Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2000 Solutions
Concours Pascal (9e - Sec. III)

pour les prix
The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

Partie A

1. La valeur de $5^2 + 2(5-2)$ est :

   (**A**) 16 (**B**) 19 (**C**) 31 (**D**) 36 (**E**) 81

   Solution

   Selon l'ordre priotaire des opérations, on a : $5^2 + 2(5-2)$
   $= 25 + 2(3)$
   $= 25 + 6$
   $= 31$

   RÉPONSE : (C)

2. La somme de $29 + 12 + 23$ est égale à :

   (**A**) 32^2 (**B**) 2^6 (**C**) 3^4 (**D**) 1^{64} (**E**) 64^0

   Solution

   On évalue chacun des choix : $32^2 = 1024$, $2^6 = 64$, $3^4 = 81$, $1^{64} = 1$ et $64^0 = 1$.
   Puisque $29 + 12 + 23 = 64$, la réponse est B.

   RÉPONSE : (B)

3. Si $x = 4$ et $y = -3$, alors la valeur de $\dfrac{x-2y}{x+y}$ est :

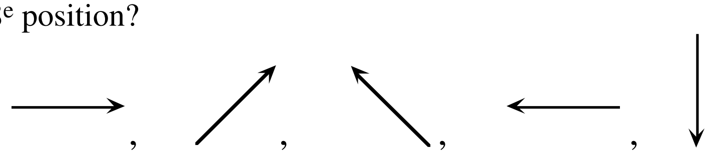
   (**A**) $-\frac{1}{2}$ (**B**) -2 (**C**) $\frac{10}{7}$ (**D**) $-\frac{2}{7}$ (**E**) 10

   Solution

   Si $x = 4$ et $y = -3$, alors : $\dfrac{x-2y}{x+y} = \dfrac{4-2(-3)}{4+(-3)}$
   $= \dfrac{10}{1}$
   $= 10$

   RÉPONSE : (E)

4. Si la suite de cinq flèches, illustrée ci-dessous, se répète sans cesse, quelle flèche sera située dans la 48^e position?



(A) $\longrightarrow$ **(B)** $\nearrow$ **(C)** $\nwarrow$ **(D)** $\longleftarrow$ **(E)** $\downarrow$

Solution

Puisque la suite se répète, après neuf cycles, la cinquième flèche sera dans la 45e position. La troisième flèche sera donc dans la 48e position.

RÉPONSE : (C)

5. Si $y = 6 + \frac{1}{6}$, alors $\frac{1}{y}$ est égal à :

(A) $\frac{6}{37}$ **(B)** $\frac{37}{6}$ **(C)** $\frac{6}{7}$ **(D)** $\frac{7}{6}$ **(E)** 1

Solution

On a $6 + \frac{1}{6} = \frac{36}{6} + \frac{1}{6}$, ou $\frac{37}{6}$. Puisque $y = \frac{37}{6}$, $\frac{1}{y} = \frac{6}{37}$.

RÉPONSE : (A)

6. Si les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{23}{30}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{11}{15}$ et $\frac{4}{5}$ sont écrites en ordre, de la plus petite à la plus grande, la fraction du milieu sera :

(A) $\frac{23}{30}$ **(B)** $\frac{4}{5}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{9}{10}$ **(E)** $\frac{11}{15}$

Solution

Pour comparer les fractions, on les exprime au moyen d'un dénominateur commun. Puisque le plus petit commun multiple de 3, 30, 10, 15 et 5 est 30, on a :

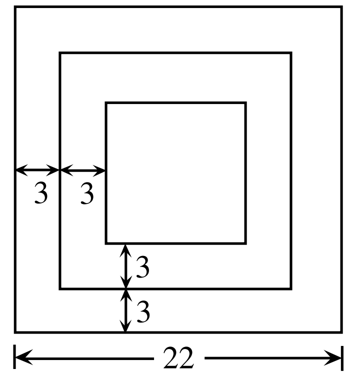
Fraction donnée	Fraction équivalente
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} \times \frac{10}{10} = \frac{20}{30}$
$\frac{23}{30}$	$\frac{23}{30}$
$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{10} \times \frac{3}{3} = \frac{27}{30}$
$\frac{11}{15}$	$\frac{11}{15} \times \frac{2}{2} = \frac{22}{30}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5} \times \frac{6}{6} = \frac{24}{30}$

On les place en ordre croissant : $\frac{20}{30}$, $\frac{22}{30}$, $\frac{23}{30}$, $\frac{24}{30}$ et $\frac{27}{30}$

La fraction du milieu est $\frac{23}{30}$.

