de $x$ pour laquelle $\log_2\left(\log_2(2x-2)\right)=2$ ?

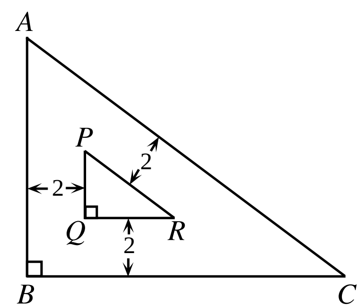
b) Soit $f(x)=2^{kx}+9$, $k$ étant un nombre réel. Déterminer la valeur de $f(9)-f(3)$, sachant que $f(3):f(6)=1:3$.

8. a) Dans le plan cartésien du cahier-réponse, tracer la représentation graphique de $y=x^2-4$ et de $y=2|x|$.

b) Déterminer toutes les valeurs de $k$ pour lesquelles la courbe représentative de $y=x^2-4$ et celle de $y=2|x|+k$ **ne** se coupent **pas**. Justifier ses conclusions.

c) Indiquer les valeurs de $k$ pour lesquelles la courbe représentative de $y=x^2-4$ et celle de $y=2|x|+k$ se coupent en exactement deux points.
(Il n'est pas nécessaire de justifier sa réponse.)

9. Le triangle $ABC$ est rectangle en $B$ et les longueurs de ses côtés sont des entiers. Un deuxième triangle, $PQR$, est situé à l'intérieur du triangle $ABC$, comme dans le diagramme, de manière que ses côtés soient parallèles à ceux du triangle $ABC$ et que la distance entre les côtés parallèles soit égale à 2. Déterminer les longueurs des côtés de tous les triangles possibles $ABC$, de manière que l'aire du triangle $ABC$ soit 9 fois celle du triangle $PQR$.




10. Les points $P$ et $Q$ sont situés à l'intérieur du carré $ABCD$ de manière que $DP$ soit parallèle à $QB$ et que $DP = QB = PQ$. Déterminer la plus petite valeur possible de la mesure de l'angle $ADP$.