RÉPONSE : (A)

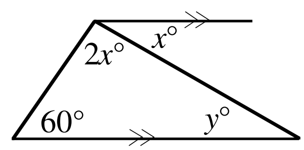
7. Le diagramme illustre trois carrés ayant un même centre et dont les côtés correspondants sont parallèles. Il y a une distance de 3 unités entre les côtés correspondants. Le plus grand carré a des côtés de 22 unités. Quel est le périmètre du plus petit carré?



(**A**) 40 (**B**) 100 (**C**) 10
(**D**) 64 (**E**) 20

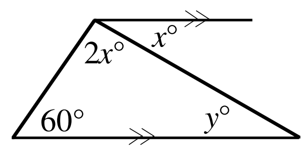
Solution
Les côtés du carré du milieu mesurent chacun 6 unités de moins que ceux du grand carré. Ils mesurent donc 16 unités. De même, les côtés du petit carré mesurent chacun 6 unités de moins que ceux du carré du milieu. Ils mesurent donc 10 unités.
Le petit carré a donc un périmètre de 4×10, ou 40 unités. RÉPONSE : (A)

8. D'après le diagramme, la valeur de y est :



(**A**) 30 (**B**) 20 (**C**) 80
(**D**) 60 (**E**) 40

Solution
Puisque les lignes horizontales sont parallèles, on a des angles alternes-internes congrus, d'où $x = y$. Dans le triangle, on a donc $2x° + x° + 60° = 180°$. Donc $3x° = 120°$, d'où $x = 40$. Puisque $x = y$, alors $y = 40$.



RÉPONSE : (E)

9. Trois candidats du concours Pascal sont âgés de 14 ans et 9 mois, 15 ans et 1 mois et 14 ans et 8 mois. La moyenne de leur âge est :

(**A**) 14 ans et 8 mois (**B**) 14 ans et 9 mois (**C**) 14 ans et 10 mois
(**D**) 14 ans et 11 mois (**E**) 15 ans

Solution 1
On choisit l'âge du plus jeune comme repère. Les deux autres candidats ont respectivement un mois de plus et cinq mois de plus. Puisque $\frac{0+1+5}{3} = 2$, la moyenne de leur âge est 2 mois de plus que l'âge du plus jeune. La moyenne de leur âge est donc 14 ans et 10 mois.

Solution 2
Cette solution exige plus de calculs. Puisqu'il y a 12 mois dans une année, le premier est âgé de $14 \times 12 + 9$, ou 177 mois. De même, les deux autres candidats sont âgés de 181 et de 176 mois. La moyenne de leur âge est égale à $\frac{177+181+176}{3}$, ou 178 mois. Puisque $178 = 12 \times 14 + 10$, la moyenne de leur âge est de 14 ans et 10 mois. RÉPONSE : (C)

10. Le nombre d'entiers entre les nombres $-\sqrt{8}$ et $\sqrt{32}$ est :

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 19

Solution
Puisque $-\sqrt{8} \doteq -2{,}8$ et $\sqrt{32} \doteq 5{,}7$, les entiers entre les nombres $-2{,}8$ et $5{,}7$ sont -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 et 5. Il y a huit entiers. RÉPONSE : (D)

Partie B

11. Un magasin de vêtements met ses tee-shirts en solde. Pour chaque achat de deux tee-shirts au prix régulier, on obtient un troisième tee-shirt au prix de 1 \$. Si on obtient 12 tee-shirts pour 120 \$, quel est le prix régulier d'un tee-shirt?

(**A**) 10,00 \$ (**B**) 13,50 \$ (**C**) 14,00 \$ (**D**) 14,50 \$ (**E**) 15,00 \$

Solution 1
On a acheté quatre lots de trois tee-shirts au prix de 120 \$. Chaque lot a donc coûté 30 \$. Puisque le troisième tee-shirt coûte 1 \$, les deux autres ont coûté 29 \$, soit 14,50 \$ chacun.

Solution 2
Soit x dollars le prix régulier d'un tee-shirt. Si on achète un lot de trois tee-shirts, on paiera donc $(2x+1)$ dollars. Puisque 12 tee-shirts coûtent 120 \$, un lot de trois tee-shirts coûte 30 \$. Donc $2x+1=30$, d'où $x = 14{,}50$. Le prix régulier d'un tee-shirt est de 14,50 \$.

RÉPONSE : (D)

12. Dans ce diagramme, chaque nombre à partir de 30 est égal au double de la somme des deux nombres qui le précèdent, à sa gauche. Quelle est la valeur de c?

10	a	30	b	c

(**A**) 50 (**B**) 70 (**C**) 80 (**D**) 100 (**E**) 200

Solution
D'après les trois premières cases, on a :

$$30 = 2(10 + a)$$
$$15 = a + 10$$
$$a = 5$$

Puisque $a = 5$, alors $b = 2(30 + 5)$, ou 70 et $c = 2(70 + 30)$, ou 200. RÉPONSE : (E)

13. Dans l'expression $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$, chaque lettre est remplacée par un nombre différent choisi parmi 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Quelle est la plus grande valeur possible de cette expression?

(**A**) $8\frac{2}{3}$ (**B**) $9\frac{5}{6}$ (**C**) $9\frac{1}{3}$ (**D**) $9\frac{2}{3}$ (**E**) $10\frac{1}{3}$

Solution
Pour obtenir la plus grande valeur possible de l'expression, il faut maximiser chaque fraction. On choisira donc le plus grand nombre possible comme numérateur d'une fraction et le plus petit nombre possible comme dénominateur. La première fraction sera donc $\frac{6}{1}$. On choisit parmi les nombres qui restent pour obtenir $\frac{5}{2}$ et $\frac{4}{3}$. On obtient donc :

$$6 + \frac{5}{2} + \frac{4}{3}$$
$$= \frac{36 + 15 + 8}{6}$$
$$= \frac{59}{6}, \text{ ou } 9\frac{5}{6}$$

RÉPONSE : (B)

14. Les nombres 6, 14, x, 17, 9, y et 10 ont une médiane de 12 et une moyenne de 13. Quelle est la valeur de $x + y$?

(**A**) 20 (**B**) 21 (**C**) 23 (**D**) 25 (**E**) 35

Solution
Puisque sept nombres ont une moyenne de 13, leur somme est égale à 7×13, ou 91. Donc $6 + 14 + x + 17 + 9 + y + 10 = 91$, d'où $x + y = 35$. RÉPONSE : (E)

15. Les chiffres 1, 1, 2, 2, 3 et 3 sont placés de manière à former un entier impair de six chiffres. Les « 1 » sont séparés par un chiffre, les « 2 » sont séparés par deux chiffres et les « 3 » sont séparés par trois chiffres. Quels sont les trois derniers chiffres de l'entier?

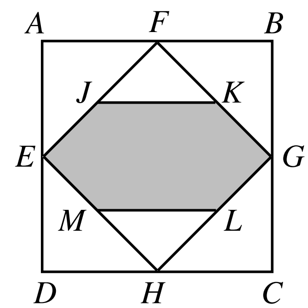
(**A**) 3 1 2 (**B**) 1 2 3 (**C**) 1 3 1 (**D**) 1 2 1 (**E**) 2 1 3

Solution

Deux nombres, soit 312132 et 231213, satisfont aux conditions de séparation. Puisque le nombre doit être impair, il s'agit donc de 231213. Les trois derniers chiffres sont 2 1 3.

RÉPONSE : (E)

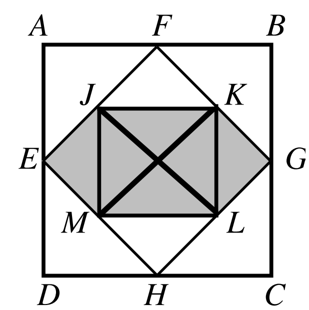
16. Le carré $ABCD$ a une aire de 64. On joint les milieux de ses côtés pour former le carré $EFGH$. Les points J, K, L et M sont les milieux des côtés de $EFGH$. L'aire de la partie ombrée est égale à :



(**A**) 32 (**B**) 24 (**C**) 20
(**D**) 28 (**E**) 16

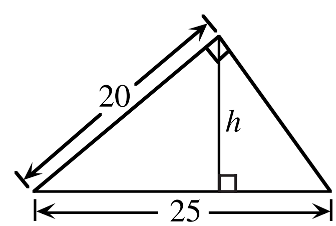
Solution

On trace les segments illustrés dans le diagramme. Le carré $FGHE$ est divisé en huit triangles congruents dont six sont ombrés. Or l'aire du carré $FGHE$ est la moitié de l'aire du carré $ABCD$. L'aire de la partie ombrée est égale à $\frac{6}{8}\times\left(\frac{1}{2}\times 64\right)$, ou 24.



RÉPONSE : (B)

17. Dans ce diagramme, la valeur de la hauteur h est :



(**A**) 6 (**B**) 9 (**C**) 10
(**D**) 12 (**E**) 15

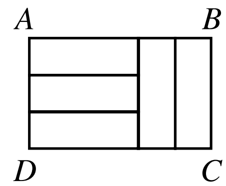
Solution

Puisque le grand triangle est semblable à un triangle $3:4:5$, le troisième côté a une longueur de 15 car $3:4:5 = 15:20:25$. (On peut utiliser le théorème de Pythagore et calculer $\sqrt{25^2 - 20^2} = 15$.) On peut calculer l'aire du triangle en utilisant la base de 20 ou la base de 25. On obtient alors

$$\frac{1}{2}(20)(15) = \frac{1}{2}(h)(25)$$
$$300 = 25h$$
$$h = 12$$

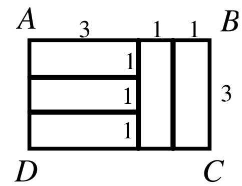
RÉPONSE : (D)

18. Les cinq petits rectangles du diagramme sont identiques. Le rapport $AB:BC$ est égal à :



(**A**) 3:2 (**B**) 2:1 (**C**) 5:2
(**D**) 5:3 (**E**) 4:3

Solution
Si chaque petit rectangle a une largeur de 1 unité, chacun a une longueur de 3 unités comme l'indique le diagramme.
On voit que $AB:BC = 5:3$.



RÉPONSE : (D)

19. L'année 2000 est bissextile. L'année 2100 ne sera pas bissextile. Voici les règles pour établir une année bissextile :
i L'année A n'est pas bissextile si A n'est pas divisible par 4.
ii L'année A est bissextile si A est divisible par 4, mais pas par 100.
iii L'année A n'est pas bissextile si A est divisible par 100, mais pas par 400.
iv L'année A est bissextile si A est divisible par 400.
Combien y aura-t-il d'années bissextiles de l'an 2000 à l'an 3000 inclusivement?

(**A**) 240 (**B**) 242 (**C**) 243 (**D**) 244 (**E**) 251

Solution
Si on considère les 1001 années de l'an 2000 à l'an 3000, il y a 251 années dont le numéro est divisible par 4. Chacune est une année bissextile sauf les années 2100, 2200, 2300, 2500, 2600, 2700, 2900 et 3000. Il y a donc $251 - 8$, ou 243 années bissextiles de l'an 2000 à l'an 3000.

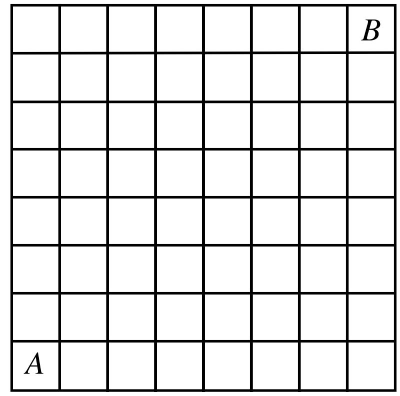
RÉPONSE : (C)

20. On trace une ligne droite au travers d'un échiquier 8 sur 8. Quel est le plus grand nombre de carrés 1 sur 1 que la droite peut traverser?

(**A**) 12 (**B**) 14 (**C**) 16 (**D**) 11 (**E**) 15

Solution

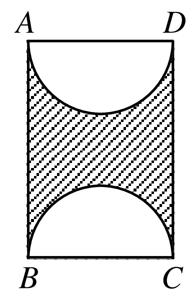
Supposons que la ligne droite part du carré A et se termine dans le carré B. Pour traverser le plus grand nombre de carrés, il faut traverser sept lignes horizontales et sept lignes verticales. On peut traverser un nouveau carré chaque fois que l'on traverse une ligne si on évite de traverser la ligne à un coin. On peut donc traverser 14 nouveaux carrés pour un total de 15 carrés.



RÉPONSE : (E)

Partie C

21. $ABCD$ est un rectangle et $AD = 10$. Si la partie ombrée a une aire de 100, quelle est la plus petite distance entre les deux demi-cercles?



(**A**) $2{,}5\pi$ (**B**) 5π (**C**) π
(**D**) $2{,}5\pi + 5$ (**E**) $2{,}5\pi - 2{,}5$

Solution

Puisque $AD = 10$, chaque demi-cercle a un rayon de 5 unités. Puisque les deux demi-cercles forment un cercle de rayon 5, leur aire totale est égale à $\pi(5)^2$, ou 25π. Le rectangle a donc une aire de $25\pi + 100$. Puisque sa largeur est égale à 10, on a $10(AB) = 25\pi + 100$, d'où $AB = 2{,}5\pi + 10$. La plus petite distance entre les deux demi-cercles est donc égale à $(2{,}5\pi + 10) - 10$, ou $2{,}5\pi$.

RÉPONSE : (A)

22. On considère un morceau de bois ayant la forme d'un prisme droit à base rectangulaire et dont les dimensions sont 4 sur 5 sur 6. On recouvre ce morceau de bois d'une couche de peinture verte, puis on le découpe en petits cubes mesurant 1 sur 1 sur 1. Le rapport du nombre de cubes ayant exactement deux faces vertes au nombre de cubes ayant trois faces vertes est égal à :

(**A**) 9:2 (**B**) 9:4 (**C**) 6:1 (**D**) 3:1 (**E**) 5:2

Solution

Les cubes dans les coins ont trois faces vertes. Il y en a huit. Les cubes ayant exactement deux faces vertes sont placés le long des arêtes sans être dans les coins. Chaque arête de longueur 4 compte donc deux tels cubes. Chaque arête de longueur 5 en compte trois et chaque arête de longueur 6 en compte quatre. Le nombre de cubes ayant exactement deux faces vertes est donc égal à $4(4)+4(3)+4(2)$, ou 36. Le rapport demandé est égal à $36:8$, ou $9:2$. RÉPONSE : (A)

23. On considère un entier de 2000 chiffres dont le premier chiffre, à l'extrême gauche, est un 3. Les chiffres de l'entier sont placés de manière que n'importe quels deux chiffres consécutifs forment un nombre divisible par 17 ou par 23. Le 2000^{e} chiffre peut être a ou b. Quelle est la valeur de $a+b$?

(**A**) 3 (**B**) 7 (**C**) 4 (**D**) 10 (**E**) 17

Solution
On remarque que les multiples de 17 formés de deux chiffres sont 17, 34, 51, 68 et 85. De même, les multiples de 23 formés de deux chiffres sont 23, 46, 69 et 92. Puisque le premier chiffre de l'entier est un 3 et que seul le nombre 34 dans la liste des multiples commence par un 3, le deuxième chiffre de l'entier doit être un 4. De même, le troisième chiffre doit être un 6. Le quatrième chiffre peut être un 8 ou un 9. On considère deux cas.

1er cas
Le quatrième chiffre est un 8. Les chiffres suivants sont 5, 1 et 7. Puisqu'il n'y aucun multiple dans la liste qui commence par un 7, l'entier est 3468517.

2^{e} cas
Le quatrième chiffre est un 9. On obtient alors 34692 34692 34… Les cinq chiffres '34692' se répéteront à l'infini tant que l'on choisit le chiffre 9 après le chiffre 6.

Un entier de 2000 chiffres doit contenir 399 groupes des chiffres '34692'. Les cinq derniers chiffres peuvent être 34692 ou 34685. Le 2000^{e} chiffre peut donc être un 2 ou un 5. Donc $a+b=2+5=7$.

RÉPONSE : (B)

24. Il y a sept points sur une feuille de papier. Exactement quatre de ces points sont placés en ligne droite. Aucune autre droite ne contient plus de deux des points. Si on forme des triangles dont les sommets sont choisis parmi ces points, combien de triangles peut-on former?

(**A**) 18 (**B**) 28 (**C**) 30 (**D**) 31 (**E**) 33

Solution
On considère trois cas par rapport aux quatre points qui sont situés sur une même droite.

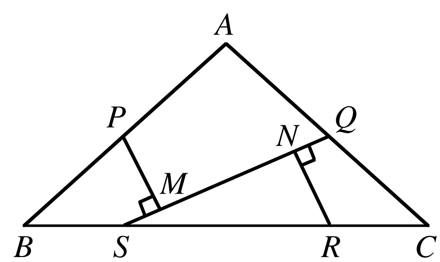
1^er^ cas   Les triangles n'ont aucun sommet sur la droite.
Puisqu'il n'y a que trois points qui ne sont pas sur la droite, on ne peut former qu'un triangle avec ces points.

2^e^ cas   Les triangles ont chacun un sommet sur la droite.
Il y a quatre choix possibles pour le point sur la droite. Pour chacun de ces choix, il y a trois façons de choisir deux des trois points qui ne sont pas sur la droite. Il y a donc 4×3, ou 12 triangles possibles.

3^e^ cas   Les triangles ont chacun deux sommets sur la droite.
Il y a six façons de choisir deux points sur la droite. Pour chaque choix, on peut choisir un des trois points qui ne sont pas sur la droite. Il y a donc 6×3, ou 18 triangles possibles.

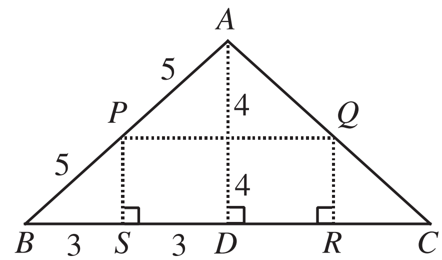
En tout, il y a $1+12+18$, ou 31 triangles possibles. RÉPONSE : (D)

25. Le triangle ABC est isocèle, où $AB=AC=10$ et $BC=12$. Les points S et R sont situés sur BC de manière que $BS:SR:RC=1:2:1$. P et Q sont les milieux respectifs de AB et de AC. PM et RN sont des perpendiculaires à SQ. La longueur de MN est égale à :



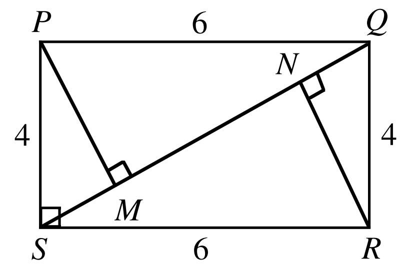
(A) $\frac{9}{\sqrt{13}}$ (B) $\frac{10}{\sqrt{13}}$ (C) $\frac{11}{\sqrt{13}}$ (D) $\frac{12}{\sqrt{13}}$ (E) $\frac{5}{2}$

Solution



On trace la hauteur AD. Puisque le triangle ABC est isocèle, $BD = 6$ et $AP = PB = AQ = QC = 5$. Puisque le triangle ABD est rectangle, on utilise le théorème de Pythagore pour obtenir $AD = 8$. On trace les segments PQ, PS et QR. Les triangles ABD et PBS sont semblables. En effet, ils ont un angle commun et $AB{:}PB = BD{:}BS = 2{:}1$. Donc $PS = 4$ et le côté PS est parallèle au côté AD. Par symétrie, $QR = 4$ et le côté QR est parallèle au côté AD. $PQRS$ est donc un rectangle et $PQ = 6$ puisque $SR = 6$.

On a donc le diagramme ci-contre.



Puisque le triangle QRS est rectangle, $SQ^2 = 4^2 + 6^2$, d'où $SQ = \sqrt{52}$ ou $SQ = 2\sqrt{13}$.
Le rectangle a une aire de 24. Le triangle QRS a donc une aire de 12. Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(SQ)(NR) &= 12 \\
\frac{1}{2}\left(2\sqrt{13}\right)(NR) &= 12 \\
NR &= \frac{12}{\sqrt{13}}
\end{aligned}$$

Puisque le triangle NQR est rectangle :

$$\begin{aligned}
NR^2 + NQ^2 &= QR^2 \\
\left(\frac{12}{\sqrt{13}}\right)^2 + NQ^2 &= 4^2 \\
\frac{144}{13} + NQ^2 &= 16 \\
NQ^2 &= 16 - \frac{144}{13} \\
&= \frac{208}{13} - \frac{144}{13} \\
&= \frac{64}{13}
\end{aligned}$$

Donc $NQ = \frac{8}{\sqrt{13}}$. De même, $MS = \frac{8}{\sqrt{13}}$.
Puisque $SQ = 2\sqrt{13}$:

$$
\begin{aligned}
MN &= 2\sqrt{13} - 2\left(\frac{8}{\sqrt{13}}\right) \\
&= \frac{26}{\sqrt{13}} - \frac{16}{\sqrt{13}} \\
&= \frac{10}{\sqrt{13}}
\end{aligned}
$$

RÉPONSE : (B)